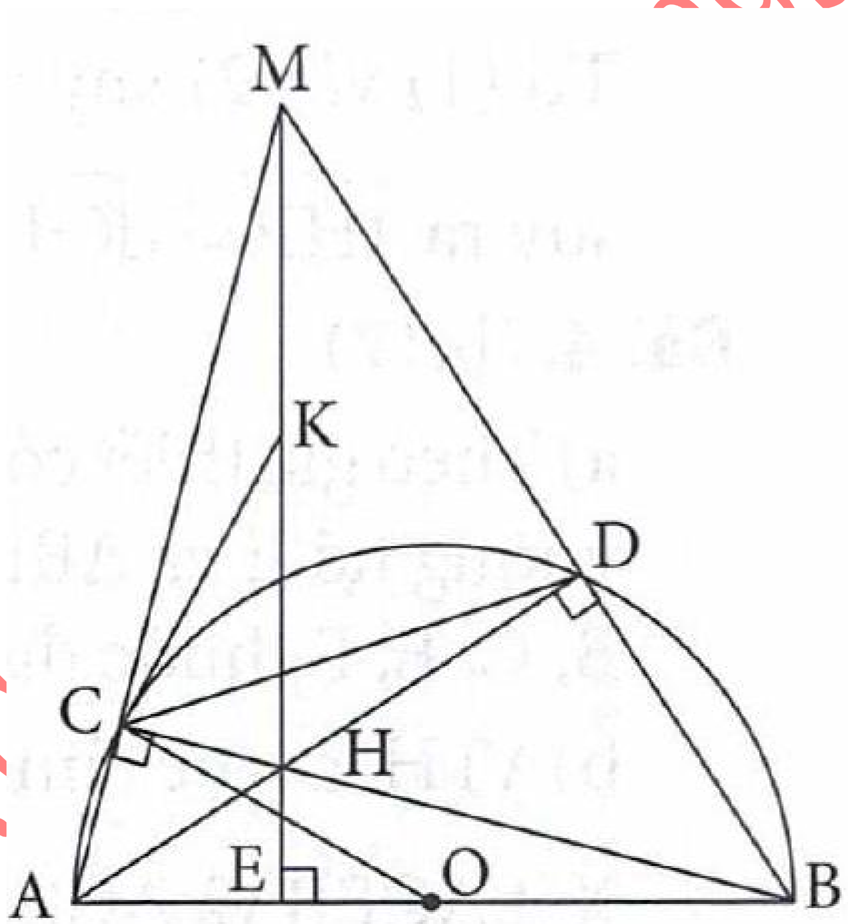
c) Vì H là trực tâm của $\triangle MAC$ nên $AH \perp MC$ tại E, $CH \perp MA$ tại F . Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OA \perp AM$, $OC \perp CM$ nên $AH/$¿OC và $OA/$¿CH. Do đó AHCO là hình bình hành. Từ đó suy ra $AH = OC = R$ không đổi, mà A cố định. Vậy H luôn thuộc đường tròn $(A; R)$.

Bài 6. (h.19)

a) Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $\widehat{MCH} = \widehat{MDH} = 90^{\circ}$. Suy ra $\triangle CMH$ vuông tại C và $\triangle DMH$ vuông tại D nên bốn điểm M, C, H, D thuộc đường tròn đường kính MH hay MCHD là tứ giác nội tiếp.

b) Vi $AD \perp MB$, $BC \perp MA$ nên H là trực tâm của $\triangle MAB$ nên $MH \perp AB$ tại E . Do đó $\widehat{ABC} = \widehat{AME}$ (cùng phụ với $\widehat{CAB}$).



Hình 19

Xét $\triangle CMH$ và $\triangle CBA$ có $\widehat{MCH} = \widehat{BCA} = 90^{\circ}$, $\widehat{ABC} = \widehat{CMH}$.

Do đó $\triangle CMH \propto \triangle CBA\,(g.g)$, suy ra $\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{CH}{CA}$ hay $CM\cdot CA=CH\cdot CB$.

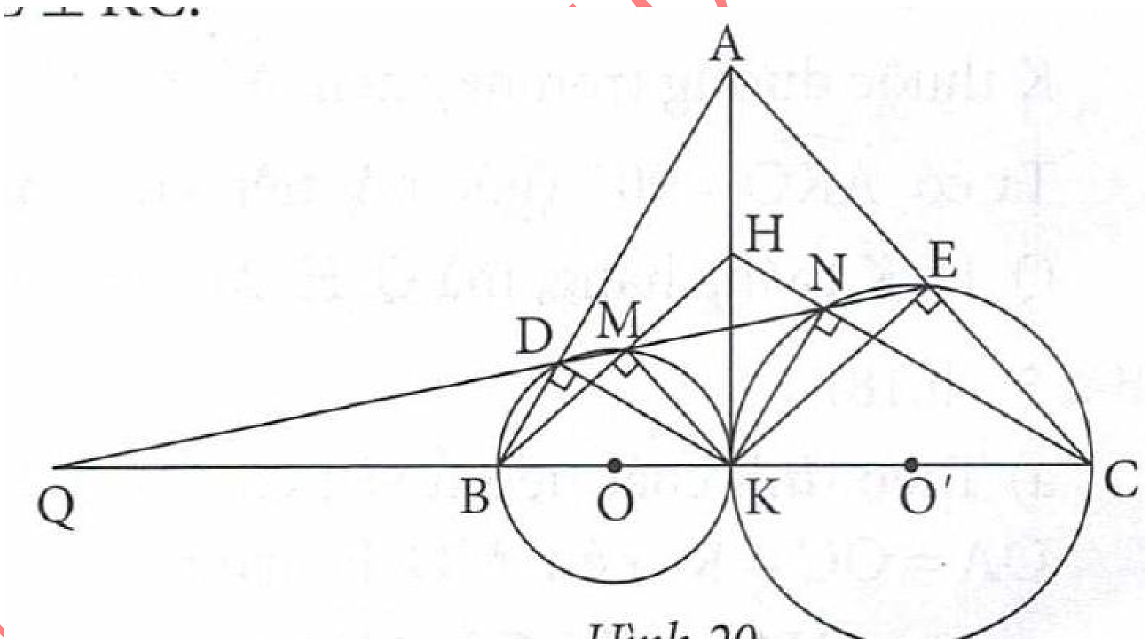
c) Vì $\triangle EMA$ vuông tại E nên $\widehat{EMA}+\widehat{EAM}=90^\circ$.

Vì K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCHD nên K là trung điểm của MH . Có $CK=KM=\dfrac{1}{2}MH$ nên $\triangle KCM$ cân tại K . Suy ra $\widehat{KCM}=\widehat{KMC}$. Xét $\triangle OCA$ có $OA=OC\overset{R}{=}$¿ nên $\triangle OCA$ cân tại O , suy ra $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}$. Do đó $\widehat{OCA}+\widehat{KCM}=\widehat{OAC}+\widehat{KMC}$.

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCA}+\widehat{KCM}=90^\circ$, mà A, C, M thẳng hàng nên OCK ¿$180^\circ-90^\circ=90^\circ$. Suy ra OC ⊥ KC.

Bài 7. (h.20)

a) Ta có $\widehat{BDK}=90^\circ, \widehat{CEK}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $\widehat{ADK}=\widehat{AEK}=90^\circ$. Suy ra $\triangle DAK$ vuông tại D và $\triangle EAK$ vuông tại E . Do đó bốn điểm A, D, K, E thuộc đường tròn đường kính AK hay ADKE là tứ giác nội tiếp.



Hình 20

b) Vì hai đường tròn tiếp xúc ngoài tại K nên O, K, O' thẳng hàng.

