

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 2 - LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 1: CÁC TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

Lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số bằng nhau, mỗi thừa số bằng a :

$$a^n = \underbrace{a.a....a}_{(n \text{ thừa số } a)} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

a được gọi là cơ số.

n được gọi là số mũ.

2. MỘT VÀI QUY ƯỚC

$$1^n = 1 \text{ ví dụ : } 1^{2021} = 1$$

$$a^0 = 1 \text{ ví dụ : } 2021^0 = 1$$

3. NHÂN HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng các số mũ.

4. CHIA HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0; m \geq 0)$$

Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số (khác 0), ta giữ nguyên cơ số và trừ các số mũ cho nhau.

5. LŨY THỪA CỦA LŨY THỪA

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

$$\text{Ví dụ : } (2^2)^4 = 2^{2.4} = 2^8$$

6. NHÂN HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ, KHÁC SỐ MŨ

$$a^m . b^m = (a.b)^m$$

$$\text{ví dụ : } 2^3 . 4^3 = (2.4)^3 = 8^3$$

7. LŨY THỪA TẦNG

$$a^{m^n} = a^{(m^n)}$$

$$\text{Ví dụ : } 3^{3^2} = (3^{3^2}) = 3^9$$

8. CHIA HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ KHÁC SỐ MŨ

$$a^m : b^m = (a:b)^m$$

$$\text{ví dụ : } 8^4 : 4^4 = (8:4)^4 = 2^4$$

9. LŨY THỪA CỦA MỘT THƯƠNG

$$(a:b)^n = a^n : b^n \quad (b \neq 0)$$

Ví dụ: $(8:4)^2 = 8^2 : 4^2 = 64:16 = 4$

PHẦN II: CÁC DẠNG BÀI

DẠNG 1: Viết gọn một biểu thức dưới dạng lũy thừa

I. Phương pháp giải: Sử dụng các công thức sau:

$$a^n = \underbrace{a.a....a}_{(n \text{ thừa số } a)} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : b^m = (a:b)^m \quad (a \neq 0; m \geq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

$$a^m . b^m = (ab)^m$$

$$a^{m^n} = a^{(m^n)}$$

$$a^m : b^m = (a:b)^m$$

II. Bài toán:

Bài 1: Viết các tích sau dưới dạng lũy thừa

a) $2.4.8.8.8$

b) $2^5.4^3.16^2$

c) $3^4.27^4.81^2$

d) $10.100.100^3.1000^5$

e) $3y.3y.3y \quad (y \neq 0)$

f) $x^1.x^2....x^{100} \quad (x \neq 0)$

g) $z^1.z^4.z^7....z^{100} \quad (z \neq 0)$

h) $(m^1)^2.(m^2)^3.(m^3)^4....(m^{99})^{100} \quad (m \neq 0)$

Lời giải

a) Ta có: $2.4.8.8.8 = 2.2^2.2^3.2^3.2^3 = 2^{12}$

b) Ta có: $2^5.4^3.16^2 = 2^5.(2^2)^3.(2^4)^2 = 2^5.2^6.2^8 = 2^{19}$

c) Ta có: $3^4.27^4.81^2 = 3^4.(3^3)^4.(3^4)^2 = 3^4.3^{12}.3^8 = 3^{24}$

d) Ta có: $10.100.100^3.1000^5 = 10.10^2.(10^2)^3.(10^3)^5 = 10.10^2.10^6.10^{15} = 10^{24}$

e) Ta có: $3y.3y.3y \quad (y \neq 0) = (3y)^3$

f) Ta có: $x^1.x^2....x^{100} = x^{1+2+...+100} = x^{5050} \quad (x \neq 0)$

g) Ta có: $z^1 \cdot z^4 \cdot z^7 \dots z^{100} (z \neq 0) = z^{1+4+7+\dots+100} = z^{(100+1) \cdot 34 : 2} = z^{101 \cdot 17}$

h) Ta có: $(m^1)^2 \cdot (m^2)^3 \cdot (m^3)^4 \dots (m^{99})^{100} (m \neq 0) = m^{1 \cdot 2} m^{2 \cdot 3} \dots m^{99 \cdot 100} = m^{\frac{1}{3} \cdot 99 \cdot 100 \cdot 101} (m \neq 0)$

Bài 2: Viết kết quả phép chia dưới dạng lũy thừa.

a) $10^8 : 10^3 : 10^4$

b) $625 : 5^3$

c) $7^5 : 343$

d) $1000000 : 10^3$

e) $243 : 3^3 : 3$

f) $265 : 2^5 : 4$

g) $(4x^2)^8 : (4x^2)^4 : (4x^2)^2 (x \neq 0)$

h) $a^{100} : a^{15} : a^{62} (a \neq 0)$

i) $y^{50} : (y^5)^3 : (y^2)^{10}$

Lời giải

a) Ta có: $10^8 : 10^3 : 10^4 = 10$

b) Ta có: $625 : 5^3 = 5^4 : 5^3 = 5$

c) Ta có: $7^5 : 343 = 7^5 : 7^3 = 7^2$

d) Ta có: $1000000 : 10^3 = 10^6 : 10^3 = 10^3$

e) Ta có: $243 : 3^3 : 3 = 3^5 : 3^3 : 3 = 3$

f) Ta có: $265 : 2^5 : 4 = 2^8 : 2^5 : 2^2 = 2$

g) Ta có: $(4x^2)^8 : (4x^2)^4 : (4x^2)^2 = (4x^2)^2 = [(2x)^2]^2 = (2x)^2 (x \neq 0)$

i) Ta có: $y^{50} : (y^5)^3 : (y^2)^{10} = y^{50} : y^{15} : y^{20} = y^{15}$

Bài 3: Viết kết quả phép tính sau dưới dạng lũy thừa.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2$;

