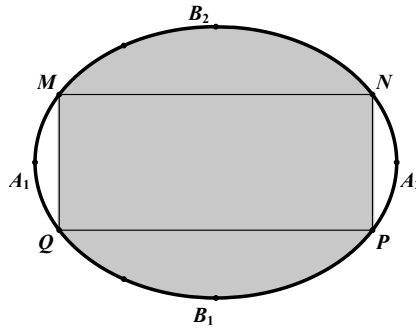


Dạng 2. Ứng dụng tích phân để giải một số bài toán thực tế

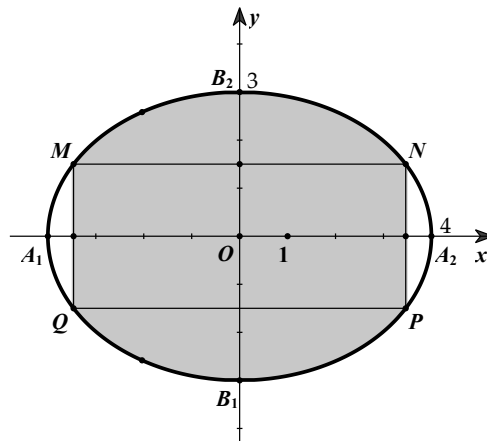
Câu 1. (Đề Tham Khảo 2019) Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là $200.000 \text{ VNĐ} / \text{m}^2$ và phần còn lại $100.000 \text{ VNĐ} / \text{m}^2$. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{m}$, $B_1B_2 = 6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3\text{m}$?



- A. 5.526.000 đồng. B. 5.782.000 đồng C. 7.322.000 đồng. D. 7.213.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Với } \begin{cases} A_1A_2 = 8 = 2a \\ B_1B_2 = 6 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}.$$

Suy ra diện tích của hình elip là $S_{(E)} = \pi a.b = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}$.

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ = 3 \rightarrow M\left(x; \frac{3}{2}\right) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 12 \rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right); N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$$

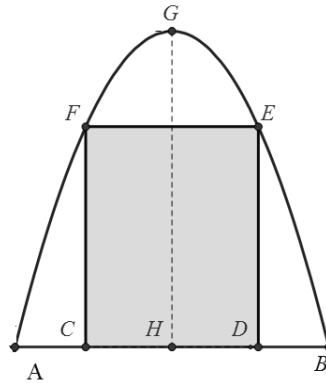
Gọi $S_1; S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

$$\text{Ta có: } S_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \int_{2\sqrt{3}}^4 \sqrt{16-x^2} dx = 3 \int_{2\sqrt{3}}^4 \sqrt{16-x^2} dx \xrightarrow{x=4\sin t} S_2 = 4\pi - 6\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Suy ra: $S_1 = S_{(E)} - S_2 = 8\pi + 6\sqrt{3}$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$$T = (4\pi - 6\sqrt{3}) \cdot 100 + (8\pi + 6\sqrt{3}) \cdot 200 \approx 7.322.000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 2. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trồng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

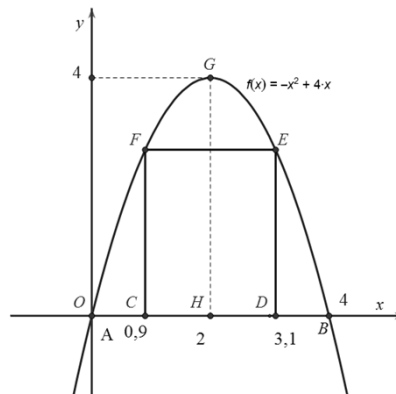


- A.** 11445000 đồng. **B.** 4077000 đồng. **C.** 7368000 đồng. **D.** 11370000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2; 4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

$$\text{Vì parabol có đỉnh là } G(2; 4) \text{ và đi qua điểm } O(0; 0) \text{ nên ta có } \begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

$$\text{Diện tích của cả công là } S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

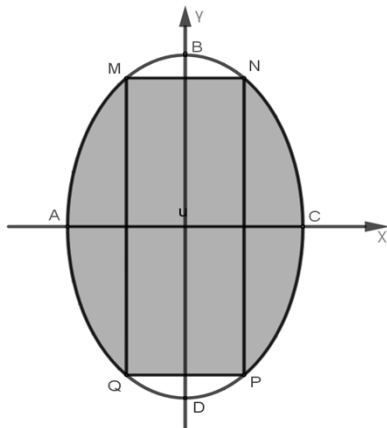
$$\text{Mặt khác chiều cao } CF = DE = f(0,9) = 2,79 \text{ (m)}; CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2 \text{ (m)}.$$

$$\text{Diện tích hai cánh công là } S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$\text{Diện tích phần xiên hoa là } S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$\text{Vậy tổng số tiền để làm công là } 6,138 \cdot 1200000 + \frac{6793}{1500} \cdot 900000 = 11441400 \text{ đồng.}$$

Câu 3. Một biển quảng cáo với 4 đỉnh A, B, C, D như hình vẽ. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là $200.000(\text{đ}/\text{m}^2)$ sơn phần còn lại là $100.000\text{đ}/\text{m}^2$. Cho $AC = 8\text{m}; BD = 10\text{m}; MN = 4\text{m}$ Hỏi số tiền sơn gần với số tiền nào sau đây:



- A.** 12204000đ. **B.** 14207000đ.. **C.** 11503000đ.. **D.** 10894000đ.

Lời giải

$$\text{elip có phương trình là: } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1. \text{ Vì } MN = 4 \Rightarrow x_N = 2 \Rightarrow \begin{cases} y_N = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y_N = \frac{-5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

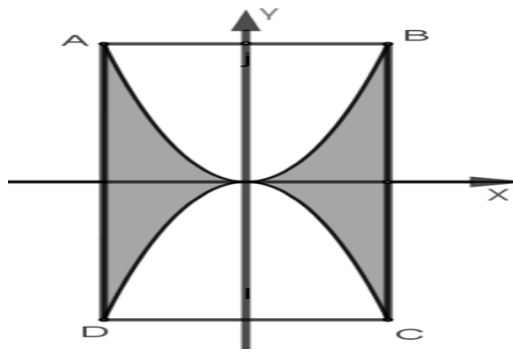
$$\text{Diện tích phần tô đậm là } S_1 = 2 \int_{\frac{-5\sqrt{3}}{2}}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} \frac{4}{5} \sqrt{25 - y^2} dy \approx 59,21 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{Diện tích elip là } S = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{Diện tích phần trắng là } S_2 = S - S_1 \approx 3,622 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{Tổng chi phí trang trí là: } T = 59,21 \cdot 200000 + 3,622 \cdot 100000 = 12204200\text{đ}.$$

Câu 4. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được định giá với giá thành

$500.000đ/m^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.

Cho $AB = 4dm$; $BC = 8dm$. Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

- A. 105660667đ. **B. 106666667đ.** C. 107665667đ. D. 108665667đ.

Lời giải

Vì $AB = 4dm$; $BC = 8dm$. $\Rightarrow A(-2; 4), B(2; 4), C(2; -4), D(-2; -4)$.

parabol là: $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$

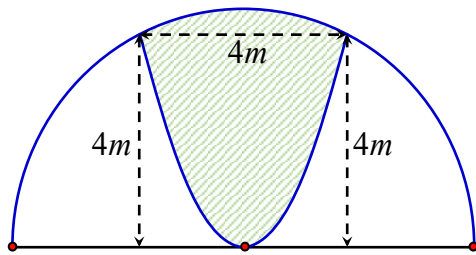
Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4 \int_0^2 x^2 dx = \frac{32}{3} (dm^2)$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4.8 = 32 (m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} (dm^2)$

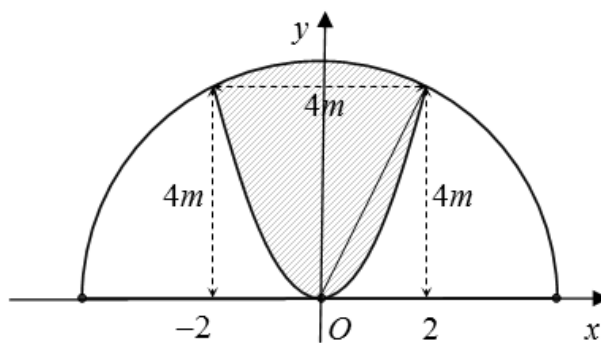
Tổng chi phí trang trí là: $T = \left(\frac{32}{3} \cdot 5000 + \frac{64}{3} \cdot 2500 \right) \cdot 1000 \approx 106666667đ$

Câu 5. (Thanh Hóa 2019) Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng $4(m)$. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/ m^2 và 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



- A. 3.738.574 (đồng).** B. 1.948.000 (đồng). C. 3.926.990 (đồng). D. 4.115.408 (đồng).

Lời giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, ta có bán kính của đường tròn là $R = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

Phương trình của nửa đường tròn (C) là: $x^2 + y^2 = 20, y \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{20 - x^2}$.

Parabol (P) có đỉnh $O(0;0)$ và đi qua điểm $(2;4)$ nên có phương trình: $y = x^2$.

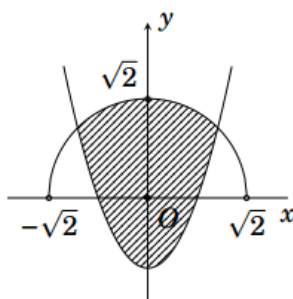
Diện tích phần tô màu là: $S_1 = \int_{-2}^2 [\sqrt{20 - x^2} - x^2] dx \approx 11,94 (m^2)$.

Diện tích phần không tô màu là: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{5})^2 - S_1 \approx 10\pi - 11,94 (m^2)$.

Số tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó là:

$$150000 \cdot 11,94 + 100000 \cdot (10\pi - 11,94) \approx 3.738.593.$$

Câu 6. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu (phần được gạch chéo trên hình vẽ). Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2x^2 - 1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2} (m)$. Tính số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng.



- A. $\frac{3\pi - 2}{6} \times 250000$. B. $\frac{3\pi + 10}{6} \times 250000$. C. $\frac{3\pi + 10}{3} \times 250000$. D. $\frac{3\pi + 2}{6} \times 250000$

Lời giải

Chọn B

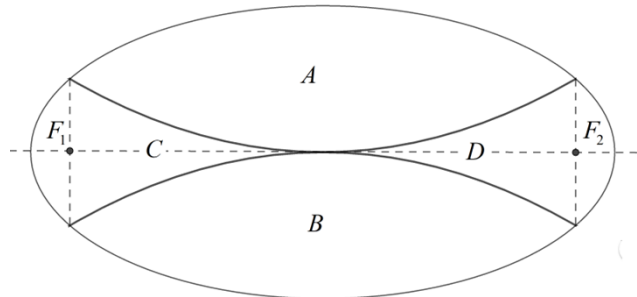
Ta có phương trình đường tròn tâm gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2} (m)$ $x^2 + y^2 = 2$.

Tọa độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm hệ
$$\begin{cases} y = \sqrt{2 - x^2} \\ y = 2x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 1 \\ x = 1, y = 1 \end{cases}$$

Diện tích vườn hoa là $S = \int_{-1}^1 (\sqrt{2 - x^2} - 2x^2 + 1) dx = \frac{3\pi + 10}{6}$.