Có $AK\perp BC$ tại K (tính chất tiếp tuyến) nên $\widehat{KCE}=\widehat{AKE}$ (cùng phụ với $\widehat{CKE}$). Mà ADKE là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ADE}=\widehat{AKE}$ (cùng chắn $\widehat{AE}$). Lại có $\widehat{ADE}=\widehat{QDB}$ (đối đỉnh), suy ra $\widehat{ECK} = \widehat{QDB}$. Xét $\triangle QDB$ và $\triangle QCE$ có $\widehat{BQD}$ chung, $\widehat{ECQ} = \widehat{QDB}$ nên $\Delta QDB \subset \triangle QCE$ (g.g), suy ra $\frac{QD}{QC} = \frac{QB}{QE}$ hay $QD \cdot QE = QB \cdot QC$.

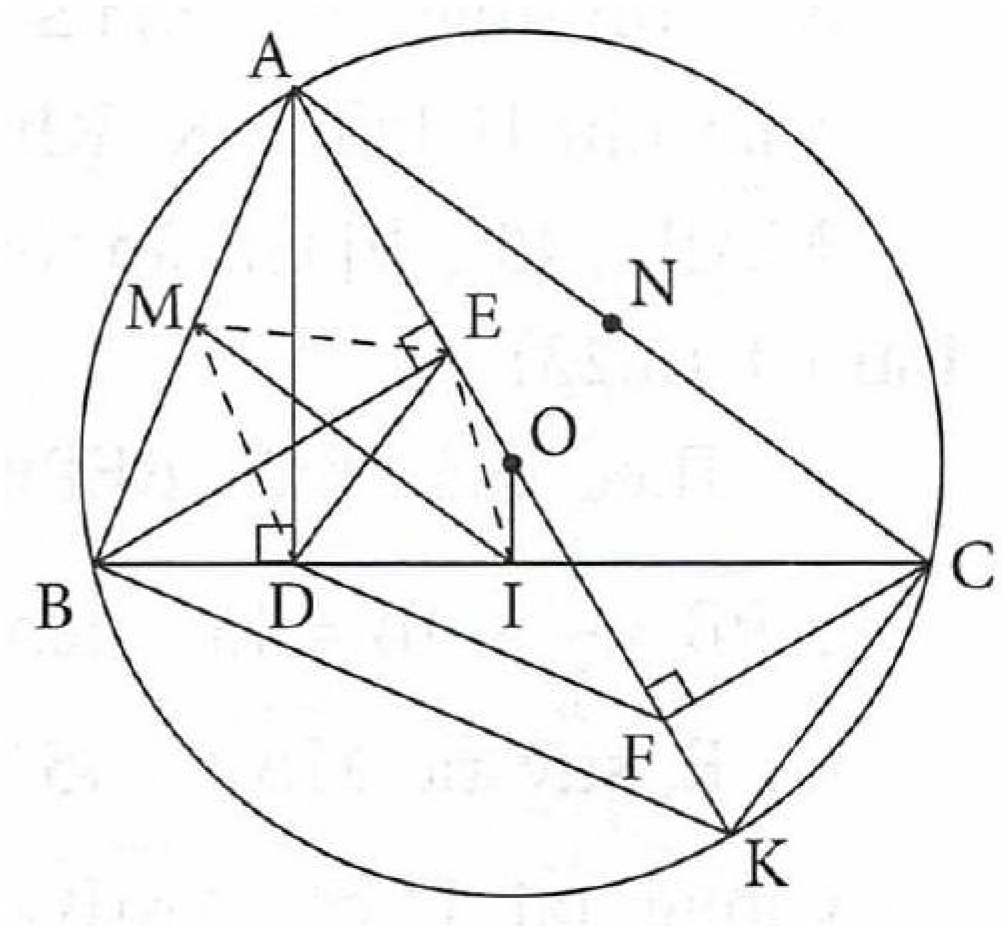
c) Tứ giác BDMK nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{MKB} = \widehat{BDQ}$ mà $\widehat{BDQ} = \widehat{ECK}$ nên $\widehat{ECK} = \widehat{MKB}$, hai góc này ở vị trí đông vị nên KM/¿AC.

Tương tự có tứ giác CKNE nội tiếp đường tròn (O') nên $\widehat{NKC} = \widehat{AED}$. Do $\triangle QDB \propto \triangle QCE$ nên $\widehat{QBD} = \widehat{QEC}$, do đó $\widehat{DBK} = \widehat{AED}$ nên $\widehat{NKC} = \widehat{DBK}$. Suy ra KN/¿AB. Lại có $\widehat{BMK} = 90^\circ, \widehat{CNK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Nên $BM \perp KM, CN \perp KN$ suy ra $BM \perp AC, CN \perp AB$. Lại có $AK \perp BC$ (chứng minh trên). Suy ra AK, BM, CN đồng quy tại một điểm (tính chất ba đường cao của tam giác). Do đó A, H, K thẳng hàng.

Bài 8. (h.21)

a) Theo giả thiết $\triangle DAB$ vuông tại D và $\triangle EAB$ vuông tại E nên tứ giác ABDE nội tiếp đường tròn đường kính AB; $\triangle DAC$ vuông tại D và $\triangle FAC$ vuông tại F nên tứ giác ACFD nội tiếp đường tròn đường kính AC .

b) Vì tứ giác ACFD nội tiếp nên $\widehat{CDF} = \widehat{CAF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CF}$). Mà $\widehat{CBK} = \widehat{CAK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CK}$) nên $\widehat{CDF} = \widehat{CBK}$ (hai góc đồng vị), do đó

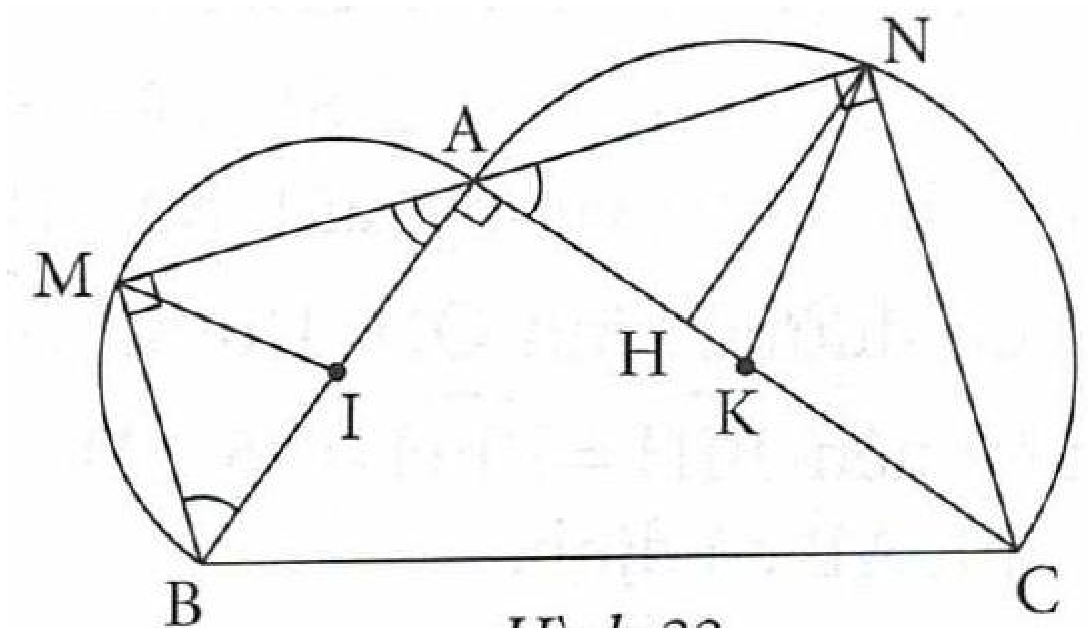


Hinh 21 DF//BK.

c) Tứ giác ABDE nội tiếp nên $\widehat{BAE}=\widehat{EDC}$ (cùng bù với $\widehat{BDE}$). Mà $\widehat{BAK}=\widehat{BCK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$) nên $\widehat{EDC}=\widehat{BCK}$, suy raCK//DE. Mà $\widehat{ACK}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $DE \perp AC$. Gọi I là trung điểm BC, M là trung điểm AB thì MI là đường trung bình của $\triangle ABC$, suy ra $MI/$¿AC. Do đó $MI \perp DE$. Mặt khác $\triangle DAB$ vuông tại D, $\triangle EAB$ vuông tại E nên $DM=EM=\frac{1}{2}AB$, do đó $\triangle MDE$ cân tại M suy ra MI là trung trực của DE nên $ID=IE$. Gọi N là trung điểm AC , chứng minh tương tự được IN là trung trực của DF suy ra $ID=IF$. Vậy $ID=IE=IF$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle \stackrel{def}{=}$¿. Do BC cố định nên I cố định.