c) $25 \cdot 5^3 \cdot \frac{1}{625} \cdot 5^3$

b) $4^2 \cdot 32 : 2^3$;

d) $5^6 \cdot \frac{1}{20} \cdot 2^2 \cdot 3^3 : 125$

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$

b) $4^2 \cdot 32 : 2^3 = (2^2)^2 \cdot 2^5 : 2^3 = 2^4 \cdot 2^5 : 2^3 = 2^9 : 2^3 = 2^6$

c) $25 \cdot 5^3 \cdot \frac{1}{625} \cdot 5^5 = 5^2 \cdot 5^3 \cdot \frac{1}{5^4} \cdot 5^5 = \frac{5^{10}}{5^4} = 5^6$

d) $5^6 \cdot \frac{1}{20} \cdot 2^2 \cdot 3^3 : 125 = 5^6 \cdot \frac{1}{20} \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{125} = \frac{5^6 \cdot 2^2 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 5 \cdot 5^3} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^6}{2^2 \cdot 5^4} = 3^3 \cdot 5^2 = 675$

Bài 4: Cho $A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015}$. viết $A+1$ dưới dạng lũy thừa của 8.

Lời giải

Ta có: $A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015} = 2^{2016} - 1 \Rightarrow A + 1 = 2^{2016} = (2^3)^{672} = 8^{672}$

DẠNG 2: Tính giá trị của một biểu thức lũy thừa.

I. Phương pháp giải:

Áp dụng công thức:

$$a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_{(n \text{ thừa số } a)} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : b^m = (a : b)^m \quad (a \neq 0; m \geq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

$$a^m . b^m = (a.b)^m$$

$$a^{m^n} = a^{(m^n)}$$

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

và làm các phép tính như thông thường.

II. Bài toán:

Bài 1 : Thực hiện các phép tính sau bằng cách hợp lý.

- a) $(2^{17} + 17^2).(9^{15} - 3^{15}).(2^4 - 4^2)$
- b) $(8^{2017} - 8^{2015}) : (8^{2104}.8)$
- c) $(1^3 + 2^3 + 3^4 + 5^5).(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3).(3^8 - 81^2)$
- d) $(2^8 + 8^3) : (2^5.2^3)$

Lời giải

a)
$$\begin{aligned} & (2^{17} + 17^2).(9^{15} - 3^{15}).(2^4 - 4^2) \\ &= (2^{17} + 17^2).(9^{15} - 3^{15}).(16 - 16) \\ &= (2^{17} + 17^2).(9^{15} - 3^{15}).0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & (8^{2017} - 8^{2015}) : (8^{2104}.8) \\ &= (8^{2017} - 8^{2015}) : 8^{2015} \\ &= 8^{2017} : 8^{2015} - 8^{2015} : 8^{2015} \\ &= 8^2 - 1 \end{aligned}$$

$$=64 - 1$$

$$=63$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & (1^3 + 2^3 + 3^4 + 4^5) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot (3^8 - 81^2) \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^4 + 4^5) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot [3^8 - (3^4)^2] \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^4 + 4^5) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot (3^8 - 3^8) \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^4 + 4^5) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & (2^8 + 8^3) : (2^5 \cdot 2^3) \\ &= [2^8 + (2^3)^3] : 2^8 \\ &= (2^8 + 2^9) : 2^8 \\ &= (2^8 : 2^8) + (2^9 : 2^8) \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

$$\text{a)} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2;$$

$$\text{c)} \quad \left(\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{12}{9}\right)^0 : \left(\frac{-9}{8}\right)^3;$$

$$\text{b)} \quad \left(\frac{-1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{-7}{3}\right)^2;$$

$$\text{d)} \quad (-3)^3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 2^{-5}.$$

Lời giải

$$\text{a)} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1^3}{2^3} \cdot \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{128}$$

$$\text{b)} \quad \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{1}{7^2} \cdot \frac{7^2}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{c)} \quad \left(\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{12}{9}\right)^0 : \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^3 \cdot 1 : \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{3^6}{2^6} \cdot \frac{(2^3)^2}{(3^2)^2} = \frac{3^6 \cdot 2^6}{2^6 \cdot 3^4} = 3^2 = 9$$

$$\text{d)} \quad (-3)^3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 2^{-5} = 3^3 \cdot \frac{(2^3)^2}{(3^2)^2} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3^3 \cdot 2^6}{3^4 \cdot 2^5} = \frac{2}{3}$$

Bài 3: Thực hiện phép tính

$$\text{a.} \quad 1024 : (17 \cdot 2^5 + 15 \cdot 2^5)$$

$$\text{b.} \quad 5^3 \cdot 2 + (23 + 4^0) : 2^3$$

$$\text{c.} \quad (5 \cdot 3^5 + 17 \cdot 3^4) : 6^2$$

Lời giải

a. Ta có: $1024 : (17 \cdot 2^5 + 15 \cdot 2^5) = 2^{10} : [2^5(17 + 15)] = 2^{10} : 2^5 \cdot 2^5 = 1$

b. Ta có: $5^3 \cdot 2 + (23 + 4^0) : 2^3 = 5^3 \cdot 2 + 24 : 2^3 = 250 + 3 = 253$

c. Ta có: $(5 \cdot 3^5 + 17 \cdot 3^4) : 6^2 = [3^4(5 \cdot 3 + 17)] : (3 \cdot 2)^2 = (3^4 \cdot 32) : 3^2 \cdot 2^2 = \frac{3^4 \cdot 2^5}{3^2 \cdot 2^2} = 9 \cdot 8 = 72$