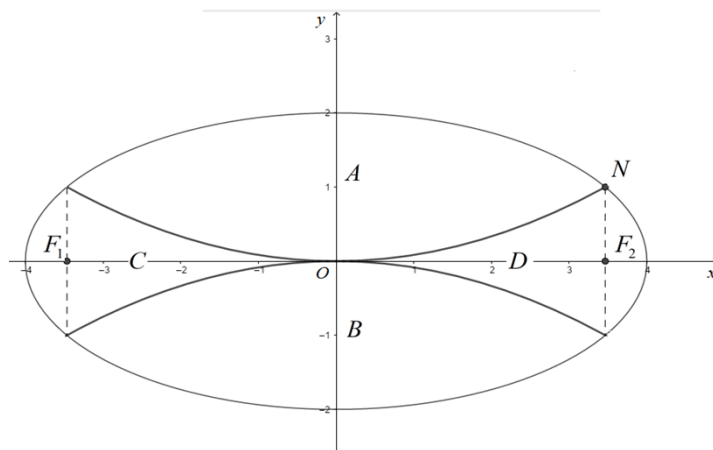
số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu là $\frac{3\pi+10}{6} \times 250000$.

- Câu 7. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250.000 đ và 150.000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).
- A.** 5.676.000 đ. **B.** 4.766.000 đ. **C.** 4.656.000 đ. **D.** 5.455.000 đ.



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do elip có độ dài trục lớn $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$, độ dài trục nhỏ $2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$.

Diện tích của (E) là: $S_{(E)} = \pi ab = 8\pi$.

Phương trình chính tắc (E) là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Suy ra $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2}$.

Ta có $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow F_2(2\sqrt{3}; 0)$.

Do N và F_2 có cùng hoành độ $\Rightarrow N(2\sqrt{3}; 1)$.

Gọi $(P): y = kx^2$ là parabol nằm ở phía trên trục Ox .

Do $N \in (P)$ ta có $1 = k(2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{12}$. Suy ra $(P): y = \frac{1}{12}x^2$.

$$\begin{aligned} \text{Diện tích phần } A \text{ là } S_A &= \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{16-x^2} - \frac{1}{12} x^2 \right) dx = 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{16-x^2} - \frac{1}{12} x^2 \right) dx \\ &= \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx - \frac{1}{6} \int_0^{2\sqrt{3}} x^2 dx. \end{aligned}$$

* Xét $I_1 = \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx$. Đặt $x = 4 \sin t \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$.

Đổi cận:

x	0	$2\sqrt{3}$
t	0	$\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16-16\sin^2 t} \cdot 4\cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = 8 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 8 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right). \end{aligned}$$

* Ta có $I_2 = \frac{1}{6} \int_0^{2\sqrt{3}} x^2 dx = \frac{1}{18} x^3 \Big|_0^{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra: $S_A = I_1 - I_2 = \frac{8\pi + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_A + S_B = 2S_A = \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}$.

Tổng diện tích phần C, D là: $S_C + S_D = S_{(E)} - (S_A + S_B) = \frac{8\pi - 4\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó tổng số tiền để hoàn thành vườn hoa trên là:

$$\frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3} \cdot 250000 + \frac{8\pi - 4\sqrt{3}}{3} \cdot 150000 \approx 5676000 \text{ đ.}$$

Câu 8. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An -2019) Người ta xây một sân khấu với mặt sân có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai của hai hình tròn là 20 mét và 15 mét. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 mét. Chi phí làm mỗi mét vuông phân giao nhau của hai hình tròn là 300 ngàn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 ngàn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân của sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

- A.** 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng. **C.** 218 triệu đồng. **D.** 200 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi O, I lần lượt là tâm của các đường tròn bán kính bằng 20 mét và bán kính bằng 15 mét. Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ, vì $OI = 30$ mét nên $I(0; 30)$. Phương trình hai đường tròn lần lượt là

$$x^2 + y^2 = 20^2 \text{ và } x^2 + (y - 30)^2 = 15^2. \text{ Gọi } A, B \text{ là các giao điểm của hai đường tròn đó.}$$

Tọa độ A, B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20^2 \\ x^2 + (y - 30)^2 = 15^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{5\sqrt{455}}{12} \\ y = \frac{215}{12} \end{cases}$.

Tổng diện tích hai đường tròn là $\pi(20^2 + 15^2) = 625\pi$ (mét vuông).

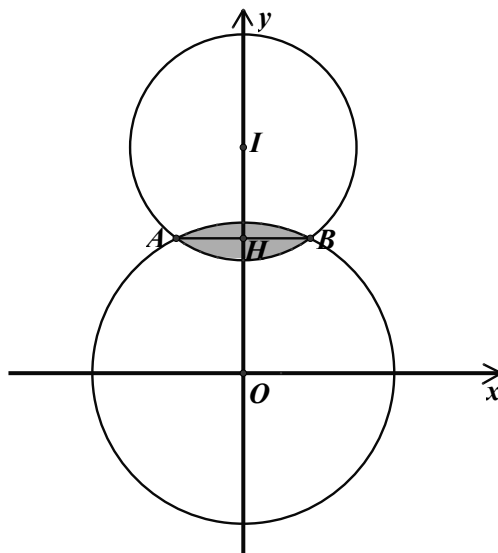
Phần giao của hai hình tròn chính là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = 30 - \sqrt{15^2 - x^2}$ và $y = \sqrt{20^2 - x^2}$. Do đó diện tích phần giao giữa hai hình tròn là

$$S = \int_{-\frac{5\sqrt{455}}{12}}^{\frac{5\sqrt{455}}{12}} (\sqrt{20^2 - x^2} + \sqrt{15^2 - x^2} - 30) dx \approx 60,2546 \text{ (mét vuông)}.$$

Số tiền để làm phần giao giữa hai hình tròn là $300.000 \times 60,2546 \approx 18.076.386$ (đồng).

Số tiền để làm phần còn lại là $100.000 \times (625\pi - 2 \times 60,2546) = 184.299.220$ (đồng).

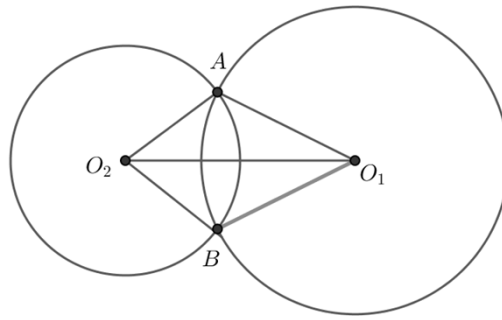
Vậy tổng số tiền làm sân khấu là $184.299.220 + 18.076.386 \approx 202.375.606$ (đồng).



Câu 9. (Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

- A.** 218 triệu đồng. **B.** 202 triệu đồng.
C. 200 triệu đồng. **D.** 218 triệu đồng.

Lời giải



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn bán kính 20 m và 15 m. A, B là hai giao điểm của hai đường tròn.

Ta có $O_1A = O_1B = 20$ m; $O_2A = O_2B = 15$ m; $O_1O_2 = 30$ m.

$$\cos \widehat{BO_1O_2} = \frac{O_1B^2 + O_1O_2^2 - O_2B^2}{2O_1B \cdot O_1O_2} = \frac{43}{48} \Rightarrow \widehat{BO_1O_2} \approx 26^\circ 23'.$$

Theo tính chất hai đường tròn cắt nhau ta có O_1O_2 là tia phân giác $\widehat{AO_1B}$

$$\Rightarrow \widehat{AO_1B} = 2\widehat{BO_1O_2} = 52,77^\circ.$$

Suy ra diện tích hình quạt tròn O_1AB là $S_{O_1AB} = \pi \cdot 20^2 \cdot \frac{52,77}{360} \approx 184,2 \text{ (m}^2\text{)}.$

$$S_{\Delta O_1AB} = \frac{1}{2} O_1A \cdot O_1B \cdot \sin \widehat{AO_1B} \approx 159,2 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Gọi S_1 là diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung \widehat{AmB} trong đường tròn (O_1) .

$$\Rightarrow S_1 = S_{O_1AB} - S_{\Delta O_1AB} = 25 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Chứng minh tương tự ta được diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung \widehat{AmB} trong đường tròn (O_2) là $S_2 \approx 35 \text{ (m}^2\text{)}.$

Suy ra diện tích phần giao nhau là $S = S_1 + S_2 = 60 \text{ (m}^2\text{)}.$

\Rightarrow Chi phí làm sân khấu phần giao nhau $60 \cdot 300\,000 = 18\,000\,000$ (nghìn đồng).

Tổng diện tích của hai hình tròn là $S' = \pi 20^2 + \pi 15^2 \approx 1963 \text{ (m}^2\text{)}.$

Diện tích phần không giao nhau là $S' - S = 1903 \text{ (m}^2\text{)}.$

\Rightarrow Chi phí làm sân khấu phần không giao nhau $1903 \cdot 100\,000 = 190\,300\,000$ (nghìn đồng).

Số tiền làm mặt sân là $18\,000\,000 + 190\,300\,000 = 208\,300\,000$ (nghìn đồng)

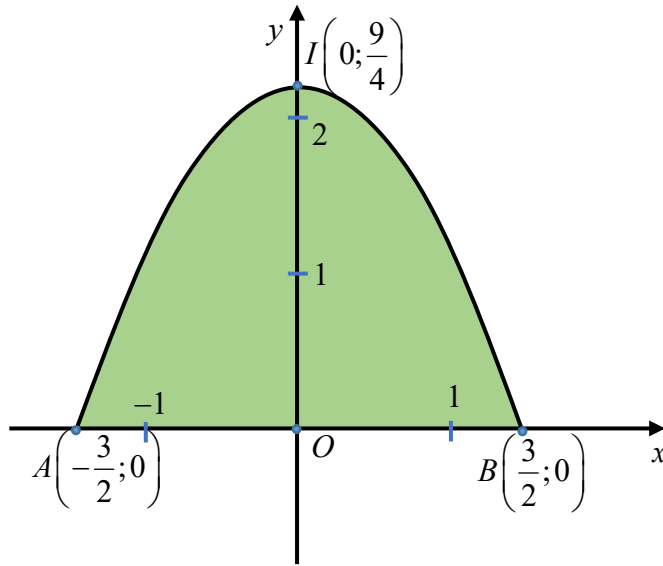
$= 208,3$ (triệu đồng).

Câu 10. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. B. 3750000 đồng. C. 12750000 đồng. **D. 6750000 đồng.**

Lời giải

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

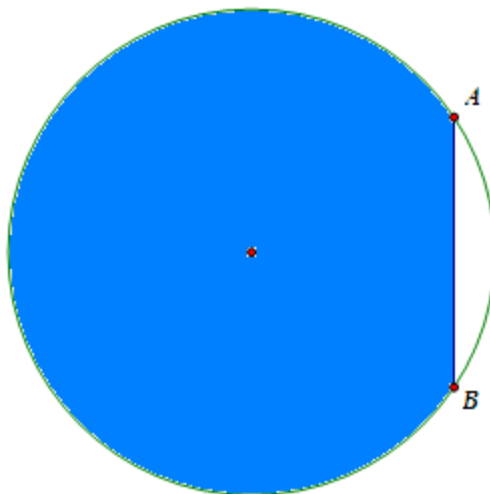
Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích của parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = 2 \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2.$$

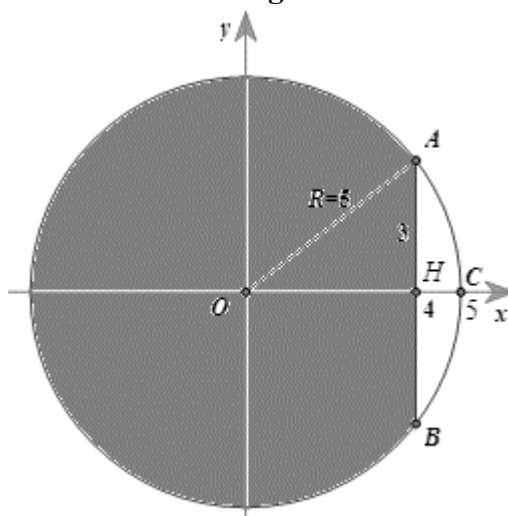
Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng.