Bài 9. (h.22)

a) Vì M thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB}=90^\circ$, N thuộc đường tròn đường kính AC nên $\widehat{ANC}=90^\circ$. Do đó $BM/$¿NC, suy ra $BMNC$ là hình thang.



Hinh 22

b) Vì $\triangle MAB$ vuông tại M nên $\widehat{MAB}+\widehat{ABM}=90^\circ$ mà $\widehat{BAC}=90^\circ$ nên $\widehat{MAB}+\widehat{NAC}=90^\circ$. Do đó $\widehat{ABM}=\widehat{NAC}$, lại có $\widehat{AMB}=\widehat{CNA}=90^\circ$ nên $\triangle MAB \subset \triangle NCA\,(g.g)$. Do đó $\frac{AM}{CN}=\frac{MB}{NA}$ hay $AM\cdot AN=MB\cdot NC$.

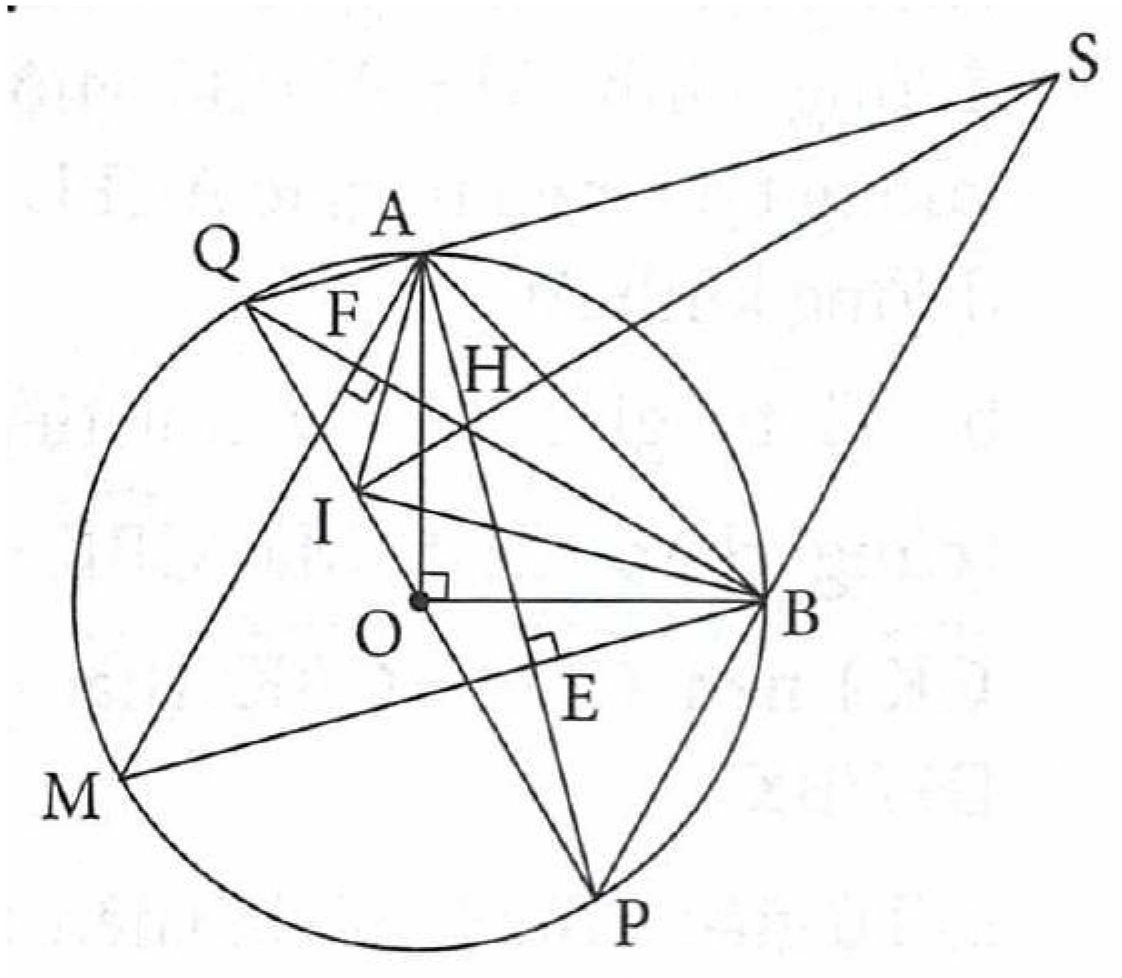
c) Vì $\triangle MAB \propto \triangle NCA$ nên $\frac{S_{MAB}}{S_{NCA}}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$, suy ra $S_{MAB}=k^2\cdot\ S_{NCA}$ (với $k=\frac{AB}{AC}$

không đôii). $S_{BMNC}=S_{ABC}+S_{MAB}+S_{NAC}=S_{ABC}+\left(k^2+1\right)\cdot S_{NAC}$. Mà S_{ABC} không đổi nên S_{BMNC} lớn nhất khi S_{NAC} lớn nhất. Kẻ $NH\perp AC$, vì AC không đổi nên S_{NAC} lớn nhất khi NH lớn nhất. Mà $NH\le NK$ nên dấu "=" xảy ra khi $H\equiv K$. Do đó S_{BMNC} lớn nhất khi H trùng K . Khi đó $\triangle NAC$ vuông cân tại N nên $\widehat{NAC}=45^\circ$ suy ra $\widehat{MAB}=45^\circ$. Vị trí cần tìm của M là $MI\perp AB$.

Bài 10. (h.23)

a) Theo giả thiết $\triangle EPB$ vuông tại E mà $\widehat{APB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}=45^\circ$ nên $\triangle EPB$ vuông cân tại E , suy ra $\widehat{MBP}=45^\circ$. Tương tự $\triangle FMB$ vuông tại F có $\widehat{AMB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}=45^\circ$ nên $\triangle FMB$ vuông cân tại F suy ra $\widehat{MBQ}=45^\circ$.

Do đó $\widehat{MBP}+\widehat{MBQ}=90^\circ$ hay $\widehat{PBQ}=90^\circ$.