Bài 4: Thực hiện phép tính

a) $(10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$

b) $(2^3 \cdot 9^4 + 9^3 \cdot 45) : (9^2 \cdot 10 + 9^2 \cdot 3)$

Lời giải

a) Ta có: $(10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2) = (100 + 121 + 144) : (169 + 196) = 365 : 365 = 1$

b) Ta có:

$$(2^3 \cdot 9^4 + 9^3 \cdot 45) : (9^2 \cdot 10 + 9^2 \cdot 3) = (2^3 \cdot 3^8 + 3^8 \cdot 5) : (3^4 \cdot 10 + 3^4 \cdot 3) = \frac{3^8(8 + 5)}{3^4 \cdot 13} = \frac{3^4 \cdot 13}{13} = 3^4 = 81$$

Bài 5: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{3^{10} \cdot 10 + 3^{10} \cdot 6}{3^9 \cdot 2^{2^2}}$

b) $B = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$

c) $C = \frac{36^{10} \cdot 25^{15}}{30^8}$

d) $D = \frac{21^2 \cdot 14 \cdot 126}{35^5 \cdot 6}$

e) $E = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$

f) $F = \frac{4^9 \cdot 36 + 64^4}{100 \cdot 16^4}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{3^{10} \cdot 10 + 3^{10} \cdot 6}{3^9 \cdot 2^{2^2}} = \frac{3^{10} \cdot (10 + 6)}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{3^{10} \cdot 2^4}{3^9 \cdot 2^4} = 3$

b) Ta có: $B = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2} = \frac{11 \cdot 3^{29} - 3^{30}}{4 \cdot 3^{28}} = \frac{3^{29}(11 - 3)}{4 \cdot 3^{28}} = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$

c) Ta có: $C = \frac{36^{10} \cdot 25^{15}}{30^8} = \frac{(6^2)^{10} \cdot (5^2)^{15}}{(6 \cdot 5)^8} = \frac{6^{20} \cdot 5^{30}}{6^8 \cdot 5^8} = 6^{12} \cdot 5^{22}$

d) Ta có: $D = \frac{21^2 \cdot 14 \cdot 126}{35^5 \cdot 6} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7}{3^5 \cdot 7^5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^4}{2 \cdot 3^6 \cdot 7^5} = \frac{2}{3^2 \cdot 7}$

e) Ta có: $E = \frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2} = 2$

f) Ta có:
$$F = \frac{4^9 \cdot 36 + 64^4}{100 \cdot 16^4} = \frac{4^9 \cdot 4 \cdot 9 + 4^{12}}{100 \cdot 4^8} = \frac{4^{10} \cdot (9 + 4^2)}{4^8 \cdot 100} = 4$$

Bài 6. Thực hiện phép tính:
$$\frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{27}}{5 \cdot 2^9 \cdot 2^{19} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}}$$

Lời giải

$$\frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{27}}{5 \cdot 2^9 \cdot 2^{19} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} (5 \cdot 2 - 3)}{2^{28} \cdot 3^{18} (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2)} = 2$$

Bài 7: Tính các tổng sau:

a) $A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015}$

b) $B = 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2016}$

c) $C = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2020}$

d) $D = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2021}$

Lời giải

a) Ta có: $A = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015}$

$$\Rightarrow 2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2016}$$

$$\Rightarrow 2A - A = A = 2^{2016} - 1$$

b) Ta có: $B = 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2016}$

$$\Rightarrow 3B = 3 + 3^2 + \dots + 3^{2017}$$

$$\Rightarrow 2B = 3^{2017} - 1$$

$$\Rightarrow B = \frac{3^{2017} - 1}{2}$$

c) Ta có: $C = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2020}$

$$\Rightarrow 3^2 C = 3^2 (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2020})$$

$$\Rightarrow 9C = 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}$$

$$\Rightarrow 9C - C = (3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2022}) - (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2020})$$

$$\Rightarrow 8C = 3^{2022} - 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{3^{2022} - 1}{8}$$

d) $D = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2021}$

$$\Rightarrow 3A = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2021}$$

$$\Rightarrow 2A = 3A - A = 3^{2021} - 3$$

$$\Rightarrow A = \frac{3^{2021} - 3}{2}$$

Bài 8: Tính $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 8192$

Lời giải

Ta có: $S = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{13} \Rightarrow 2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{14} \Rightarrow S = 2^{14} - 1 = 16383$

Bài 9: Cho biết: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$.

a) Tính $A = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$;

b) Tính $B = (12^2 + 14^2 + 16^2 + 18^2 + 20^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$.

Lời giải

a) Ta có $A = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$

$$= (1.2)^2 + (2.2)^2 + (3.2)^2 + \dots + (10.2)^2$$

$$= 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2)$$

$$= 4.385 = 1540$$

b) $B = (12^2 + 14^2 + 16^2 + 18^2 + 20^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$

$$= (12^2 - 1^2) + (14^2 - 3^2) + (16^2 - 5^2) + (18^2 - 7^2) + (20^2 - 9^2)$$

$$= (12 - 1)(12 + 1) + (14 - 3)(14 + 3) + (16 - 5)(16 + 5) + (18 - 7)(18 + 7) + (20 - 9)(20 + 9)$$

$$= 11.13 + 11.17 + 11.21 + 11.25 + 11.25 + 11.29$$

$$= 11(13 + 17 + 21 + 25 + 29)$$

$$= 11.125 = 1375$$

Bài 10: Tính tổng sau

a) $A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2$

Lời giải

Ta có:

$$A = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$$

$$C = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 99^2 + 100^2), \quad D = (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$$