Câu 11. (THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2018) Một người có miếng đất hình tròn có bán kính bằng 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên cần có 1 khoảng trống để dựng 1 cái chòi và để đồ dùng nên người này bớt lại 1 phần đất nhỏ không trồng cây (phần màu trắng như hình vẽ), trong đó $AB = 6m$. Hỏi khi thu hoạch cây thì người này thu được bao nhiêu tiền ?



- A. 3722 nghìn đồng. **D. 7445 nghìn đồng.** C. 7446 nghìn đồng. B. 3723 nghìn đồng.

Lời giải



Diện tích miếng đất là $S_1 = \pi R^2 = 25\pi$ (m²).

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Ta có phương trình của đường tròn biên là $x^2 + y^2 = 25$.

$$R = 5, AH = 3 \Rightarrow OH = 4.$$

\Rightarrow Phương trình của cung tròn nhỏ \widehat{AC} là $y = \sqrt{25 - x^2}$, với $4 \leq x \leq 5$.

\Rightarrow Diện tích phần đất trồng là $S_2 = 2 \int_4^5 \sqrt{25 - x^2} dx$ (m²).

\Rightarrow Diện tích phần đất trồng cây là $S = S_1 - S_2 = 25\pi - 2 \int_4^5 \sqrt{25 - x^2} dx$.

\Rightarrow Số tiền thu được là $T = 100S = 100(25\pi - 2 \int_4^5 \sqrt{25 - x^2} dx) \approx 7445$ (nghìn đồng).

Câu 12. (THPT Yên Lạc - 2018) Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100(m) và trục nhỏ bằng 80(m) được chia làm hai phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m² trồng cây con và 4000 mỗi m² trồng rau. Hỏi thu nhập của cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến phần nghìn).

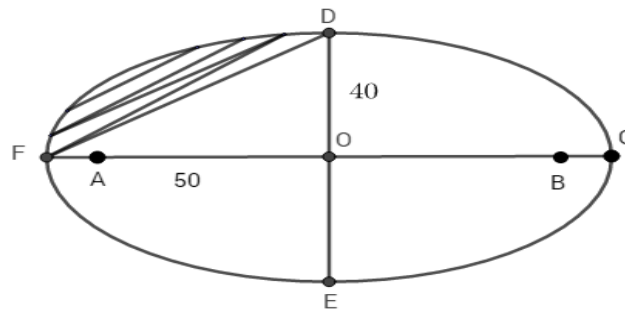
A. 31904000.

B. 23991000.

C. 10566000.

D. 17635000.

Lời giải



Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết, ta có $2a = 100 \Rightarrow a = 50$; $2b = 80 \Rightarrow b = 40$.

Diện tích phần trồng cây con (phần gạch sọc) bằng $\frac{1}{4}$ diện tích của elip trừ đi diện tích tam giác

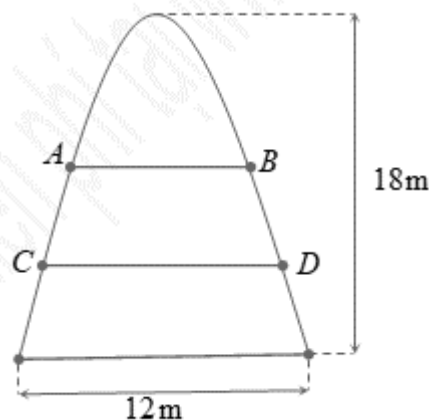
DOF . Do đó diện tích phần trồng cây con là $S_1 = \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}$ (m²).

Diện tích phần trồng rau (phần không gạch sọc) bằng $\frac{3}{4}$ diện tích elip cộng với diện tích tam giác

DOF . Do đó diện tích phần trồng rau là $S_2 = \frac{3\pi ab}{4} + \frac{ab}{2}$ (m²).

Thu nhập của cả mảnh vườn là $\left(\frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}\right) \cdot 2000 + \left(\frac{3\pi ab}{4} + \frac{ab}{2}\right) \cdot 4000 \approx 23991000$.

Câu 13. (Chuyên Vinh - 2018) Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

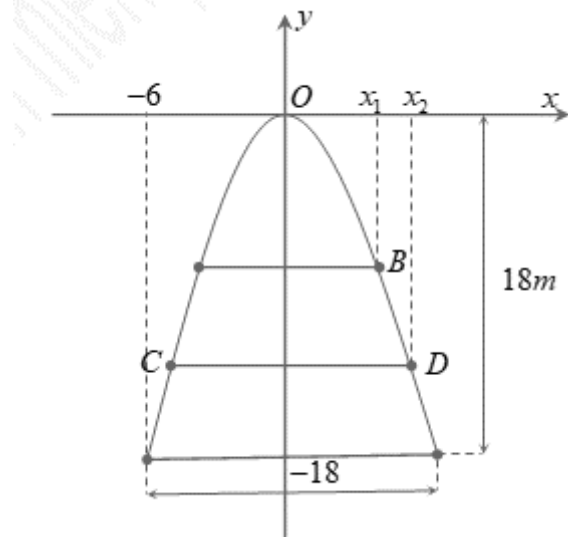
B. $\frac{4}{5}$.

C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

D. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

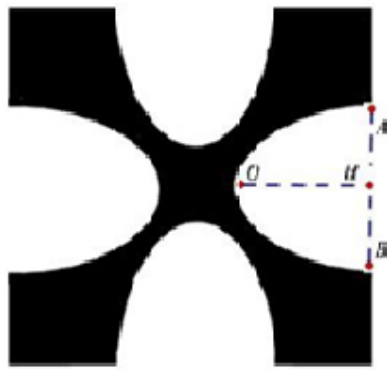
$$S_1 = 2 \int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD: y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2 \int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x \right) \Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 14. (THPT Kinh Môn - 2018) Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



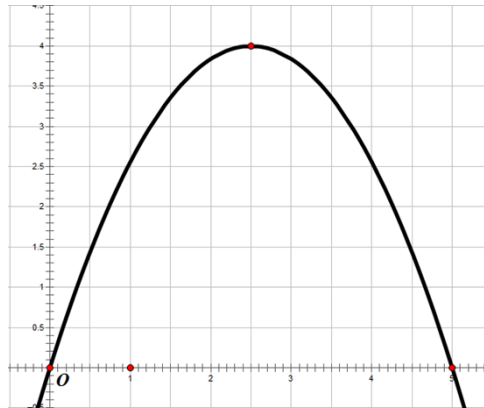
A. $\frac{160}{3} \text{ cm}^2$.

B. $\frac{140}{3} \text{ cm}^2$.

C. $\frac{14}{3} \text{ cm}^2$.

D. 50 cm^2 .

Lời giải



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$,

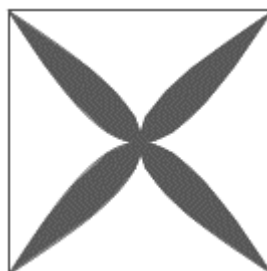
$$x = 5 \text{ là: } S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x \right) dx = \frac{40}{3}.$$

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3} \text{ cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100 \text{ cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3} \text{ cm}^2$.

Câu 15. (Chuyên Vinh - 2018) Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm . Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ bên).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

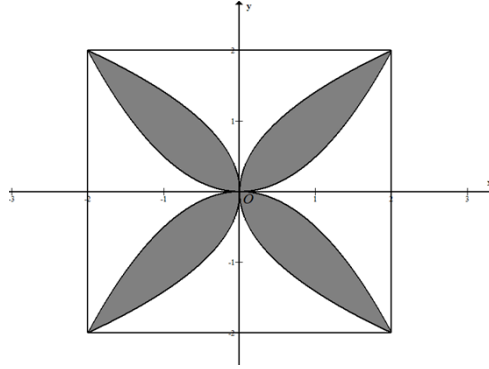
A. 800 cm^2 .

B. $\frac{800}{3}\text{ cm}^2$.

C. $\frac{400}{3}\text{ cm}^2$.

D. 250 cm^2 .

Lời giải



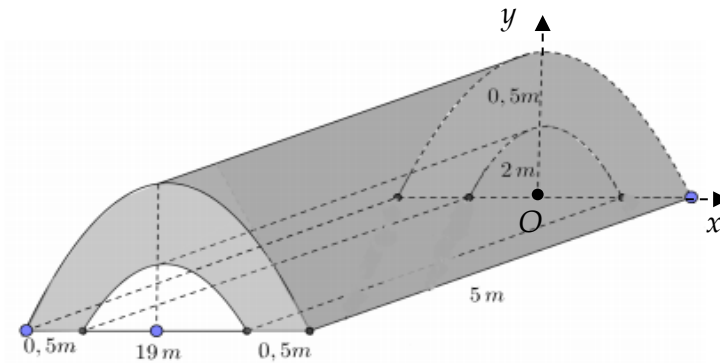
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10\text{ cm} = 1\text{ dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}$, $x = -\frac{y^2}{2}$, $x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2) = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2).$$

Câu 16. (THPT Cẩm Giàng 2 -2019) Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



A. 19 m^3 .

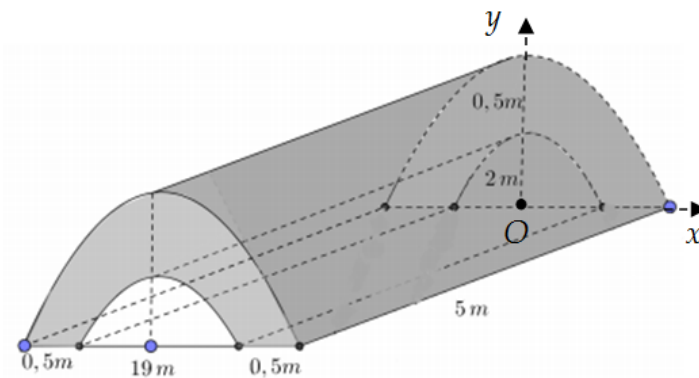
B. 21 m^3 .

C. 18 m^3 .

D. 40 m^3 .

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a_1 \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2.$$

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a_2 \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}.$$

Ta có thể tích của bê tông là:
$$V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right) dx \right] = 40 m^3.$$

Câu 17. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

A. $30 m^3$

B. $36 m^3$

C. $40 m^3$

D. $41 m^3$

Lời giải

Chọn B

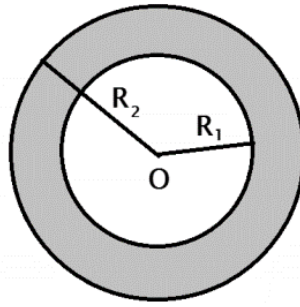
Giả sử nền trại là hình chữ nhật ABCD có $AB = 3$ mét, $BC = 6$ mét, đỉnh của parabol là I. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B và I, phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + b, a \neq 0$. Do I, A, B thuộc nên ta có $y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

$$V = 6.2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{3}x^2 + 3\right) dx = 36$$

Câu 18. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Săm lốp xe ô tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20cm$, bán kính đường tròn

lớn $R_2 = 30\text{cm}$ và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ sẫm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong sẫm.



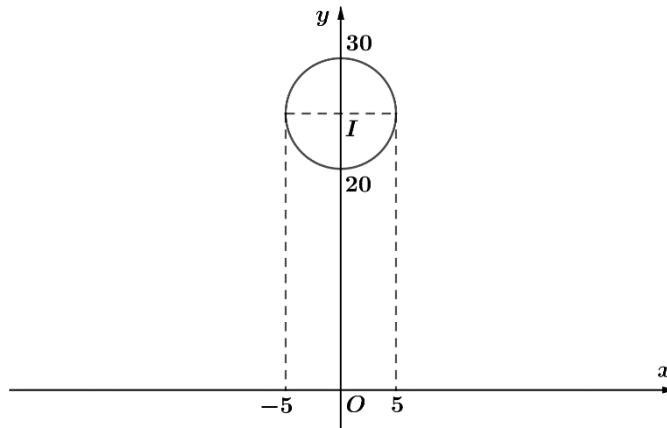
A. $1250\pi^2\text{cm}^3$.