Hinh 23

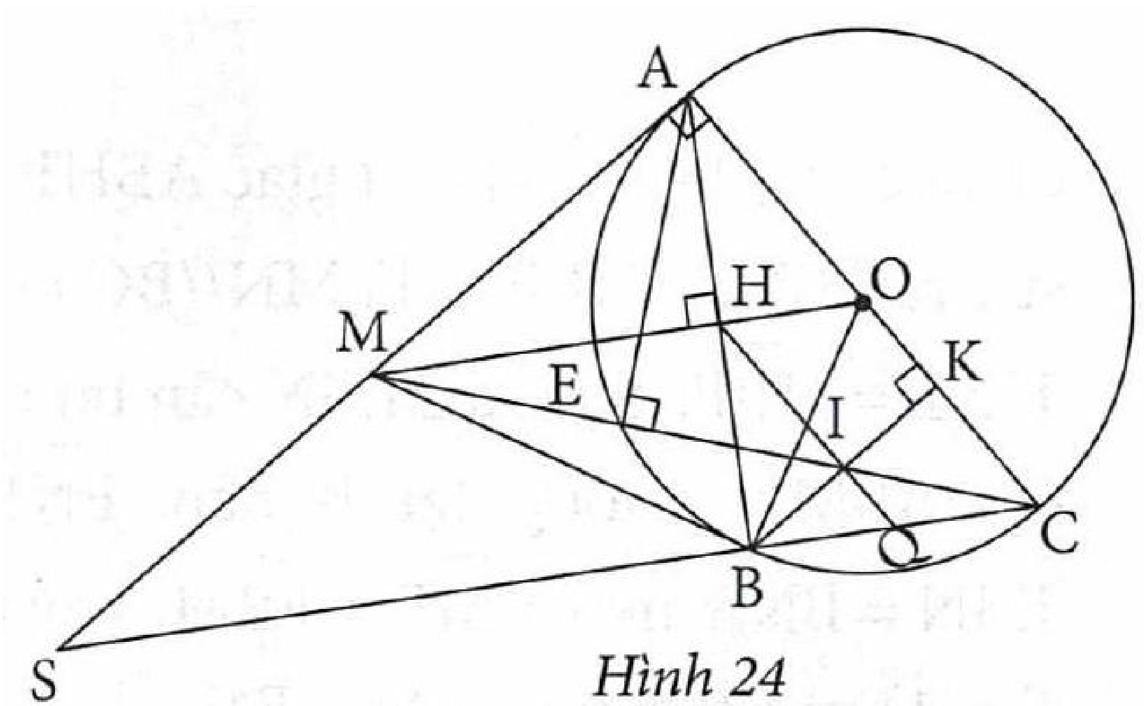
Mà $\widehat{PBQ}=\frac{1}{2}\widehat{POQ}$ (tính chất góc nội tiếp), suy ra $\widehat{POQ}=180^{\circ}$ hay ba điểm P, O, Q thẳng hàng.

b) Ta có $\widehat{PAQ}=\widehat{PBQ}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), mà $\widehat{APB}=45^{\circ}$ nên $\triangle APS$ vuông cân tại A, do đó $SA=AP$ (1). Có $\widehat{AQB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}=45^{\circ}$ nên $\triangle AQH$ vuông cân tại A nên $AQ=AH$ (2). Lại có $\widehat{SAH}=\widehat{PAQ}=90^{\circ}$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $\triangle SAH=\triangle PAQ$ (c.g.c), do đó $SH=PQ$.

c) Vì $PA\perp SQ, QB\perp SP$ nên H là trực tâm của $\triangle SPQ$, suy ra $SH\perp PQ$ tại I. Do đó $\triangle IQH$ vuông tại I, $\triangle AQH$ vuông tại A nên tứ giác AHIQ nội tiếp đường tròn đường kính QH. Do đó $\widehat{AIH}=\widehat{AQH}=45^{\circ}$. Tương tự, tứ giác BPIH nội tiếp nên $\widehat{BIH}=\widehat{BPH}=45^{\circ}$. Do đó $\widehat{AIB}=90^{\circ}$ nên I thuộc đường tròn đường kính AB cố định.

Bài 11. (h.24)

a) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $MA=MB$, lại có $OA=OB$ nên OM là trung trực của AB , suy ra $OM\perp AB$ tại H và $HA=HB$. Ta có $BK\perp AC$, do đó bốn điểm B, H, O, K thuộc đường tròn đường kính OB .



Hình 24

b) Có $\widehat{AEC}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OA\perp AM$. Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MEA$ có $\widehat{M}$ chung, $\widehat{MEA}=\widehat{MAC}=90^{\circ}$ nên

$\triangle MEA \subset \triangle MAC\left(\ g.g\right)$, suy ra $\dfrac{ME}{MA}=\dfrac{MA}{MC}$ hay $ME\cdot MC=MA^2$.

Tương tự $\triangle MAO \propto \infty \triangle MHA$ nên $\dfrac{MA}{MH}=\dfrac{MO}{MA}$ hay $MH\cdot MO=MA^2$.

Từ (1) và (2) suy ra $MH\cdot MO=ME\cdot MC$.

c) Đường thẳng BC cắt AM tại S . Ta có $\widehat{ABC}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra OM/¿CS. Mà $OA=OC=R$ nên $MA=MS$. Ta có BK/¿SA (cùng vuông góc với AC) nên $\triangle CIB \propto \triangle CMS$ và $\triangle CKI \propto \triangle CAM$, do đó $\dfrac{IB}{MS}=\dfrac{CI}{CM}$ và $\dfrac{IK}{MA}=\dfrac{CI}{CM}$, suy ra $\dfrac{IB}{MS}=\dfrac{IK}{MA}$ mà $MA=MS$ nên $IK=IB$. Do đó HI là đường trung bình của $\triangle BAK$, IQ là đường trung bình của $\triangle BCK$. Suy ra IH/¿AC và IQ/¿AC nên ba điểm H, I, Q thẳng hàng.

Bài 12. (h.25)

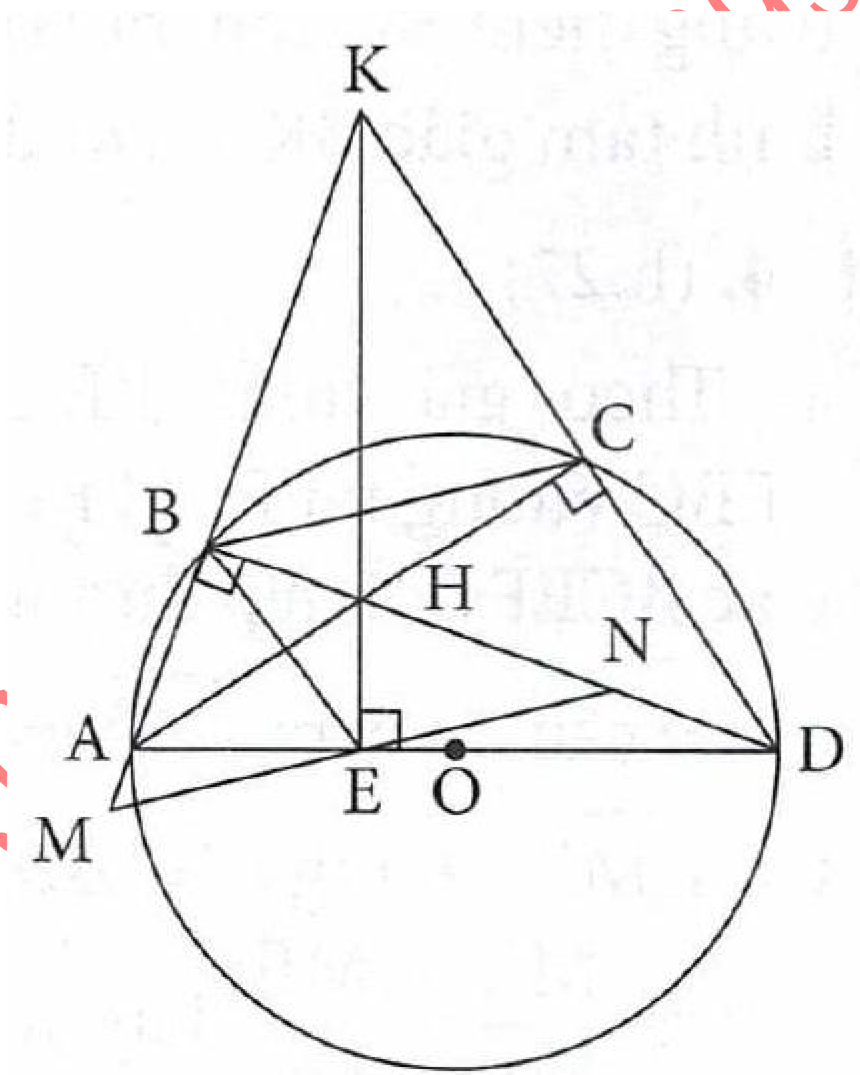
a) Ta có $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên AC và DB là hai đường cao của $\triangle KAD$, suy ra H là trực tâm của $\triangle KAD$. Do đó $KE\perp AD$. Các tam giác BAH và EAH vuông tại B và E nên tứ giác ABHE nội tiếp đường tròn đường kính AH .

b) Có $\triangle BKH$ vuông tại B, $\triangle CKH$ vuông tại C (chứng minh trên), suy ra tứ giác BHCK nội tiếp đường tròn đường kính KH.