Đặt

Tính C, ta có:

$$C = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 99^2 + 100^2$$

$$C = 1.1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5 + \dots + 99.99 + 100.100$$

$$C = 1.(2 - 1) + 2.(3 - 1) + 3.(4 - 3) + 4.(5 - 4) + 5.(6 - 5) + \dots + 99.(100 - 1) + 100.(101 - 1)$$

$$\Rightarrow C = (1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 99.100 + 100.101) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100)$$

$$\text{Đặt } M = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 99.100 + 100.101, \quad N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100$$

Tính M

$$M = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 100.101$$

$$\Rightarrow 3M = 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + 4.5.(6-3) + \dots + 100.101.(102-99)$$

$$3M = (1.2.3 - 1.2.0) + (2.3.4 - 2.3.1) + (3.4.5 - 3.4.2) + (4.5.6 - 3.4.5) + \dots + (100.101.102 - 99.100.101)$$

$$3M = 100.101.102$$

$$\Rightarrow M = \frac{100.101.102}{3}$$

Tính N

$$N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$$

$$N = \frac{100.101}{2}$$

$$C = \frac{100.101.102}{3} + \frac{100.101}{2}$$

Ta có

Tương tự tính D ta có:

$$D = (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$$

$$D = 2^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2)$$

$$D = 2^2 \cdot \left(\frac{50.51.52}{3} + \frac{50.51}{2} \right) = 4 \cdot (50.52.17 + 25.51)$$

$$A = \frac{100.101.102}{3} + \frac{100.101}{2} - 4 \cdot (50.52.17 + 25.51)$$

Vậy

DẠNG 3: Xét tính chia hết của một biểu thức lũy thừa.

I. Phương pháp giải:

Sử dụng công thức tính lũy thừa và tính chất chia hết, các dấu hiệu chia hết

II. Bài toán:

Bài 1: Cho $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 3.

Lời giải

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$$

$$= (1 + 2) + (2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7)$$

$$= 3 + 2^2(1 + 2) + 2^4(1 + 2) + 2^6(1 + 2) = 3 + 2.3 + 2^4.3 + 2^6.3$$

$$= 3(1 + 2 + 2^4 + 2^6)$$

Bài 2: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 6.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{59} + 2^{60}) \\
 &= (2 + 2^2) + 2^2(2 + 2^2) + \dots + 2^{58}(2 + 2^2) \\
 &= 6 + 2^2 \cdot 6 + \dots + 2^{58} \cdot 6 \\
 &\Rightarrow A : 6
 \end{aligned}$$

Bài 3:

Cho biểu thức $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016}$.

Chứng minh rằng A chia hết cho 7.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016} \\
 (\text{Tổng } A \text{ có } 2016 \text{ số hạng, chia } A \text{ thành } 672 \text{ nhóm, mỗi nhóm có } 3 \text{ số hạng}) \\
 A &= (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016}) \\
 &= (1^2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2) + (1^{24} + 2^{24} + 2^2 \cdot 2^4) + \dots + (1 \cdot 2^{2014} + 2 \cdot 2^{2014} + 2^2 \cdot 2^{2014}) \\
 &= 2(1 + 2 + 2^2) + 2^4(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{2014} \cdot 2(1 + 2 + 2^2) \\
 &= 2 \cdot 7 + 2^4 \cdot 7 + \dots + 2^{2014} \cdot 7 = 7 \cdot (2 + 2^4 + \dots + 2^{2014}) : 7
 \end{aligned}$$

Bài 4: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$. Chứng minh rằng $A : 3; A : 5; A : 7$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad A &= (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{57} + 2^{59})(2^{59} + 2^{60}) \\
 &= 2 \cdot (1 + 2) + 2^3(1 + 2) + \dots + 2^{59}(1 + 2) \\
 &= (1 + 2) \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) = 3 \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) : 3 \\
 \bullet \quad A &= (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{58} + 2^{59} + 2^{60}) \\
 &= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{58}(1 + 2 + 2^2) \\
 &= (1 + 2 + 2^2)(2 + 2^4 + 2^7 + \dots + 2^{58}) = 7 \cdot (2 + 2^4 + \dots + 2^{58}) : 7 \\
 \bullet \quad A &= (2 + 2^3) + (2^2 + 2^4) + \dots + (2^{58} + 2^{60}) = 2(1 + 2^2) + 2^2(1 + 2^2) + \dots + 2^{58}(1 + 2^2) \\
 &= (1 + 2^2)(2 + 2^2 + \dots + 2^{57} + 2^{58}) = 5 \cdot (2 + 2^2 + \dots + 2^{58}) : 5
 \end{aligned}$$

Bài 5: Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98}$. Chứng tỏ rằng A chia hết cho 21.

Lời giải

$A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98}$ có 99 số hạng

$$= (1 + 4 + 4^2) + (4^3 + 4^4 + 4^5) + \dots + (4^{96} + 4^{97} + 4^{98}) \text{ có 33 nhóm}$$

$$= 21 + 21 \cdot 4^3 + \dots + 21 \cdot 4^{96} (4^{96} + 4^{97} + 4^{98}) \text{ chia hết cho 21}$$

Bài 6: Cho $A = \frac{7^{2020^{2019}} - 3^{2016^{2015}}}{5}$. Chứng tỏ A chia hết cho 2

Lời giải

Ta có $2020^{2019} : 4$ nên đặt $2020^{2019} = 4k (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 7^{2020^{2019}} = (7^4)^k = 2401^k$ luôn có tận cùng là 1.

Ta có $2016^{2015} : 4$ nên đặt $2016^{2015} = 4k' (k' \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 3^{2016^{2015}} = (3^4)^{k'} = 81^{k'}$ luôn có tận cùng là 1.