B. $1400\pi^2\text{cm}^3$.

C. $2500\pi^2\text{cm}^3$.

D. $600\pi^2\text{cm}^3$.

Lời giải



Thể tích sẫm xe bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình tròn tâm $I(0; 25)$ bán kính bằng 5 quay quanh trục Ox .

Ta có phương trình đường tròn là $x^2 + (y - 25)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 25 + \sqrt{25 - x^2} \\ y = 25 - \sqrt{25 - x^2} \end{cases}, x \in [-5; 5]$.

Vậy $V = \pi \cdot \left[\int_{-5}^5 (25 + \sqrt{25 - x^2})^2 dx - \int_{-5}^5 (25 - \sqrt{25 - x^2})^2 dx \right] = 100\pi \cdot \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$.

Ta có $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$ là diện tích nửa hình tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính bằng 5

$\Rightarrow \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25\pi}{2}$.

Suy ra $V = 100\pi \cdot \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = 100\pi \cdot \frac{25\pi}{2} = 1250\pi^2\text{cm}^3$

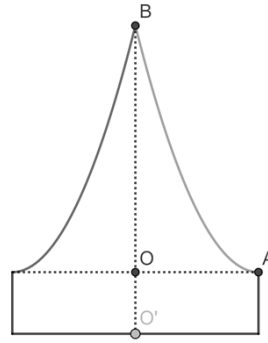
Chú ý: Có thể bấm máy tích phân, ta được

$V = \pi \left[\int_{-5}^5 (25 + \sqrt{25 - x^2})^2 dx - \int_{-5}^5 (25 - \sqrt{25 - x^2})^2 dx \right] \approx 3927\pi\text{cm}^3$.

Kiểm tra các đáp án ta chọn đáp án **A.**

Câu 19. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc

mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\frac{2750\pi}{3}$ (cm³)

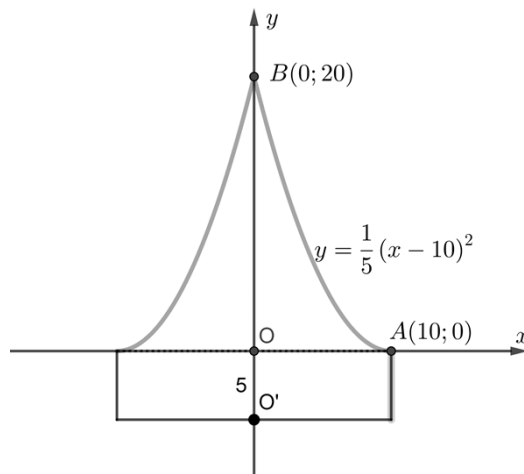
B. $\frac{2500\pi}{3}$ (cm³)

C. $\frac{2050\pi}{3}$ (cm³)

D. $\frac{2250\pi}{3}$ (cm³)

Lời giải

Chọn B



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1 .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2 .

Ta có $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = 5 \cdot 10^2 \pi = 500\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x - 10)^2$.

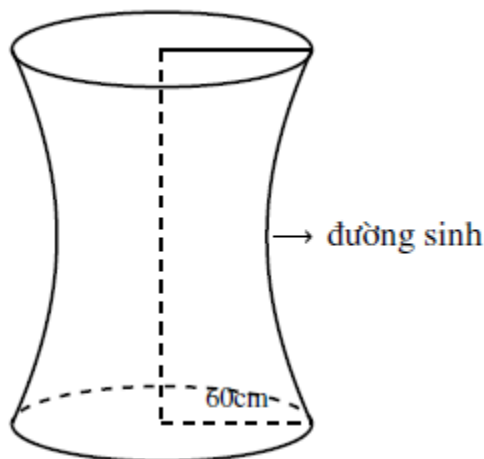
Vì (P) qua điểm $B(0; 20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x - 10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

$$\text{Suy ra } V_2 = \pi \int_0^{20} (10 - \sqrt{5y})^2 dy = \pi \left(3000 - \frac{8000}{3} \right) = \frac{1000}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Do đó } V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3} \pi + 500\pi = \frac{2500}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

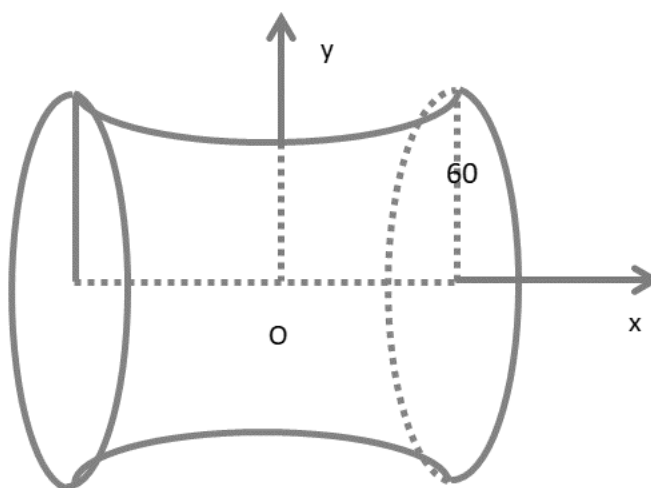
Câu 20. Cho chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nửa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của chiếc trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



- A. $V = 344963 \text{ cm}^3$ B. $V = 344964 \text{ cm}^3$ C. $V = 208347 \text{ cm}^3$ D. $V = 208346 \text{ cm}^3$

Lời giải

Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ (trục hoành là trục của chiếc trống, gốc tọa độ là trung điểm của đường cao chiếc trống, đơn vị: dm).



Gọi (E) là elip có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ thì ảnh của (E) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(0; 6)$

là elip (E') có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$.

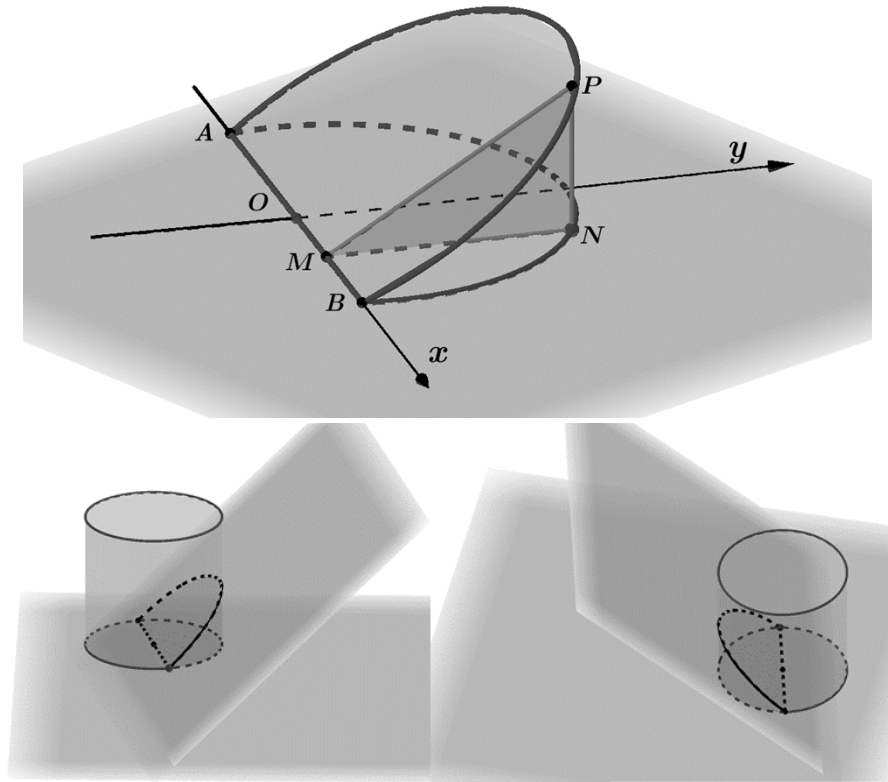
Suy ra, phương trình của đường sinh là: $y = 6 - \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}$.

Do đó, thể tích của chiếc trống là: $V = \pi \int_{-4}^4 \left(6 - \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)^2 dx \approx 344,964 \text{ (dm}^3\text{)}.$

Câu 21. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R . Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2 , với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng?

- A.** $V_1 = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$. **B.** $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. **C.** $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$. **D.** $V_1 = \frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

Lời giải



Khi cắt khối gỗ hình trụ ta được một hình nêm có thể tích V_1 như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Nửa đường tròn đường kính AB có phương trình là $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R; R]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x , cắt hình nêm theo thiết diện là $\triangle MNP$ vuông tại N và có $\widehat{PMN} = 30^\circ$.

Ta có $NM = y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow NP = MN \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{3}}$.

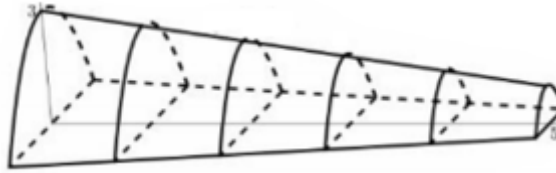
$\triangle MNP$ có diện tích $S(x) = \frac{1}{2} NM \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}}$.

Thể tích hình nêm là $V_1 = \int_{-R}^R S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-R}^R = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$.

* **Chú ý:** Có thể ghi nhớ công thức tính thể tích hình nêm:

$$V_1 = \frac{2}{3}R^2h = \frac{2}{3}R^3 \tan \alpha, \text{ trong đó } R = \frac{AB}{2}, \alpha = \widehat{PMN}.$$

Câu 22. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Cho một mô hình 3-D mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 (cm); khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



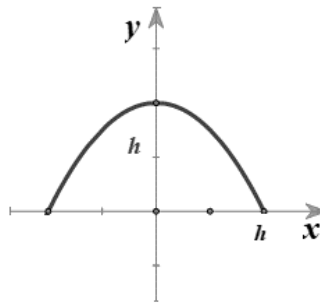
A. 29.

B. 27.

C. 31.

D. 33.

Lời giải



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

Parabol (P) có phương trình $(P): y = ax^2 + h, (a < 0)$

Có $B(h;0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h} (do h > 0)$

Diện tích S của thiết diện: $S = \int_{-h}^h \left(-\frac{1}{h}x^2 + h \right) dx = \frac{4h^2}{3}, h = 3 - \frac{2}{5}x$

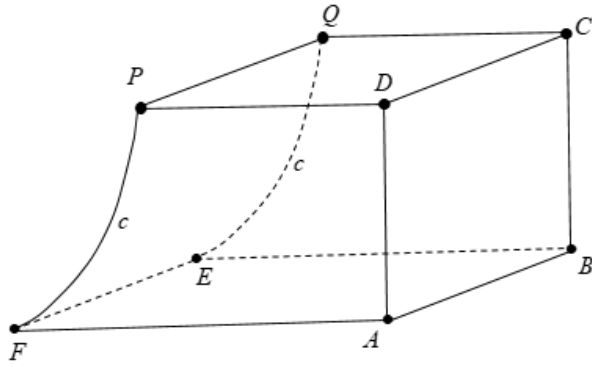
$$\Rightarrow S(x) = \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2$$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$$\Rightarrow V = \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2 dx \approx 28,888$$

$$\Rightarrow V \approx 29 (\text{cm}^3)$$

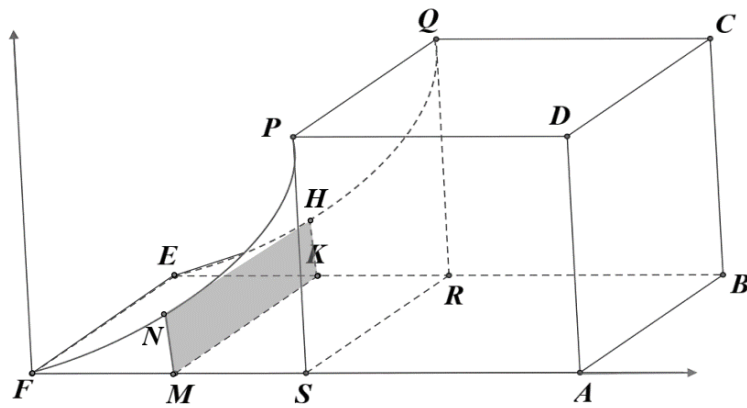
Câu 23. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5\text{ cm}$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5\text{ cm}$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF . Thể tích của chi tiết máy bằng

- A. $\frac{395}{24}\text{ cm}^3$. B. $\frac{50}{3}\text{ cm}^3$. C. $\frac{125}{8}\text{ cm}^3$. D. $\frac{425}{24}\text{ cm}^3$.