Do đó $\widehat{CKH}=\widehat{CBH}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CH}$), mà $\widehat{CBD}=\widehat{CAD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$) nên $\widehat{CAD}=\widehat{CKH}$.

Lại có $\widehat{HEA}=\widehat{KED}=90^{\circ}$ nên $\triangle EAH \backsim \triangle EKD$ (g.g), suy ra $\frac{EA}{EK}=\frac{EH}{ED}$ hay

$EA\cdot ED=EK\cdot EH$.



Hinh 25

c) Ta có $\widehat{CBD}=\widehat{CAD}$, tứ giác ABHE nội tiếp nên $\widehat{EBH}=\widehat{EAH}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{HE}$), suy ra $\widehat{HBC}=\widehat{HBE}$. Mà MN /¿ BC nên $\widehat{HBC}=\widehat{HNE}$ (hai góc so le trong), do đó $\widehat{HNE}=\widehat{HBE}$. Suy ra $\triangle EBN$ cân tại E nên $EN=EB$.

Có $\triangle BMN$ vuông tại B nên $\widehat{ENB}+\widehat{EMB}=90^{\circ}$ và $\widehat{EBN}+\widehat{EBM}=90^{\circ}$. Mà $\widehat{EBN}=\widehat{ENB}$ nên $\widehat{EMB}=\widehat{EBM}$, suy ra $\triangle EMB$ cân tại E , do đó $EM=EB$.

Từ (1) và (2) suy ra $EM=EN$.

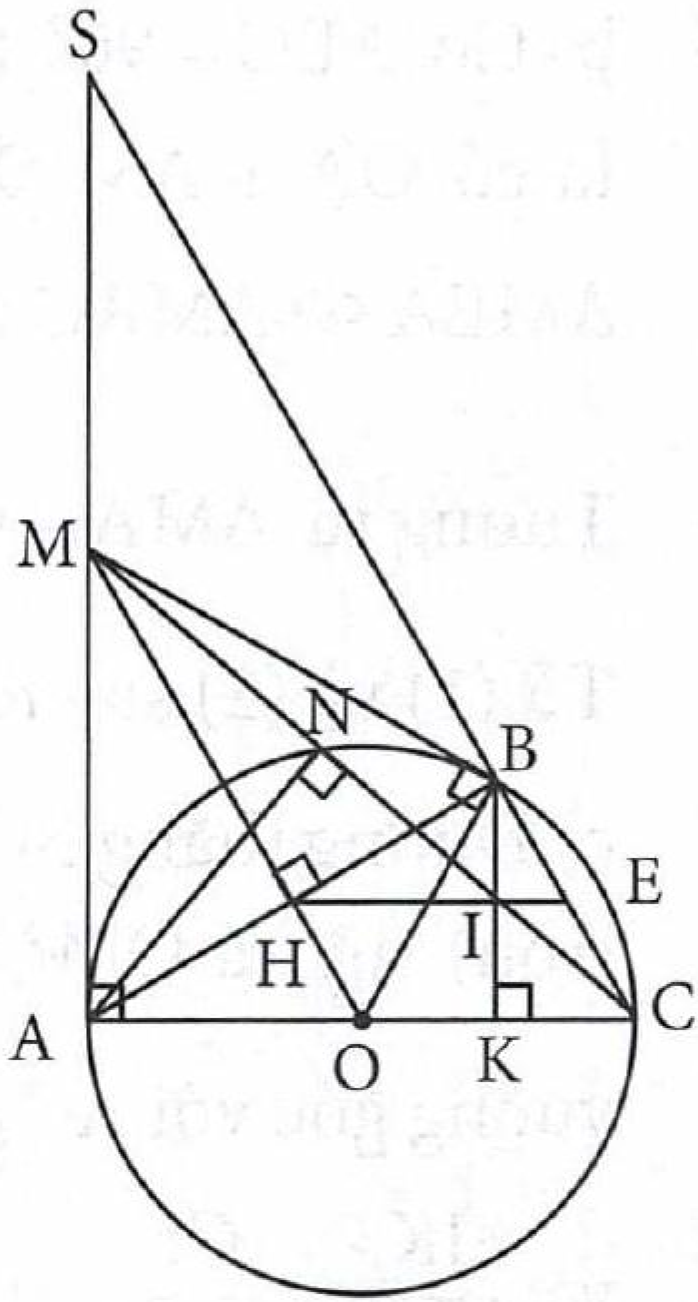
Bài 13. (h.26)

a) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OA\perp MA$, $OB\perp MB$, nên $\triangle AMO$ vuông tại A, $\triangle BMO$ vuông tại B . Do đó tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn đường kính MO .

b) Ta có $\widehat{ANC}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Xét $\triangle CNA$ và $\triangle CAM$ có $\widehat{CNA}=\widehat{CAM}=90^{\circ}$, $\widehat{ACM}$ chung nên $\triangle CNA$ co $\triangle CAM$ (g.g), suy ra $\frac{CN}{CA}=\frac{CA}{CM}$ hay $CM\cdot CN=CA^2$.

Mà $CA=2R$ nên $CM\cdot CN=4R^2$.

c) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $MA=MB$, lại có $OA=OB=R$ nên OM là trung trực của AB , suy ra $OM\perp AB$ tại H . Đường thẳng CB cắt AM tại S .



Hình 26

Có $\widehat{ABC}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên OM/¿CS. Xét $\triangle ACS$ có $OA=OC=R$, OM/¿CS nên $MA=MS$. Ta có BK/¿SA (cùng vuông góc với AC) nên $\triangle CIK \propto \triangle CMA$ và $\triangle CIB \backsim \triangle CMS$.