Khi đó: $7^{2020^{2019}} - 3^{2016^{2015}}$ luôn có tận cùng là 0

$$\Rightarrow A = \frac{7^{2020^{2019}} - 3^{2016^{2015}}}{5} \text{ luôn có thể tận cùng } 2, 4, 6, 8.$$

Vậy A luôn chia hết cho 2

Bài 7: Cho số $A = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{16} + 4^{17}$. Tìm số dư khi A chia cho 17.

Lời giải

$$A = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{16} + 4^{17} \text{ có 17 số hạng}$$

$$= 4 + (4^2 + 4^4) + (4^3 + 4^5) + \dots + (4^{14} + 4^{16}) + (4^{15} + 4^{17}) \text{ có 8 cặp nhóm và thừa số hạng 4}$$

$$= 4 + 4^2(1 + 4^2) + 4^3(1 + 4^2) + \dots + 4^{14}(1 + 4^2) + 4^{15}(1 + 4^2)$$

$$= 4 + 4^2 \cdot 17 + 4^3 \cdot 17 + \dots + 4^{14} \cdot 17 + 4^{15} \cdot 17$$

$$= 4 + 17(4^2 + 4^3 + \dots + 4^{14} + 4^{15})$$

Vậy A chia cho 17 dư 4.

Bài 8: Cho $A = (2014 + 1) \cdot (2014 + 2) \cdot (2014 + 3) \dots (2014 + 2014)$. Chứng minh $A : 2^{2013}$

Lời giải

$$A = (2014 + 1) \cdot (2014 + 2) \cdot (2014 + 3) \dots (2014 + 2014) = 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \dots 4028$$

Số A là tích của 2014 thừa số trong đó có 1007 thừa số chẵn.

Đặt tích của các thừa số chẵn trong A là B (có 1007 thừa số chẵn).

$$B = \underset{1007 \text{ thừa số chẵn}}{2016 \cdot 2018 \cdot 2020 \dots 4028} = 2^{1007} \cdot 1008 \cdot 1009 \cdot 1010 \dots 2014$$

Đặt tích của các thừa số lẻ trong B là C (có 504 thừa số lẻ).

$$C = \underset{504 \text{ thừa số lẻ}}{1008 \cdot 1010 \cdot 1012 \dots 2014} = 2^{504} \cdot 504 \cdot 505 \cdot 506 \dots 1007$$

Đặt tích của các thừa số chẵn trong C là: D (có 252 thừa số chẵn).

$$D = \underbrace{504.506.508.\dots.1006}_{252 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{252}.252.253.254.\dots.503$$

Đặt tích của các thừa số chẵn trong D là: E (có 126 thừa số chẵn).

$$E = \underbrace{252.254.256.\dots.502}_{126 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{126}.126.127.128.\dots.251$$

Đặt tích của các thừa số chẵn trong E là: F (có 63 thừa số chẵn).

$$F = \underbrace{126.128.130.\dots.250}_{63 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{63}.63.64.65.\dots.125$$

Đặt tích của các thừa số chẵn trong F là: G (có 31 thừa số chẵn).

$$G = \underbrace{64.66.68.\dots.124}_{31 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{31}.32.33.\dots.62$$

Đặt tích của các thừa số chẵn trong G là: H (có 16 thừa số chẵn).

$$H = \underbrace{32.34.36.\dots.62}_{16 \text{ thừa số chẵn}} = 2^{16}.16.17.18.\dots.31$$

$$= 2^{16}.2^4.17.2.9.19.2^2.5.21.2.11.23.2^3.3.25.2.13.27.2.19.29.2.15.31$$

$$= 2^{30}.3.5.9.11.13.15.17.19^2.21.23.25.27.29.31$$

Như vậy trong A có tích các thừa số: $2^{1007}.2^{504}.2^{252}.2^{126}.2^{63}.2^{31}.2^{30} = 2^{2013}$

Vậy A chia hết cho 2^{2013} .

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

$$\frac{2^{12}.3^5 - 4^6.9^2}{(2^2.3)^6} - \frac{5^{10}.7^3 - 25^2.49^2}{(125.7)^3 + 5^9.14^3}$$

Bài 1: Thực hiện phép tính:

Lời giải

$$\frac{2^{12}.3^5 - 4^6.9^2}{(2^2.3)^6} + \frac{5^{10}.7^3 - 25^2.49^2}{(125.7)^3 + 5^9.14^3} = \frac{2^{12}.3^5 - (2^2)^6.(3^2)^2}{2^{12}.3^6} + \frac{5^{10}.7^3 - (5^2)^5.(7^2)^2}{(5^3)^3.7^3 + 5^9.2^3.7^3}$$

$$= \frac{2^{12}.3^5 - 2^{12}.3^4}{2^{12}.3^6} + \frac{5^{10}.7^3 - 5^{10}.7^4}{5^9.7^3 + 5^9.2^3.7^3} = \frac{2^{12}.3^4(3-1)}{2^{12}.3^6} + \frac{5^{10}.7^3(1-7)}{5^9.7^3(8+1)} = \frac{2}{3^2} + \frac{5.6}{9} = \frac{32}{9}$$

$$\frac{4^6.9^5 + 6^9.120}{8^4.3^{12} - 6^{11}}$$

Bài 2: Thực hiện phép tính:

Lời giải

$$\frac{4^6.9^5 + 6^9.120}{8^4.3^{12} - 6^{11}} = \frac{(2^2)^6.(3^2)^5 + 2^9.3^9.2^3.3.5}{(2^3)^4.13^{12} - 2^{11}.3^{11}} = \frac{2^{12}.3^{10} + 2^{12}.3^{10}.5}{2^{12}.3^{12} - 2^{11}.3^{11}} = \frac{2^{12}.3^{10}(1+5)}{2^{11}.3^{11}(2.3-1)} = \frac{2.6}{3.5} = \frac{4}{5}$$