Lời giải



Gọi hình chiếu của P, Q trên AF và BE là R và S . Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5\text{ cm}$, thể tích $V_1 = \frac{125}{8}\text{ cm}^3$ và phần còn lại có thể tích V_2 . Khi đó thể tích vật thể $V = V_1 + V_2 = \frac{125}{8} + V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F , Ox trùng với FA , Oy trùng với tia Fy song song với AD . Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P\left(1; \frac{5}{2}\right)$ do đó

$$a = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x^2.$$

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x; 0; 0), 0 \leq x \leq 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNKH$ có cạnh là $MN = \frac{5}{2}x^2$ và $MK = \frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x) = \frac{25}{4}x^2$

$$\text{Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có } V_2 = \int_0^1 \frac{25}{4}x^2 dx = \frac{25}{12}$$

$$\text{Từ đó } V = \frac{125}{8} + \frac{25}{12} = \frac{425}{24} \text{ cm}^3$$

Câu 24. (THPT Lục Ngạn 2018) Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm. Biết cứ 1000 cm³ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

- A.** 183000 đồng. **B.** 180000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

Lời giải

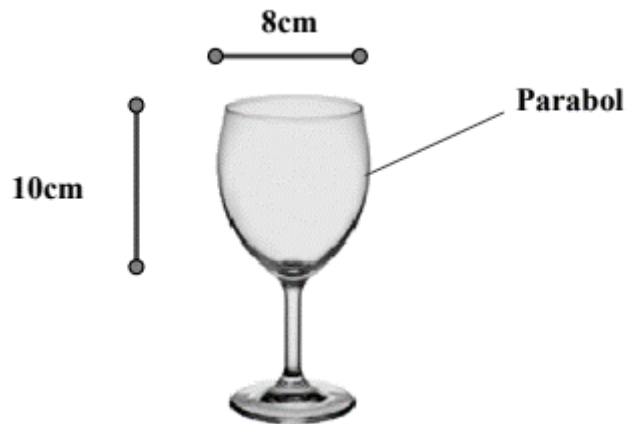
Đường elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm có phương trình $+\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1$

$$\Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm \frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó thể tích quả dưa là } V &= \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \int_{-14}^{14} \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right)^2 dx \\ &= \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 14^2}\right) \Big|_{-14}^{14} = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{56}{3} = \frac{8750\pi}{3} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

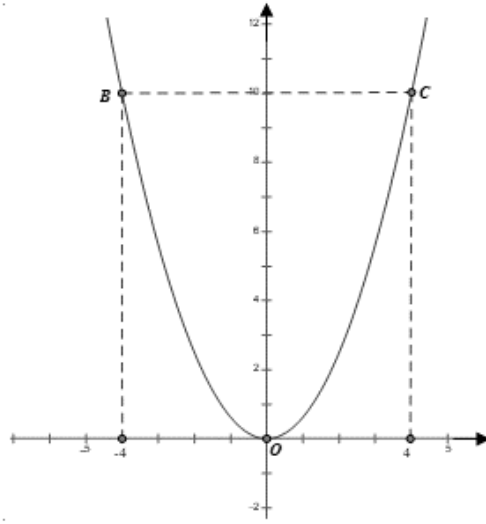
Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259$ đồng.

Câu 25. (THPT Thực Hành - TPHCM - 2018) Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bỏ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân)



- A.** $V \approx 320 \text{ cm}^3$. **B.** $V \approx 1005,31 \text{ cm}^3$. **C.** $V \approx 251,33 \text{ cm}^3$. **D.** $V \approx 502,65 \text{ cm}^3$.

Lời giải

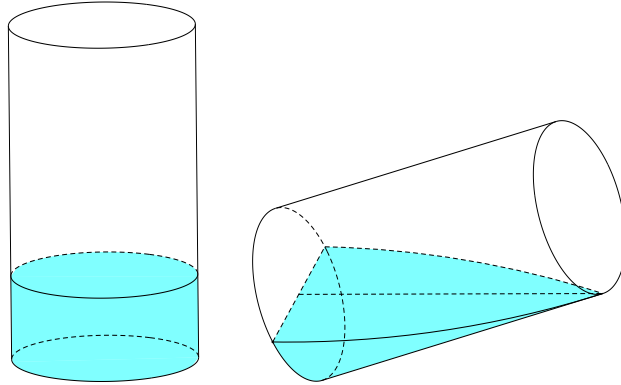


Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc:

$$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y\right) dy \approx 251,33.$$

Câu 26. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018) Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6cm, chiều cao lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



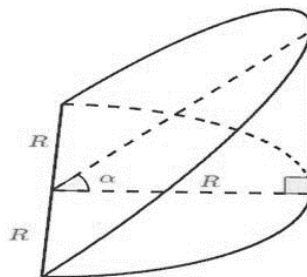
A. 240cm^3 .

B. $240\pi\text{cm}^3$.

C. 120cm^3 .

D. $120\pi\text{cm}^3$.

Lời giải



Cách 1. Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

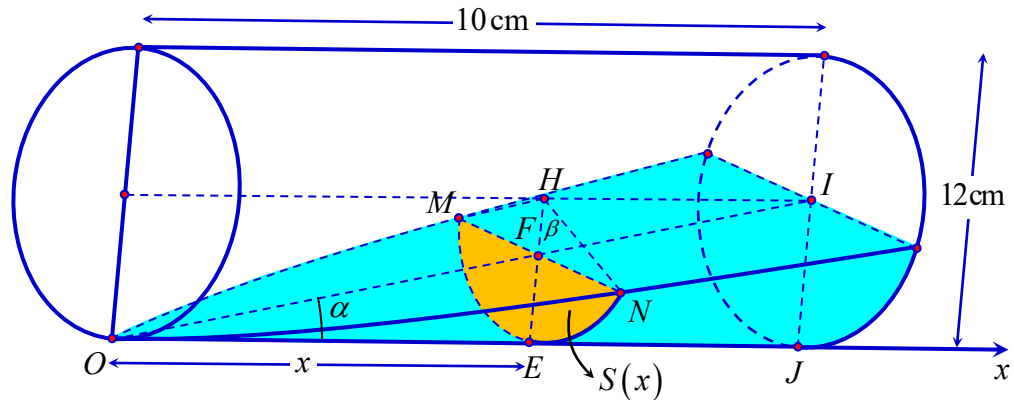
$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha.$$

$$\text{Thể tích hình cái nêm là: } V = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha .$$

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên $V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha .$

$$\Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = 240 \text{ cm}^3 .$$

Cách 2. Dụng hệ trục tọa độ $Oxyz$



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h \geq x \geq 0$.

Gọi $\widehat{IOJ} = \alpha, \widehat{FHN} = \beta, OE = x$

$$\tan \alpha = \frac{IJ}{OJ} = \frac{6}{10} = \frac{EF}{OE} \Rightarrow EF = \frac{6x}{10} \Rightarrow HF = 6 - \frac{6x}{10} .$$

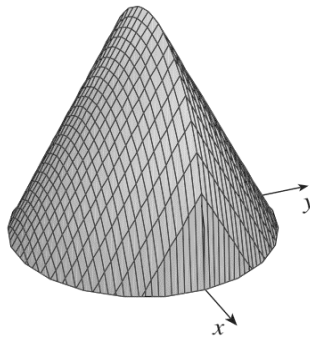
$$\cos \beta = \frac{HF}{HN} = \frac{6 - \frac{6x}{10}}{6} = 1 - \frac{x}{10}; \beta = \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right)$$

$$S(x) = S_{(\text{hình quạt})} - S_{HMN} = \frac{1}{2} HN^2 \cdot 2\beta - \frac{1}{2} HM \cdot HN \cdot \sin 2\beta$$

$$\Rightarrow S(x) = 6^2 \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^{10} S(x) dx = \int_0^{10} \left(36 \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right) - 36 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2} \right) dx = 240 .$$

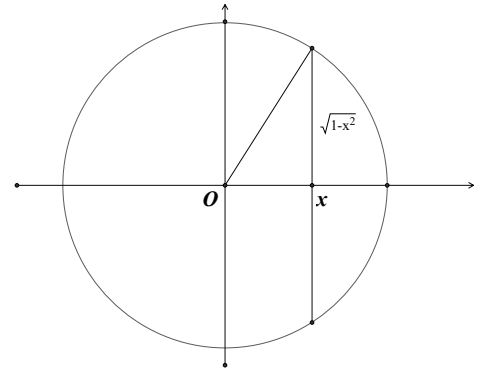
Câu 27. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu -- 2018) Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



- A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = 3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \pi$.

Lời giải

Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O .



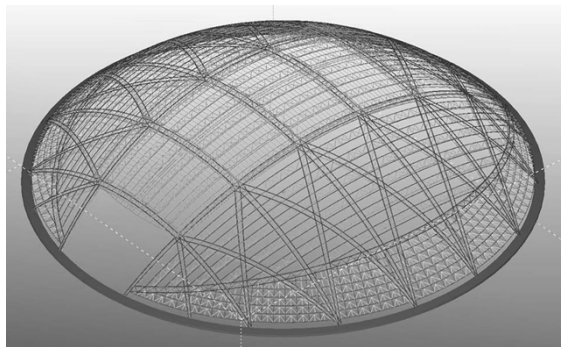
Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1-x^2}$.

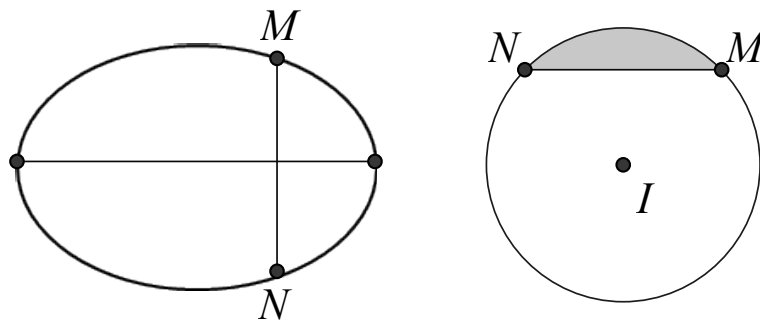
Diện tích tam giác thiết diện là: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = (1-x^2)\sqrt{3}$.

Thể tích khối cần tìm là:

$$V = 2 \int_0^1 S dx = 2 \int_0^1 \sqrt{3} (1-x^2) = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 28. (THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018) Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình 3). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình 3) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?