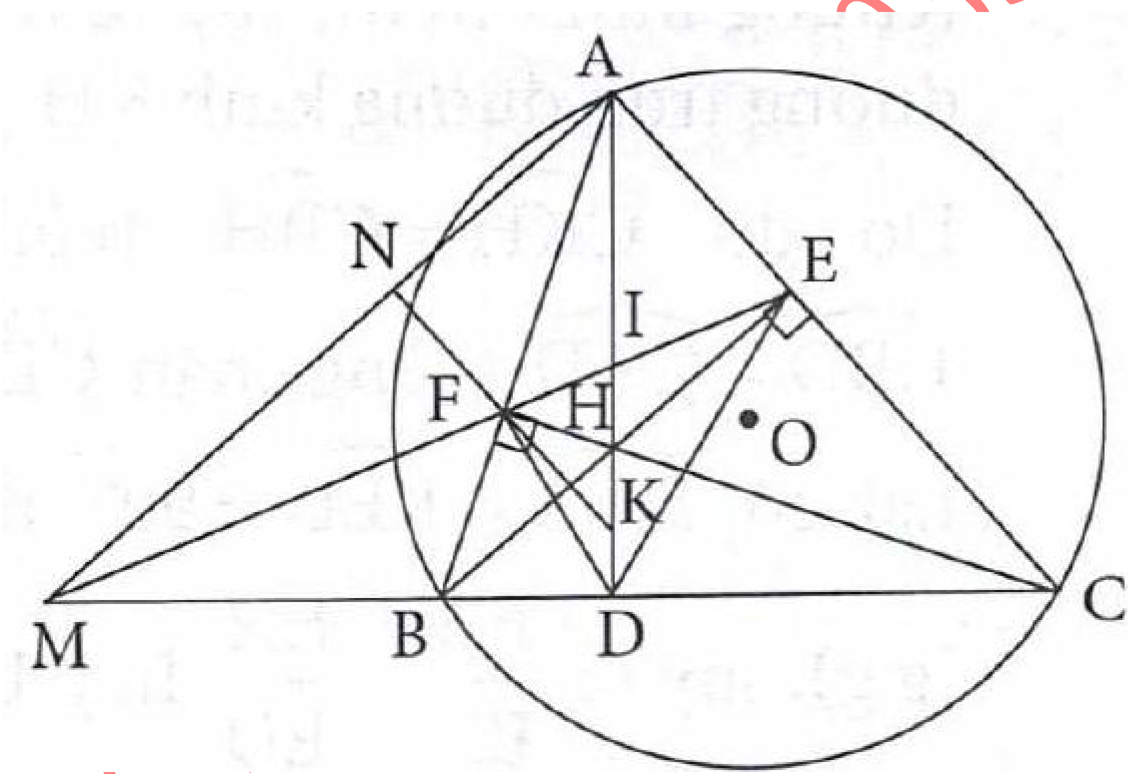
Do đó $\frac{IK}{MA}=\frac{CI}{CM}, \frac{IB}{MS}=\frac{CI}{CM}$ nên $\frac{IK}{MA}=\frac{IB}{MS}$ mà $MA=MS$ nên $IB=IK$.

Ta có OM là trung trực của AB nên H là trung điểm của AB . Theo giả thiết E là trung điểm BC , suy ra HI là đường trung bình tam giác BAK , IE là đường trung bình tam giác BKC . Do đó $HI/¿AC$, $IE/¿AC$ nên ba điểm H, I, E thẳng hàng.

Bài 14. (h.27)

a) Theo giả thiết $BE \perp AC$, $CF \perp AB$ nên $\triangle EBC$ vuông tại E, $\triangle FBC$ vuông tại F , do đó tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC .

b) Từ câu a suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{MFB}$ (cùng bù $\widehat{BFE}$). Có $\widehat{CME}$ chung nên $\triangle MBF \propto \triangle MEC$ (g.g), suy ra $\frac{MB}{ME} = \frac{MF}{MC}$ hay $MB \cdot MC = ME \cdot MF$.



Hình 27

c) Vì tứ giác BCEF nội tiếp nên $\widehat{FBE} = \widehat{FCE}$. Các tứ giác BDHF và CDHE nội tiếp nên $\widehat{FBH} = \widehat{FDH}$ và $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$. Do đó $\widehat{HDF} = \widehat{HDE}$, suy ra DI là phân giác trong của $\triangle DFE$. Mà $MD \perp DI$ nên DM là phân giác ngoài của $\triangle DFE$. Theo tính chất phân giác có $\frac{IF}{IE} = \frac{MF}{ME} = \frac{DF}{DE}$.

Vì NF //AE nên $\triangle MNF \propto \triangle MAE$ suy ra $\frac{NF}{AE} = \frac{MF}{ME}$.

Vì FK//AE nên $\triangle$ IFK $\propto \triangle$ IEA suy ra $\frac{FK}{AE}=\frac{IF}{IE}$.

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{NF}{AE}=\frac{FK}{AE}$ do đó $NF=FK$.

Chủ đê 7

BÀI TOÁN CƯ‘C TR! VÀ ỨNG DỤNG TRONG CUỘC SỐNG

1. Kiến thức cần nhớ

Bất đẳng thức Cauchy: Cho các số thực không âm a , b khi đó ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Một số kết quả được suy ra từ bất đẳng thức Cauchy:

- Với $a,b\ge 0$ từ $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ suy ra $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\ge ab$ hay $4ab\le (a+b)^2$.
- Với $a,b>0$ từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ và $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ hay $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

2. Bài tập minh hoạ

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{12a+(b-c)^2}+\sqrt{12b+(c-a)^2}+\sqrt{12c+(a-b)^2}$$

Giải. Ta có:

$12a+(b-c)^2=4a(a+b+c)+(b+c)^2-4bc=(2a+b+c)^2-4bc\le(2a+b+c)^2$.

Suy ra $\sqrt{12a+(b-c)^2}\le 2a+b+c$.

Chứng minh tương tự ta có $\sqrt{12\ \ b+(c-a)^2}\le 2\ \ b+c+a$ và $\sqrt{12c+(a-b)^2}\le 2c+a+b$.

Do đó $P\le 4(a+b+c)=12$. Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 12 khi $(a;b;c)$ là các hoán vị của $(3;0;0)$.

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^4+b^4+c^4-3abc$.

Giải.

- Tìm giá trị nhỏ nhất:

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$.

Ta có: $a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c)=3abc$.

Do đó P đạt giá trị nhỏ nhất là 0 , khi $a=b=c=1$.

- Tìm giá trị lớn nhất:

Ta có $P\le(a+b)^4+c^4\le(a+b+c)^4=81$.

Do đó P đạt giá trị lớn nhất là 81 , đạt được khi $a=b=0,c=3$.

Bài 3. Một tấm bìa hình chữ nhật có chu vi không đổi là 8 cm . Tấm bìa có diện tích lớn nhất với chiều dài và chiều rộng bằng bao nhiêu?

Giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của tấm bìa hình chữ nhật lần lượt là $a,b(cm)(a\ge b>0)$.

Vì tấm bìa có chu vi không đổi là 8 cm nên ta có $2(a+b)=8$ hay $a+b=4$.

Diện tích của tấm bìa hình chữ nhật đó là $S=ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=4$.

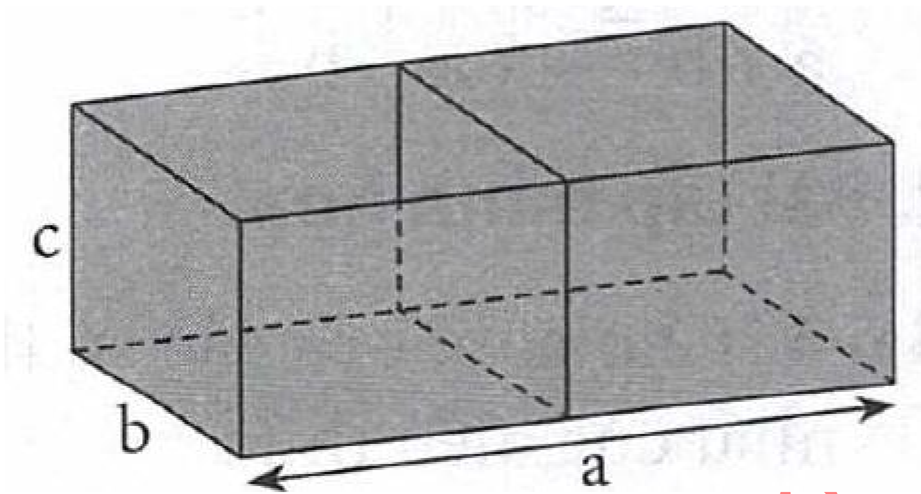
Vậy diện tích lớn nhất của tấm bìa đó là $4\ cm^2$ khi $a=b=2\ cm$.

Bài 4. Một người thợ được đặt hàng làm một bể cá hai ngăn không có nắp với thể tích là $1{,}296\ m^3$. Người thợ đó cắt các tấm kính và ghép lại được một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật với ba kích thước a, b, c (như Hình 28) có vách ngăn ở chính giữa.