Bài 3. Thực hiện phép tính:

$$\frac{9.5^{20}.27^9 - 3.9^{15}.25^9}{7.3^{29}.125^6 - 3.3^9.15^{19}}$$

Lời giải

$$\frac{9.5^{20}.27^9 - 3.9^{15}.25^9}{7.3^{29}.125^6 - 3.3^9.15^{19}} = \frac{3^2.5^{20}.3^{27} - 3.3^{30}.5^{18}}{7.3^{29}.5^{18} - 3^{10}.3^{19}.5^{19}} = \frac{3^{29}.5^{20} - 3^{31}.5^{18}}{7.3^{29}.5^{18} - 3^{29}.5^{19}} = \frac{3^{29}.5^{18}(5^2 - 3^2)}{3^{29}.5^{18}(7 - 5)} = 8$$

Bài 4. Thực hiện phép tính:

$$\frac{5^2.6^{11}.16^2 + 6^2.12^6.15^2}{2.6^{12}.10^4 - 81^2.960^3}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{5^2.6^{11}.16^2 + 6^2.12^6.15^2}{2.6^{12}.10^4 - 81^2.960^3} &= \frac{5^2(2.3)^{11} \cdot (2^4)^2 + (2.3)^2 \cdot (2^2.3)^6 \cdot (3.5)^2}{2 \cdot (2.3)^{12} \cdot (2.5)^4 - (3^4)^2 \cdot (2^6.3.5)^3} \\ &= \frac{5^2.2^{19}.3^{11} + 2^{14}.3^{10}.5^3}{2^{17}.5^4.3^{12} - 3^{11}.2^{18}.5^3} = \frac{5^2.3^{10}.2^{14} \cdot (2^5.3 + 5)}{2^{17}.5^3.3^{11} \cdot (5.3 - 2)} = \frac{2^5.3 + 5}{2^3.5.3.12} \\ &= \frac{32.3 + 5}{8.15.12} = \frac{96 + 5}{120.12} = \frac{101}{1440} \end{aligned}$$

Bài 5. Thực hiện phép tính:

$$\frac{7.6^{10}.2^{10}.3^6 - 2^{19}.6^{15}}{9.6^{19}.2^9 - 4.3^{17}.2^{26}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{7.6^{10}.2^{20}.3^6 - 2^{19}.6^{15}}{9.6^{19}.2^9 - 4.3^{17}.2^{26}} &= \frac{7.2^{10}.3^{10}.2^{20}.3^6 - 2^{19}.2^{15}.3^{15}}{3^2.2^{19}.3^{19}.2^9 - 2^2.2^{26}.3^{17}} \\ &= \frac{2^{30}.3^{16}.7 - 2^{34}.3^{15}}{2^{28}.3^{21} - 2^{28}.3^{17}} = \frac{2^{30}.3^{15} \cdot (7.3 - 2^4)}{2^{28}.3^{17}(3^4 - 1)} = \frac{2^2(21 - 16)}{3^3(81 - 1)} \\ &= \frac{2^2(21 - 16)}{3^3(81 - 1)} = \frac{4.5}{9.80} = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Bài 6. Tính: $A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20} \\ \Rightarrow 2A &= 8 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{21} \\ \Rightarrow A = 2A - A &= 2^{21} + 8 - (4 + 2^2) + (2^3 - 2^3) + (2^4 - 2^4) + \dots + (2^{20} - 2^{20}) = 2^{21} \end{aligned}$$

Bài 7. Tính $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$

Lời giải

$$3A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$\text{Vậy: } 3A - A = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{99}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{100}}\right)$$

$$2A = 1 - \frac{1}{3^{100}} = \frac{3^{100} - 1}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3^{100} - 1}{2 \cdot 3^{100}}$$

Bài 8. Tính $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$

Lời giải

$$A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$$

$$\Rightarrow 5A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{96} + 5^{97}$$

$$\Rightarrow 4A = 5A - A = 5^{97} - 5$$

$$\Rightarrow A = \frac{5^{97} - 5}{4}$$

Bài 9. Tính $S = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020}$

Lời giải

$$\text{Ta có } 5S = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2021}$$

$$\Rightarrow 5S - S = (5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2021}) - (5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020})$$

$$\Rightarrow 4S = 5^{2021} - 5$$

$$\Rightarrow S = \frac{5^{2021} - 5}{4}$$

Bài 10: Tính $C = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$

Lời giải

Ta có:

$$C = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2 = 2^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2)$$

$$\text{Đặt } A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 10 \cdot 10$$

$$A = 1(2 - 1) + 2(3 - 1) + 3(4 - 1) + \dots + 10(11 - 1)$$

$$A = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 10 \cdot 11) - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10)$$

$$= \frac{10.11.12}{3} - \frac{10.11}{2} = 10.11.4 - 5.11 = 385$$

$$\Rightarrow C = 4.385 = 1540$$

Bài 11: Tính $B = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \dots + 99.100^2$

Lời giải

Ta có:

$$B = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \dots + 99.100^2$$

$$B = 1.2.2 + 2.3.3 + 3.4.4 + \dots + 99.100.100$$

$$B = 1.2(3-1) + 2.3(4-1) + \dots + 99.100(100-1)$$

$$B = (1.2.3 - 1.2) + (2.3.4 - 2.3) + \dots + (99.100.101 - 99.100)$$

$$B = (1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 99.100.101) - (1.2 + 2.3 + \dots + 99.100)$$

Đặt $N = (1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 99.100.101)$, $M = (1.2 + 2.3 + \dots + 99.100)$