Hình 3

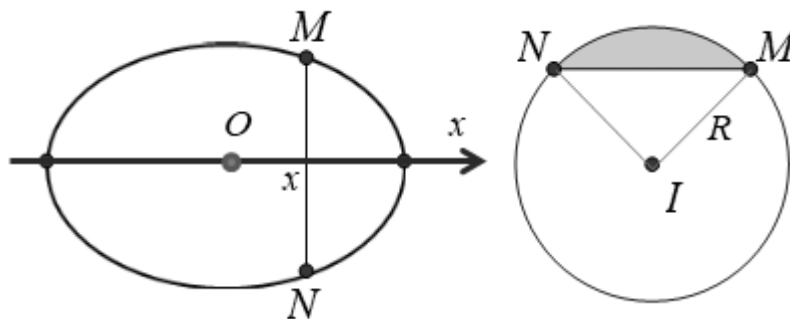
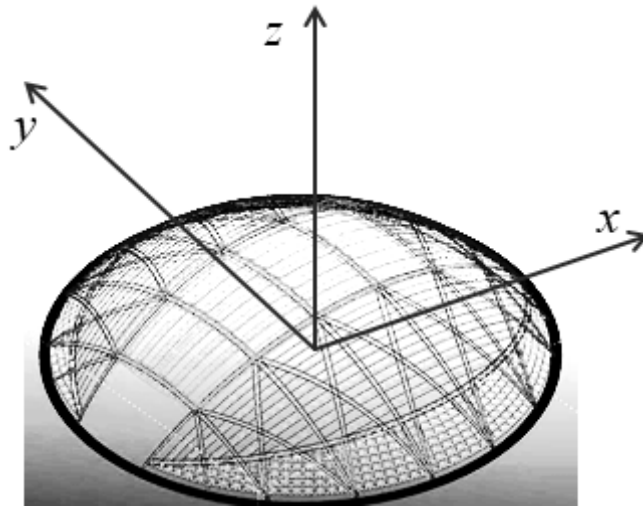
A. $57793m^3$.

B. $115586m^3$.

C. $32162m^3$.

D. $101793m^3$.

Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d(O, MN) = x$

$$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$$

$$\text{Lúc đó } MN = 2y = 2\sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)$$

$$S(x) = \frac{1}{4} \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 = \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2}\right) R^2 = (\pi - 2) \frac{2025}{2} \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Thể tích khoảng không cần tìm là

$$V = \int_{-75}^{75} (\pi - 2) \frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) \approx 115586m^3.$$

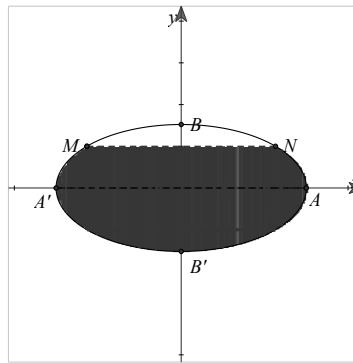
Câu 29. (Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018) Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng 0,8m, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6m. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).



- A.** $V = 1,52m^3$. **B.** $V = 1,31m^3$. **C.** $V = 1,27m^3$. **D.** $V = 1,19m^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1 = \pi ab = \pi \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN .

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6m nên ta

có phương trình của đường thẳng MN là $y = \frac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$ ta có $y = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$.

Do đường thẳng $y = \frac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2 = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(\frac{4}{5} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} - \frac{1}{5} \right) dx = \frac{4}{5} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{10}.$$

$$\text{Tính } I = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{2} \sin t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận: Khi } x = \frac{-\sqrt{3}}{4} \text{ thì } t = -\frac{\pi}{3}; \text{ Khi } x = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ thì } t = \frac{\pi}{3}.$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos^2 t dt = \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$\text{Vậy } S_2 = \frac{4}{5} \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{\pi}{15} - \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

$$\text{Thể tích của dầu trong thùng là } V = \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{15} + \frac{\sqrt{3}}{20} \right) \cdot 3 = 1,52.$$

Câu 30. (Sở Yên Bái - 2018) Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước.

Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

- A.** 2 giờ 36 giây. **B.** 2 giờ 34 giây. **C.** 2 giờ 35 giây. **D.** 2 giờ 36 giây.

Lời giải

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể (x tính bằng giây).

$$\text{Ta có: } \int_0^x \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3} dt = 210 \Rightarrow \frac{3}{4} (t+3)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^x = 105000 \Rightarrow (x+3)\sqrt[3]{x+3} - 3\sqrt[3]{3} = 140000$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+3)^4} = 3\sqrt[3]{3} + 140000 \Rightarrow x+3 = \sqrt[4]{(3\sqrt[3]{3} + 140000)^3} \Rightarrow x = \sqrt[4]{(3\sqrt[3]{3} + 140000)^3} - 3$$

$$\Rightarrow x \approx 7234,8256.$$

Câu 31. (THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh 2018) Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

- A.** $1458m^3$. **B.** $600m^3$. **C.** $2200m^3$. **D.** $4200m^3$.

Lời giải

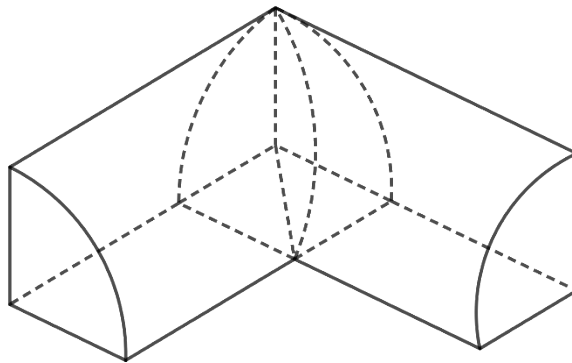
$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases}$. Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458 (m^3).$$

Câu 32. (Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020) Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a , hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H) .



A. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$.

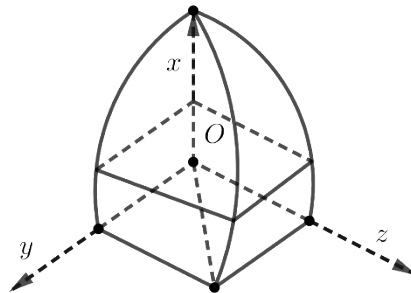
B. $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$.

D. $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



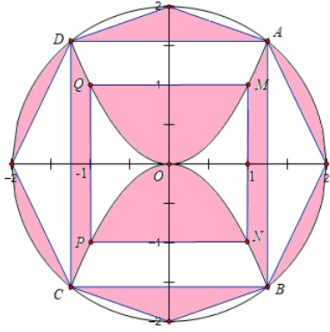
• Đặt hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, xét mặt cắt song song với mp (Oyz) cắt trục Ox tại x : thiết diện mặt cắt luôn là hình vuông có cạnh $\sqrt{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq a$).

• Do đó thiết diện mặt cắt có diện tích: $S(x) = a^2 - x^2$.

• Vậy $V_{(H)} = \int_0^a S(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \left(a^2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 33. (THPT Hương Sơn - Hà Tĩnh - 2022) Một biển quảng cáo có dạng hình tròn tâm O , phía trong được trang trí bởi hình chữ nhật $ABCD$; hình vuông $MNPQ$ có cạnh $MN = 2m$ và hai đường parabol đối

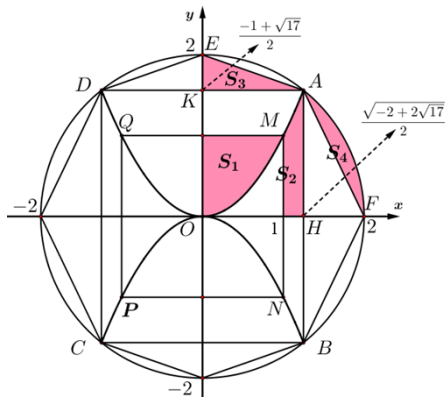
xúng nhau chung đỉnh O như hình vẽ. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 300.000 đồng/ m^2 và phần còn lại là 250.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



- A.** 3.439.000 đồng. **B.** 3.628.000 đồng. **C.** 3.580.000 đồng. **D.** 3.363.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Toạ độ các điểm A, B, C, D là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

Giải hệ ta được: $A\left(\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) \equiv (m; m^2)$.

Từ đó: phương trình đường thẳng $AE: y = \frac{m^2-2}{m}x + 2$; $AF: y = \frac{m^2}{m-2}(x-2)$.

Do đó:

$$+) S_1 = \int_0^1 (1-x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$+) S_2 = \int_1^m x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^m = \frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{3}.$$

$$+) S_3 = \int_0^m \left[\left(\frac{m^2-2}{m}x + 2 \right) - m^2 \right] dx = \frac{m^2-2}{m} \int_0^m (x-m) dx = \frac{m^2-2}{m} \left(\frac{x^2}{2} - mx \right) \Big|_0^m = -\frac{1}{2}m^3 + m.$$

$$+) S_4 = \int_m^2 \left[\sqrt{4-x^2} - \frac{m^2}{m-2}(x-2) \right] dx = \left[\left(\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin \frac{x}{2} \right) - \frac{m^2}{m-2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \right] \Big|_m^2$$

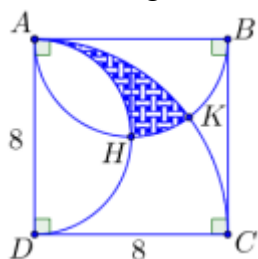
$$= \frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{2}m\sqrt{4-m^2} - m^2 - 2\text{arc sin} \frac{m}{2} + \pi.$$

$$\text{Suy ra: } S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}m\sqrt{4-m^2} - m^2 + m - 2\text{arc sin} \frac{m}{2} + \pi.$$

Vậy số tiền để sơn biển quảng cáo là:

$$250000 \cdot \pi 2^2 + 50000 \cdot 4(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \approx 3\,439\,191 \text{ đồng.}$$

Câu 34. (Sở Bắc Giang 2022) Một bức tường lớn kích thước $8m \times 8m$ trước đại sảnh của một toà biệt thự được sơn loại sơn đặc biệt. Người ta vẽ hai nửa đường tròn đường kính AD, AB cắt nhau tại H ; đường tròn tâm D , bán kính AD , cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K . Biết tam giác "cong" AHK được sơn màu xanh và các phần còn lại được sơn màu trắng (như hình vẽ) và một mét vuông sơn trắng, sơn xanh lần lượt có giá là 1 triệu đồng và 1,5 triệu đồng. Tính số tiền phải trả (làm tròn đến hàng ngàn).

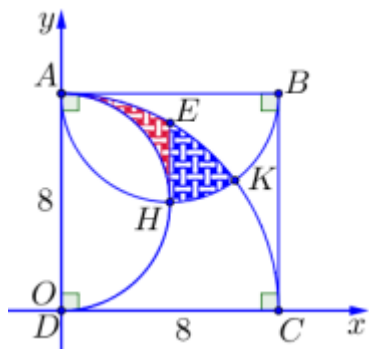


A. 60,567,000 (đồng). B. 70,405,000 (đồng).

C. 67,128,000 (đồng). D. 86,124,000 (đồng).

Lời giải

Chọn hệ toạ độ Oxy như hình vẽ sau



Để thấy cung AB có phương trình $y = f(x) = 8 - \sqrt{16 - (x-4)^2}$; cung AH có phương trình $y = g(x) = 4 + \sqrt{16 - x^2}$ và cung AC có phương trình $y = h(x) = \sqrt{64 - x^2}$. Để tìm được tọa độ các điểm $H(4;4)$ và $K\left(6,4;\frac{24}{5}\right)$.