Hỏi người thợ phải cắt các tấm kính có kích thước a,b,c bằng bao nhiêu để tiết kiệm kính nhất? Giả thiết rằng độ dày của kính không đáng kể.

Giải.

Ta có $abc=1{,}296$.



Hinh 28

Diện tích các tấm kính dùng để làm bể cá là

$$S \quad ¿\, ab+2ac+3bc=(ab+2ac)+(3bc+2,16)-2,16$$
$$¿ \quad \geq 2\sqrt{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2,16\cdot\sqrt{ab\cdot ac\cdot bc}}-2,16=6,48\left(\ m^2\right).$$

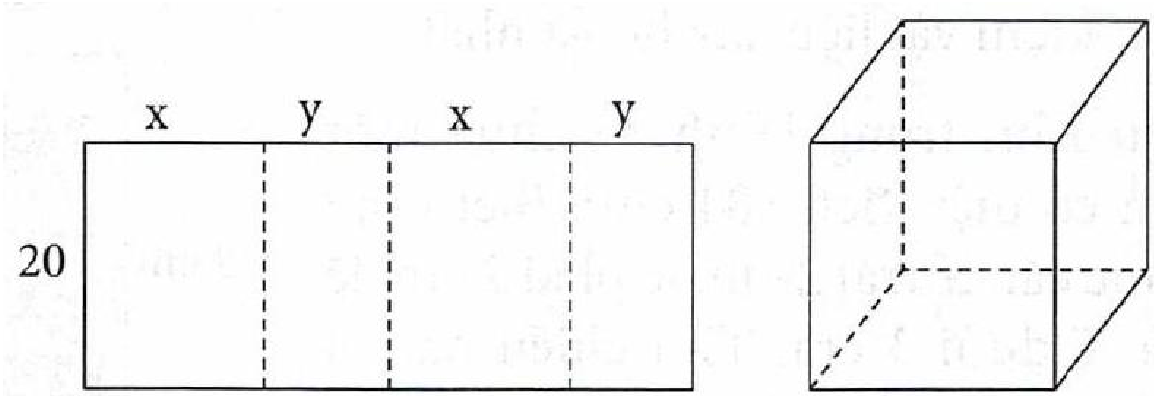
Vậy diện tích kính ít nhất cần dùng là $6,48\ \ m^2 khiab=2ac=3bc$.

Suy ra $\begin{cases} b=2c \\ a=3c \end{cases}$. Do đó $\begin{cases} a=1,8 \\ b=1,2. \\ c=0,6 \end{cases}$.

Lưu ý: Học sinh có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm:

$S=ab+2bc+3ca\geq\sqrt[3]{ab\cdot 2bc\cdot 3ca}=6,48\left(\ m^2\right)$.

Bài 5. Người ta gập một miếng bìa có dạng hình chữ nhật với kích thước $60\times 20\ \ cm$ như Hình 29 để ghép thành mặt xung quanh của một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật đứng (hai đáy trên và dưới được cắt từ miếng bìa khác để ghép vào). Tính diện tích toàn phần của hộp khi thể tích của hộp lớn nhất.



Hình 29

Giải.

Theo giả thiết ta có $2x+2y=60$ hay $y=30-x$. Điều kiện: $0<x<30$. Thể tích của hộp là:
$V=20xy=20x(30-x)\le 20\cdot\dfrac{(x+30-x)^2}{4}=5\cdot 30^2=4500\left(cm^3\right)$.

Dấu " ¿ " xảy ra khi $x=30-x$ hay $x=15$, suy ra $y=15$.

Vậy diện tích toàn phần của hộp là $S_{tp}=2\cdot 20x+2\cdot 20y+2xy=1650\left(cm^2\right)$.

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. Với các số thực dương a,b thoả mãn $a\sqrt{2-b^2}+b\sqrt{2-a^2}=2$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}$.

Bài 2. Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn $a+b+2c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=ab+ac-4bc$.

Bài 3. Với x,y là hai số thực không âm thoả mãn $x+y=3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\sqrt{5x-x^2}+\sqrt{5y-y^2}$.

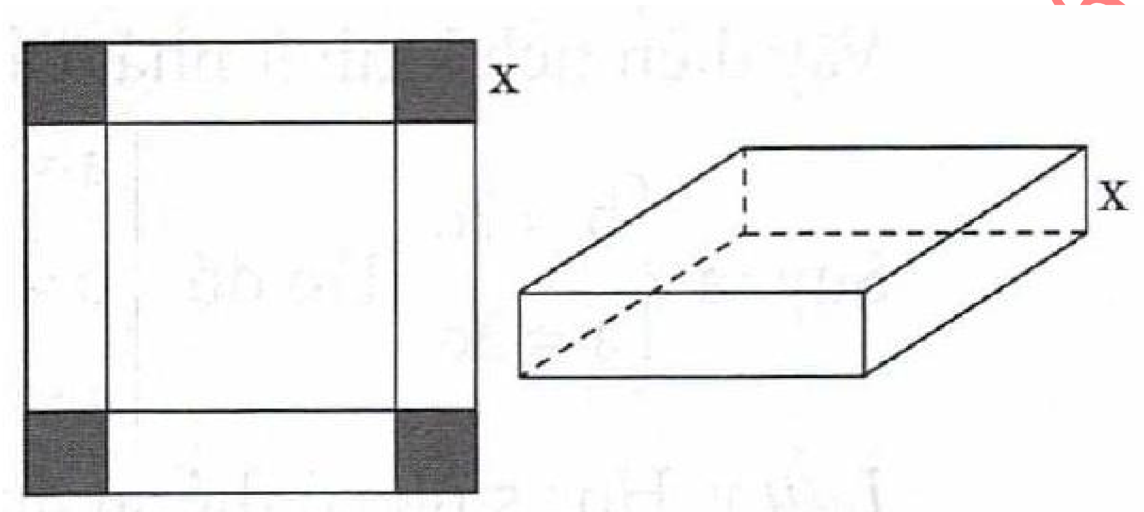
Bài 4. Với a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$, chứng minh $a+ab+abc\le 4$.

Bài 5. Với a,b là hai số thực dương thoả mãn $a+b+3ab=5$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$.

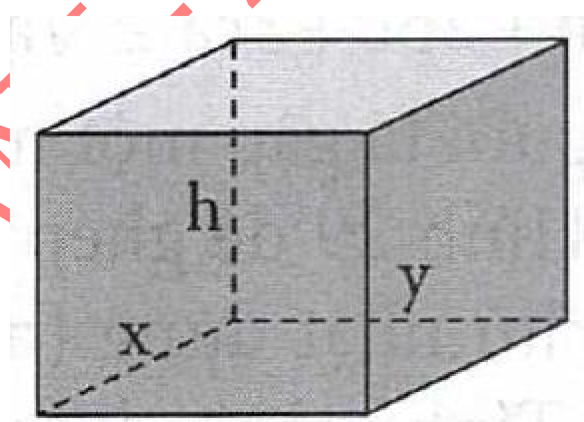
Bài 6. Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 18 cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như Hình 30 để được một chiếc hộp không nắp. Tìm giá trị của x để chiếc hộp có thể tích lớn nhất.

Bài 7. Một gia đình cần xây một hố ga không nắp (như Hình 31) có dạng hình hộp chữ nhật với thể tích 3 m^3. Tỉ số giữa chiều cao h của hố và chiều rộng y của đáy bằng 4 . Tìm chiều dài x của đáy để tiết kiệm vật liệu xây hố ga nhất.