Tính N , ta có:

$$4N = 1.2.3.(4-0) + 2.3.4.(5-1) + \dots + 99.100.101.(102-98)$$

$$4N = (1.2.3.4 - 0.1.2.3) + (2.3.4.5 - 1.2.3.4) + \dots + (99.100.101.102 - 98.99.100.101)$$

$$4N = 99.100.101.102$$

$$\Rightarrow N = \frac{99.100.101.102}{4}$$

Tương tự tính M ta có $M = \frac{99.100.101}{3}$

Vậy $B = \frac{99.100.101.102}{4} - \frac{99.100.101}{3}$

Bài 12: Chứng minh rằng:

a. $10^{2008} + 125$ chia hết cho 45

b. $5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006}$ chia hết cho 31

c. $8^8 + 2^{20}$ chia hết cho 17

d. $313^5.299 - 313^6.36$ chia hết cho 7.

Lời giải

a) Ta có: $10^{2008} + 125 = \overbrace{100 \dots 0}^{2008 \text{ số } 0} + 125 = \overbrace{100 \dots 0125}^{2005 \text{ số } 0}$, A có tận cùng là 5
 $\Rightarrow A$ chia hết cho 5

Tổng các chữ số của A là: $1+2+5+1=9 \Rightarrow A$ chia hết cho 9, mà $(5,9)=1 \Rightarrow A$ chia hết cho 45

b) Ta có: $5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006} = 5^{2006} (5^2 + 5^1 + 1) = 5^{2006} \cdot 31$ chia hết cho 31

c) Ta có: $8^8 + 2^{20} = (2^3)^8 + 2^{20} = 2^{24} + 2^{20} = 2^{20} (2^4 + 1) = 17 \cdot 2^{20}$ chia hết cho 17

d) Ta có:

$$313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36 = 313^5 \cdot 299 - 313^6 - 35 \cdot 313^6 = 313^5 (299 - 313) - 35 \cdot 313^6 = -14 \cdot 313^5 - 35 \cdot 313^6$$

Chia hết cho 7 vì mỗi số hạng trong hiệu đều chia hết cho 7.

Bài 13:

a) Viết công thức tổng quát tính $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n \quad (a \geq 2, n \in \mathbb{N})$

b) Viết công thức tính $a^{n+1} - 1 \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$

c) Chứng minh rằng: $2015^{2015} - 1$ chia hết cho 2014.

Lời giải

a)

Ta có $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n \quad (a \geq 2, n \in \mathbb{N})$

$$a \cdot A = a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n + a^{n+1}$$

$$a \cdot A - A = a^{n+1} - 1$$

$$(a - 1) \cdot A = a^{n+1} - 1$$

$$\text{Vậy } A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n = (a^{n+1} - 1) : (a - 1)$$

b) Ta có $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n = (a^{n+1} - 1) : (a - 1) \quad (a \geq 2, n \in \mathbb{N})$

Từ đó ta có công thức: $(a^{n+1} - 1) = (a - 1) \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n) \quad (a \geq 2, n \in \mathbb{N})$

c) Nhận thấy $2015 - 1 = 2014$. Với công thức đã tìm được ở câu 1, hơn nữa ta thấy

$A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n$ có giá trị là số nguyên nên $(a^{n+1} - 1) : (a - 1)$. Do đó để làm câu 2 ta nghĩ ngay đến cách làm sau:

$$\text{Xét } A = 1 + 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2014}$$

$$2015 \cdot A = 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2015}$$

$$\text{Do đó } 2015 \cdot A - A = 2015^{2015} - 1 \Rightarrow 2014 \cdot A = 2014^{2015} - 1$$

$$\text{Nên } 2015^{2015} - 1 = 2014 \cdot (1 + 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2014})$$

Mà $1 + 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2014}$ có giá trị là số tự nhiên

$$\text{Vậy } 2015^{2015} - 1 : 2014$$

Bài 14:

a, Tính tổng : $M = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{112}$

b, Viết công thức tổng quát tính $M = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n} \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$

c, Viết công thức tính $a^{2n+2} - 1 \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$

d, Chứng minh rằng: $9^{2018} - 1$ chia hết cho 80

Lời giải

a, Tương tự

Ta có: $M = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{112}$

$$3^2.M = 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + \dots + 3^{112} + 3^{114}$$

$$\text{Do đó: } 3^2.M - M = 3^{114} - 1$$

$$M.(3^2 - 1) = 3^{114} - 1 \Rightarrow M = \frac{3^{114} - 1}{3^2 - 1} = \frac{3^{114} - 1}{8}$$

b, Ta có: $M = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n}$

$$a^2.M = a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n} + a^{2n+2}$$

$$a^2.M - M = a^{2n+2} - 1 \Rightarrow M.(a^2 - 1) = a^{2n+2} - 1$$

$$\text{Vậy } M = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n} = (a^{2n+2} - 1) : (a^2 - 1)$$

c, Từ kết quả câu b: +

$$M = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n} = (a^{2n+2} - 1) : (a^2 - 1) \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$$

$$\text{Từ đó ta có: } a^{2n+2} - 1 = (a^2 - 1).(1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n}) \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$$

d, Nhận thấy $9^2 - 1 = 80$. Với công thức đã tìm được ở câu c.