Diện tích tam giác AHK là

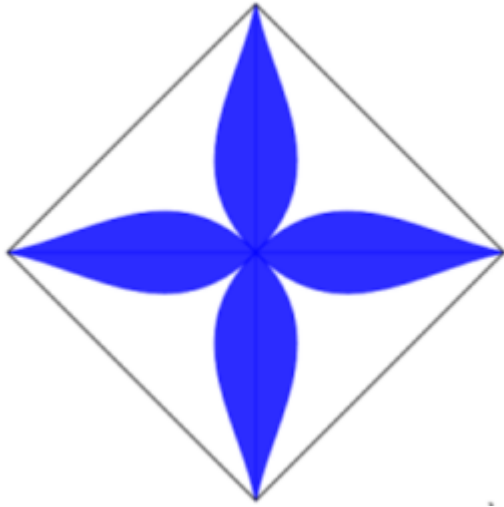
$$S = S_{AHE} + S_{HEK} = \int_0^4 (\sqrt{64-x^2} - 4 - \sqrt{16-x^2}) dx + \int_4^{6.4} (\sqrt{64-x^2} - 8 + \sqrt{16-(x-4)^2}) dx \approx 6,255085231.$$

Số tiền cần trả là $S \cdot 1,5 + (8^2 - S) \cdot 1 = 67,12754262$.

Vậy số tiền cần trả là 67,128,000 (đồng).

Câu 35. (THPT Bùi Thị Xuân – Huế - 2022) Một công ty có ý định thiết kế một logo hình vuông có độ dài nửa đường chéo bằng 4. Biểu tượng 4 chiếc lá (được tô màu) được tạo thành bởi các đường cong đối xứng với nhau qua tâm của hình vuông và qua các đường chéo.

Một trong số các đường cong ở nửa bên phải của logo là một phần của đồ thị hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 - x$ với hệ số $a < 0$. Để kỷ niệm ngày thành lập $2/3$, công ty thiết kế để tỉ số diện tích được tô màu so với phần không được tô màu bằng $\frac{2}{3}$. Tính $2a + 2b$



- A. $\frac{41}{80}$.
- B. $\frac{1}{2}$.
- C. $\frac{4}{5}$.
- D. $\frac{9}{10}$.

Lời giải

Ta có nửa đường chéo hình vuông có độ dài là 4, cạnh hình vuông sẽ là $4\sqrt{2}$ và diện tích hình vuông là 32, khi đó ta có được diện tích phần tô màu là $\frac{64}{5}$.

Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 - x$ là hàm số bậc ba biểu diễn đường cong trên logo.

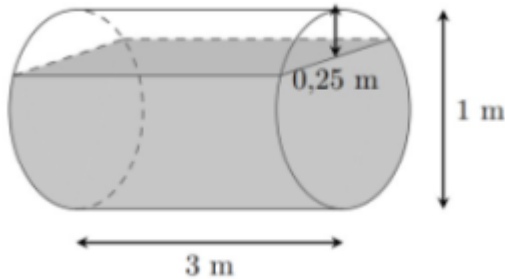
Ta có $x = 4$ là nghiệm của phương trình nên $64a + 16b - 4 = 0 \Leftrightarrow 4a + b = 1$ (1).

Ta có phương trình phương trình $f(x) = 0$ sẽ có các nghiệm là 0,4 và $a > 4$ vì $4a > 0$

$$\begin{aligned} \text{Nên } S &= \int_0^4 |ax^3 + bx^2 - x| dx = -\int_0^4 (ax^3 + bx^2 - x) dx \\ &= -\left(\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^4 = -64a - \frac{64}{3}b + 8 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow -64a - \frac{64}{3}b = \frac{-32}{5} \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 4a + b = 1 \\ -64a - \frac{64}{3}b = \frac{-32}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{20} \\ b = \frac{9}{20} \end{cases} \Rightarrow 2a + 2b = \frac{4}{5}.$$

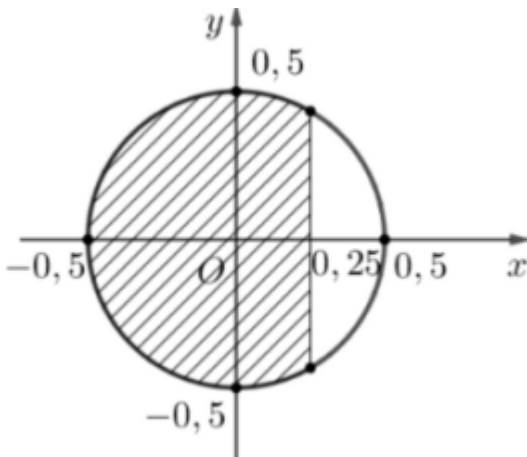
Câu 36. (THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội – 2022) Một téc nước hình trụ, đang chứa nước được đặt nằm ngang, có chiều dài $3m$ và đường kính đáy $1m$. Hiện tại mặt nước trong téc cách phía trên đỉnh của téc $0,25m$ (xem hình vẽ). Tính thể tích của nước trong téc (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?



- A. $1,768m^3$.
- B. $1,167m^3$
- C. $1,895m^3$.
- D. $1,896m^3$**

Lời giải

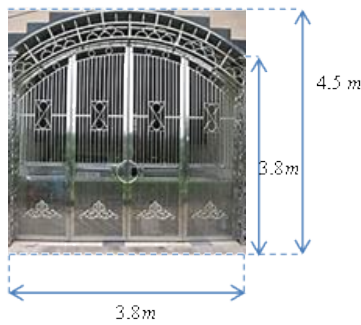
Thể tích phần dầu còn lại sẽ bằng diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình nhân với chiều dài của bồn (chiều cao của trụ).



Đường tròn có tâm $O(0;0)$, $R = 0,5$ có phương trình là $x^2 + y^2 = 0,25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{0,25 - x^2}$. Diện tích hình gạch sọc chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{0,25 - x^2}$; $y = -\sqrt{0,25 - x^2}$; $x = -0,5$; $x = 0,25$.

Do đó $V = S.h = 3 \int_{-0,5}^{0,25} \left(\sqrt{0,25 - x^2} - \left(-\sqrt{0,25 - x^2} \right) \right) dx \approx 1,896m^3$.

Câu 37. (Sở KonTum 2022) Ông X muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol, chất liệu làm là inox. Giá $1m^2$ vật tư và công làm là 1.300.000 đồng. Hỏi ông X phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).

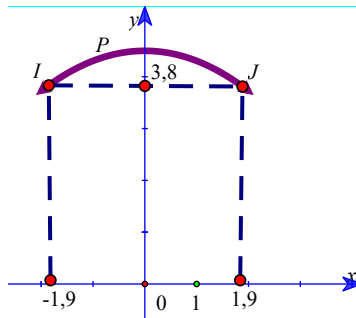


- A. 13.050.000 đồng. B. 36.630.000 đồng. C. 19.520.000 đồng. **D. 21.077.330 đồng.**

Lời giải

Chọn D

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $I\left(-\frac{19}{10}; \frac{19}{5}\right)$, $J\left(\frac{19}{10}; \frac{19}{5}\right)$.

Đường cong phía trên là một Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + b$, với $a; b \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm I, J và chiều cao cổng là $\frac{9}{2}m$ nên có $y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}$.

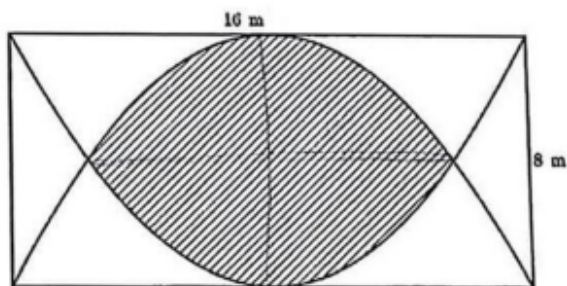
Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}$,

trục hoành và hai đường thẳng $x = -\frac{19}{10}$; $x = \frac{19}{10}$.

$$\text{Ta có } S = \int_{-\frac{19}{10}}^{\frac{19}{10}} \left(-\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2} \right) dx = \frac{1216}{75}.$$

Vậy ông X phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là: $\frac{1216}{75} \times 1.300.000 \approx 21.077.330$ (đồng).

Câu 38. (Sở Cần Thơ 2022) Ông Năm có một khu đất dạng hình chữ nhật với chiều dài là $16m$ và chiều rộng là $8m$. Ông Năm trồng rau sạch trên một mảnh vườn được giới hạn bởi hai parabol. Biết rằng mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của cạnh dài và đi qua hai điểm đầu mút của cạnh dài đối diện (phần gạch sọc như hình vẽ minh họa).



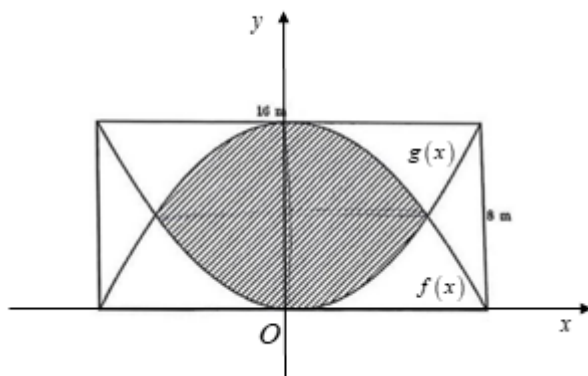
Biết chi phí để trồng rau là 45000 đồng/ m^2 . Hỏi ông Năm cần bao nhiêu tiền (làm tròn đến hàng nghìn) để trồng rau trên phần mảnh vườn đó?

- A. 2159000 đồng. **B. 2715000 đồng**
 C. 3322000 đồng. D. 1358 đồng.

Lời giải

Chọn B

Ta chọn hệ tọa độ như hình vẽ sau



Parabol có phương trình $y = f(x)$ có đỉnh là $(0; 8)$ và đi qua điểm $(8; 0)$ suy ra $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 8$.

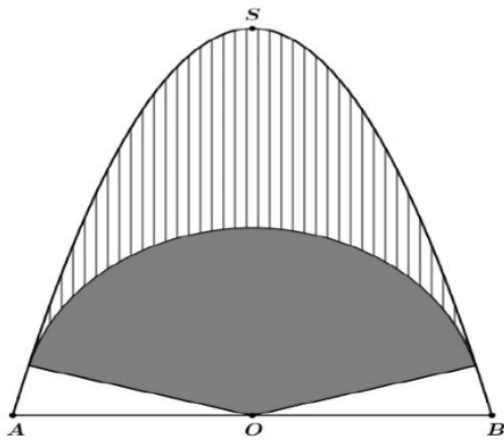
Parabol có phương trình $y = g(x)$ có đỉnh là $(0; 0)$ và đi qua điểm $(8; 8)$ suy ra $g(x) = \frac{1}{8}x^2$.

Xét phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \pm 4\sqrt{2}$.

Diện tích mảnh vườn là $S = \int_{-4\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{4}x^2 + 8 \right) dx$.

Vậy số tiền ông Năm cần là $S \cdot 45000 \approx 2715000$ (đồng).

Câu 39. (THPT Thanh Miện 2 - Hải Dương 2022) Trên bức tường cần trang trí một hình phẳng dạng parabol đỉnh S như hình vẽ, biết $OS = AB = 4m$, O là trung điểm của AB . Parabol trên được chia thành ba phần để sơn ba màu khác nhau với mức chi phí: phần trên kẻ sọc 140000 đồng/ m^2 , phần giữa hình quạt tâm O , bán kính $2m$ được tô đậm 150000 đồng/ m^2 , phần còn lại 160000 đồng/ m^2 . Tổng chi phí để sơn cả ba phần gần nhất với số nào sau đây?