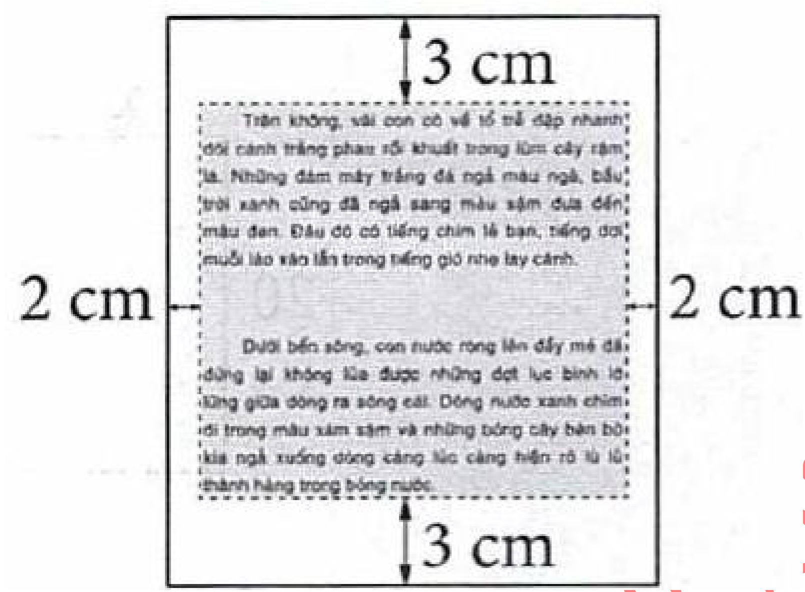
Bài 8. Phần màu xám trong Hình 32 chứa một đoạn văn bản có diện tích 384 cm^2. Biết rằng trang giấy được căn lề trái 2 cm , lề phải 2 cm , lề trên 3 cm và lề dưới 3 cm . Tìm chiều dài và chiều rộng của trang giấy để trang giấy có diện tích nhỏ nhất.



Hinh 30



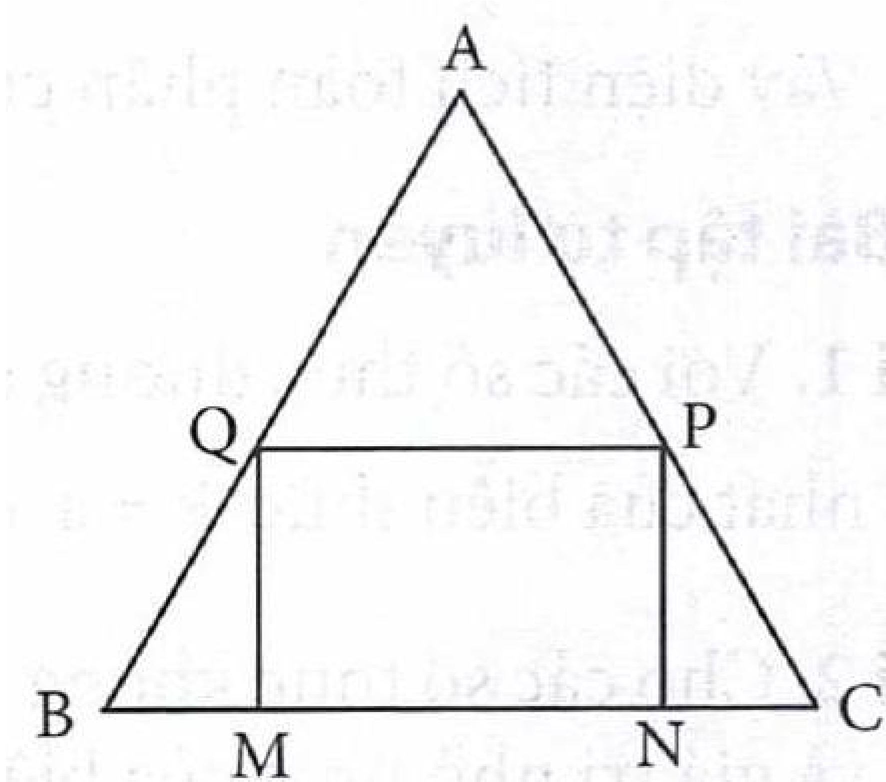
Hình 31



Hinh 32

Bài 9. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng khách sạn cho thuê với giá 400 nghìn đồng một ngày và toàn bộ phòng đã được cho thuê hết. Biết cứ mỗi lần khách sạn tăng giá thuê phòng thêm 20 nghìn đồng mỗi ngày thì có thêm 2 phòng trống. Hỏi khách sạn nên tăng giá phòng thêm bao nhiêu để doanh thu của khách sạn trong một ngày là lớn nhất?

Bài 10. Một miếng bìa có dạng hình tam giác đều ABC với cạnh bằng 16 cm . Bạn Minh cắt một hình chữ nhật MNPQ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khoá, với M , N thuộc cạnh BC , P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB (nhử Hình 33). Hỏi diện tích lớn nhất có thể của hình chữ nhật MNPQ bằng bao nhiêu?



Hình 33

Hướng dẫn - Lời giải - Đáp số

Bài 1. Từ giả thiết, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$2=a\sqrt{2-b^2}+b\sqrt{2-a^2}\le\frac{a^2+2-b^2}{2}+\frac{b^2+2-a^2}{2}=2.$$

Dấu " ¿ " xảy ra khi $a^2+b^2=2$.

Mặt khác $4=2\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a+b\right)^2$ suy ra $0<a+b\le2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$P=2a+\frac{2}{a}+2\ b+\frac{2}{b}-a-b\ge2\sqrt{2a\cdot\frac{2}{a}}+2\sqrt{2\ b\cdot\frac{2}{b}}-\left(a+b\right)\ge8-2=6.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là 6 khi $a=b=1$.

Bài 2. - Tìm giá trị lớn nhất:

Ta có $P\le ab+2ac=a(b+2c)=a(1-a)=\frac{1}{4}-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$ khi $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2},c=0$.

- Tìm giá trị nhỏ nhất: Vì $a+b+2c=1$ nên $0\le b+2c\le 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $P\ge -4bc\ge -2\cdot\frac{(b+2c)^2}{4}\ge -\frac{1}{2}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{-1}{2}$ khi $a=0,\ b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{4}$.

Bài 3. Do $\begin{cases}x,y\ge 0\\ x+y=3\end{cases}$ nên $0\le x,y\le 3$.

Từ đó $x(x-3)\le 0$ hay $x^2\le 3x$. Tương tự $y^2\le 3y$.

Khi đó:

$T=\sqrt{5x-x^2}+\sqrt{5y-y^2}\ge\sqrt{5x-3x}+\sqrt{5y-3y}=\sqrt{2x}+\sqrt{2y}\ge\sqrt{2x+2y}=\sqrt{6}$.

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{6}$ khi $(x;y)$ là các hoán vị của $(3;0)$.

Bài 4. Ta có $a+ab+abc=a+ab(1+c)\le a+a\cdot\frac{(b+c+1)^2}{4}=a+\frac{a(4-a)^2}{4}$.

Ta sẽ chứng minh $a+\frac{a(4-a)^2}{4}\le 4$.

Khi đó $\frac{a(4-a)^2}{4}\le 4-$¿ a suy ra $\frac{a(4-a)}{4}\le 1$ (do $a<3$) hay $(a-2)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra khi $a=2,\ b=1,c=0$.

Bài 5. Vì $a,b>0$ nên $a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

Suy ra $a+b+3ab\ge 2\sqrt{ab}+3ab$ hay $5\ge 2\sqrt{ab}+3ab$.

Khi đó $2\sqrt{ab}+3ab-5\le 0$ hay $(\sqrt{ab}-1)(3\sqrt{ab}+5)\le 0$, suy ra $\sqrt{ab}-1\le 0$, do đó $\sqrt{ab}\le 1$.
Vì vậy $ab\le 1$.

Có $T=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(5-3ab)^2-2ab=(3ab-3)^2-14ab+16\ge 2$.

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất là 2 khi $a=b=1$.