Hơn nữa ta thấy $M = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots + a^{2n}$ có giá trị là số nguyên

Nên $(a^{2n+2} - 1) : (a^2 - 1)$. Do đó để làm câu d ta nghĩ ngay đến cách làm sau:

$$\text{Xét } M = 1 + 9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8 + \dots + 9^{2016}$$

$$9^2.M = 9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8 + \dots + 9^{2016} + 9^{2018}$$

$$9^2.M - M = 9^{2018} - 1 \Rightarrow M.(9^2 - 1) = 9^{2018} - 1$$

$$\text{Do đó } 9^{2018} - 1 = 80.(1 + 9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8 + \dots + 9^{2016})$$

Mà $1 + 9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8 + \dots + 9^{2016}$ có giá trị là số tự nhiên.

$$\text{Vậy } 9^{2018} - 1 : 80$$

Bài 15:

a, Tính tổng : $B = 8 + 8^3 + 8^5 + 8^7 + 8^9 + \dots + 8^{99}$

- b, Viết công thức tổng quát tính $A = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$
- c, Viết công thức tính $a^{2n+3} - a \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$
- d, Chứng tỏ rằng: $6^{2017} - 6$ chia hết cho 35

Lời giải

a, Tương tự

Ta có: $B = 8 + 8^3 + 8^5 + 8^7 + 8^9 + \dots + 8^{99}$

$$8^2 \cdot B = 8^3 + 8^5 + 8^7 + 8^9 + \dots + 8^{99} + 8^{101}$$

$$\text{Do đó } 8^2 \cdot B - B = 8^{101} - 8 \Rightarrow B(8^2 - 1) = 8^{101} - 8 \Rightarrow B = \frac{8^{101} - 8}{8^2 - 1} = \frac{8^{101} - 8}{63}$$

b, Ta có: $A = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1}$

$$a^2 \cdot A = a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1} + a^{2n+3}$$

$$a^2 \cdot A - A = a^{2n+3} - a \Rightarrow A(a^2 - 1) = a^{2n+3} - a$$

$$A = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1} = (a^{2n+3} - a) : (a^2 - 1)$$

c, Từ kết quả câu b:

$$A = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1} = (a^{2n+3} - a) : (a^2 - 1) \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$$

$$\text{Từ đó ta có: } a^{2n+3} - a = (a^2 - 1) \cdot (a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1}) \quad (n \in \mathbb{N}, a \geq 2)$$

d, Nhận thấy $6^2 - 1 = 35$. Với công thức đã tìm được ở câu c.

Hơn nữa $A = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + \dots + a^{2n+1}$ có giá trị là số nguyên.

Nên $(a^{2n+3} - a) : (a^2 - 1)$. Do đó để làm câu d ta nghĩ ngay đến cách làm:

$$\text{Xét } M = 6 + 6^3 + 6^5 + 6^7 + 6^9 + \dots + 6^{2015}$$

$$6^2 \cdot M = 6^3 + 6^5 + 6^7 + 6^9 + \dots + 6^{2015} + 6^{2017} \Rightarrow 6^2 \cdot M - M = 6^{2017} - 6$$

$$\Rightarrow M \cdot (6^2 - 1) = 6^{2017} - 6$$

$$\text{Do đó } 6^{2017} - 6 = 35 \cdot (6 + 6^3 + 6^5 + 6^7 + 6^9 + \dots + 6^{2015})$$

Mà $6 + 6^3 + 6^5 + 6^7 + 6^9 + \dots + 6^{2015}$ có giá trị là số tự nhiên. Vậy $6^{2017} - 6 \vdots 35$

Bài 16:

1, Tính $B = 1 - 5 + 5^2 - 5^3 + 5^4 - \dots - 5^{99} + 5^{100}$

2, Tính $A = 1 - a^d + a^{2d} - a^{3d} + \dots + a^{2nd} \quad (a \geq 2, n \in \mathbb{N})$

3, Chứng tỏ rằng $2018^{2009} + 1$ chia hết cho 2019

Lời giải

1, Tương tự

Ta có $B = 1 - 5 + 5^2 - 5^3 + 5^4 - \dots - 5^{99} + 5^{100}$

$$5.B = 5 - 5^2 + 5^3 - 5^4 + 5^5 - \dots - 5^{100} + 5^{101}$$

Quan sát về quy luật dấu của các số hạng trong tổng B và $5B$. Để các lũy thừa bị triệt tiêu hàng loạt

$$5B + B = 5^{101} + 1 \Rightarrow 6B = 5^{101} + 1 \Rightarrow B = \frac{5^{101} + 1}{6}$$

ta nghĩ đến tính

2, Ta có: $A = 1 - a^d + a^{2d} - a^{3d} + \dots + a^{2nd}$

$$a^d A = a^d - a^{2d} + a^{3d} - \dots + a^{(2n+1)d}$$

$$a^d A + A = a^{(2n+1)d} + 1 \Rightarrow A = \frac{a^{(2n+1)d} + 1}{a^d + 1}$$

3, Nhận thấy $2018 + 1 = 2019$. Với công thức đã tìm được ở câu 2.

Hơn nữa $A = 1 - a^d + a^{2d} - a^{3d} + \dots + a^{2nd}$ có giá trị là số nguyên

Nên $a^{(2n+1)d} + 1 : (a^d + 1)$. Do đó để làm câu d ta nghĩ ngay đến cách làm sau:

$$S = 1 - 2018 + 2018^2 - 2018^3 + \dots + 2018^{2008}$$

Xét

$$2018.S = 2018 - 2018^2 + 2018^3 - 2018^4 + \dots + 2018^{2009}$$

$$2018.S + S = 2018^{2009} + 1 \Rightarrow 2019.S = 2018^{2009} + 1$$

$$2018^{2009} + 1 = 2019.(1 - 2018 + 2018^2 - 2018^3 + \dots + 2018^{2008})$$

Mà $1 - 2018 + 2018^2 - 2018^3 + \dots + 2018^{2008}$ có giá trị là số nguyên.

Suy ra $2018^{2009} + 1$ chia hết cho 2019.

.....! HẾT □.....

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>