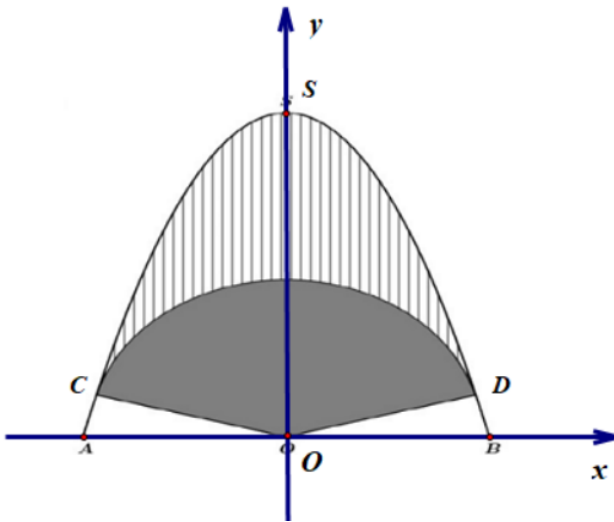


- A. 1.625.000 đồng. B. 1.600.000 đồng. C. 1.575.000 đồng. D. 1.597.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Gắn hệ tọa độ như hình vẽ.



Ta có: $O(0;0), A(-2;0), B(2;0), S(0;4)$.

Phương trình của parabol là: $y = -x^2 + 4$.

Phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 2$ là: $x^2 + y^2 = 4$.

Toạ độ giao điểm của parabol và đường tròn là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4 + (4 - x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Do đó, $C(-\sqrt{3};1), D(\sqrt{3};1)$.

Ta có: $\overrightarrow{OC} = (-\sqrt{3};1) \Rightarrow OC = 2$, $\overrightarrow{OD} = (\sqrt{3};1) \Rightarrow OD = 2$, $\overrightarrow{CD} = (2\sqrt{3};0) \Rightarrow CD = 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \cos \widehat{COD} = \frac{OC^2 + OD^2 - CD^2}{2 \cdot OC \cdot OD} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{COD} = \frac{2\pi}{3}$$

Diện tích của toàn bộ hình phẳng là: $S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3}$.

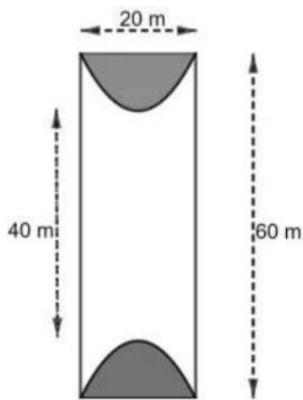
Diện tích hình quạt là: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot R^2 = \frac{4\pi}{3}$.

Diện tích phần kẻ sọc là: $S_1 = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (4 - x^2 - \sqrt{4 - x^2}) dx \approx 4,4714638\dots$

Diện tích phần còn lại là: $S_3 = S - S_1 - S_2 \approx 2,006412629\dots$

Vậy tổng chi phí là: $S_1 \cdot 140000 + S_2 \cdot 150000 + S_3 \cdot 160000 \approx 1.575.349$ đồng.

Câu 40. (Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình 2023) Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 60 m , chiều rộng 20 m . Người ta muốn trồng cỏ ở hai đầu của mảnh đất hai hình bằng nhau giới hạn bởi hai đường Parabol có hai đỉnh cách nhau 40 m (như hình vẽ bên). Phần còn lại của mảnh đất người ta lát gạch với chi phí là 200.000 đồng $/\text{m}^2$. Tính tổng số tiền để lát gạch (làm tròn đến hàng nghìn)

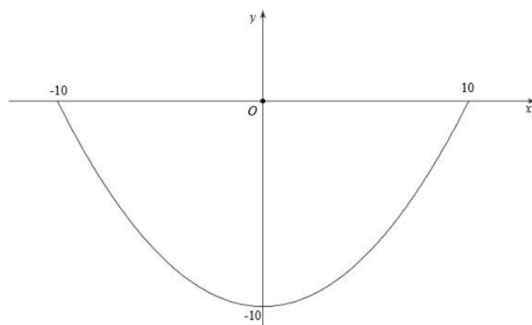


- A. 133.334.000 đồng.
- B. 186.667.000 đồng.**
- C. 53.334.000 đồng.
- D. 213.334.000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta suy ra chiều cao của một vùng mảnh đất trồng cỏ là 10 m . Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình parabol có dạng $y = a(x - 10)(x + 10)$.

Do điểm $(0; -10)$ thuộc đồ thị nên ta có $a = \frac{1}{10}$.

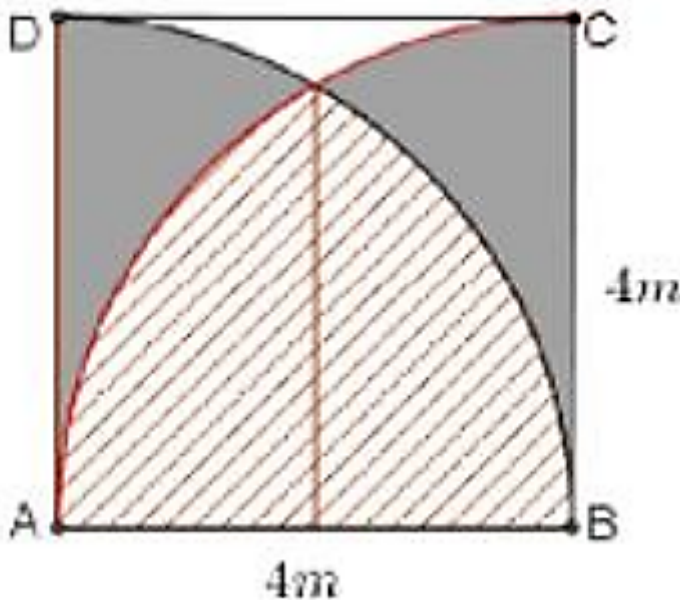
Suy ra $y = \frac{1}{10}(x-10)(x+10)$.

Diện tích phần trống cỏ là $S_1 = 2 \cdot \left| \int_{-10}^{10} \frac{1}{10}(x-10)(x+10)dx \right| = \frac{800}{3} (m^2)$.

Diện tích phần lát gạch là $S = 60 \cdot 20 - S_1 = \frac{2800}{3} (m^2)$.

Tổng số tiền để lát gạch $T = S_1 \cdot 200000 \approx 186.667.000$ đồng.

Câu 41. (THPT Kiến Thụy- Hải Phòng- 2023) Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 4m$. Trên tấm biển đó có các đường tròn tâm A và đường tròn tâm B cùng bán kính $R = 4m$, hai đường tròn cắt nhau như hình vẽ. Chi phí để sơn phần gạch chéo là 150000 đồng $/m^2$, chi phí sơn màu đen là 100000 đồng $/m^2$, chi phí để sơn phần còn lại là 250000 đồng $/m^2$

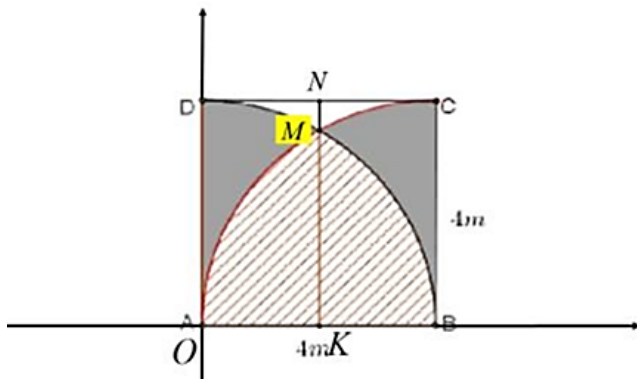


Hỏi số tiền để sơn bảng quảng cáo theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

- A. 3,017 triệu đồng.
- B. 1,213 triệu đồng.
- C. 2,06 triệu đồng.
- D. 2,195 triệu đồng.

Lời giải

Đưa biển quảng cáo vào trong hệ trục Oxy như hình vẽ trên. Khi đó:



Gọi (C_1) là đường tròn tâm A bán kính $R_1 = 4$ thì $(C_1): x^2 + y^2 = 4^2$

Gọi (C_2) là đường tròn tâm B bán kính $R_2 = 4$ thì $(C_2): (x-4)^2 + y^2 = 4^2$

*Nhận xét: Cả hai phần đường tròn trong hình vẽ đều là hai phần đường tròn phía trên nên:

Phương trình biểu diễn cung \widehat{AC} là $y = \sqrt{16 - (x-4)^2}$

Phương trình biểu diễn cung \widehat{DB} là $y = \sqrt{16 - x^2}$

Xét $\sqrt{16 - (x-4)^2} = \sqrt{16 - x^2} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow K = (2; 0)$. Vậy đường NK chia biên quảng cáo thành hai phần đối xứng.

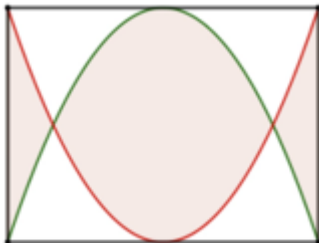
Diện tích phần gạch sọc là: $S_1 = 2 \left(\int_0^2 \sqrt{16 - (x-4)^2} dx \right) = A$

Diện tích phần tô đen là: $S_2 = 2 \left(\int_0^2 \left| \sqrt{16 - x^2} - \sqrt{16 - (x-4)^2} \right| dx \right) = B$

Diện tích phần còn lại là: $S_3 = S_{ABCD} - (S_1 + S_2) = 16 - (A + B) = C$

Vậy số tiền để sơn biên quảng cáo là $A.150000 + B.100000 + C.250000 \approx 2195480$ đồng.

Câu 42. (Liên trường Nghệ An - Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Thái Hòa 2023) Ông A trồng hoa cảnh trên khuôn viên đất ở trong vườn là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol và hình chữ nhật có chiều rộng $6m$ và chiều dài $8m$ (phần tô đậm trong hình vẽ dưới), các đỉnh của parabol là điểm chính giữa các cạnh chiều dài hình chữ nhật. Biết chi phí trồng hoa cảnh xong là 500000 đồng $1m^2$. Tổng chi phí mà ông A phải trả để trồng xong vườn hoa cảnh là



A. 16929251 đồng.

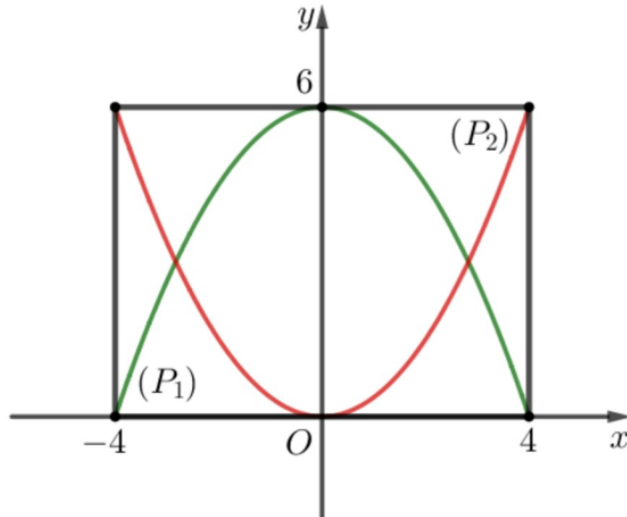
B. 18475205 đồng.

C. 24000000 đồng.

D. 14627417 đồng.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ:



Phương trình các đường parabol là $(P_1): y = -\frac{6}{16}(x+4)(x-4); (P_2): y = \frac{6}{16}x^2$

Diện tích trồng hoa là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = \frac{6}{16}x^2; y = -\frac{6}{16}(x^2 - 16)$ nằm giữa hai đường thẳng $x = -4; x = 4$.

Chi phí trồng hoa là $F = 500000S = 500000 \int_{-4}^4 \left| \frac{6}{16}x^2 + \frac{6}{16}(x^2 - 16) \right| dx \approx 14627417$ đồng.

Chọn đáp án **D.**