|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **SỞ GD &ĐT ĐỒNG NAI**  **ĐỀ HSG KHỐI 12 CHUYÊN**  *(Đề gồm 01 trang)* | **NĂM HỌC 2018 - 2019**  **MÔN: TOÁN**  **Thời gian: 180 phút** |
| Họ và tên: SBD:…………………… | |

**Câu 1 (5 điểm).**

**1)** Chứng minh rằng phương trình  có đúng 3 nghiệm thực phân biệt

. Tính giá trị của biểu thức .

**2)** Cho hai hàm số  có đồ thị lần lượt là  và *m* là tham số thực. Tìm *m* để  cắt  tại 3 điểm phân biệt có tung độ là  thỏa

.

**Câu 2 (3 điểm).** Cho *a, b, c* là các số thực không âm thỏa mãn . Chứng minh rằng

.

**Câu 3 (4 điểm).** Cho dãy  xác định bởi .

**1)** Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy  đều là số nguyên.

**2)** Tính .

**Câu 4 (4 điểm).** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn  có trực tâm , là trung điểm và  là

hình chiếu vuông góc của trên . Lấy  đối xứng qua và  đối xứng qua D. Tia

phân giác  cắt  tại  và tia phân giác  cắt  ở ,  cắt  tại  .

**1)** Chứng minh rằng nằm trên đường tròn .

**2)** Tiếp tuyến tại của cắt  ở , cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  ở điểm

thứ hai là . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  tiếp xúc đường tròn .

**Câu 5 (4 điểm).** Cho  là các số tự nhiên thỏa mãn , chứng minh  là lập phương

của một số nguyên.

***\*\*\*\*\*\*Hết\*\*\*\*\*\****

**LỜI GIẢI CHI TIẾT HSG 12 CHUYÊN - BẢNG A - ĐỒNG NAI 2018-2019**

**Câu 1.**

1. Chứng minh rằng phương trình  có đúng 3 nghiệm thực phân biệt . Tính

giá trị của biểu thức .

**2)** Cho hai hàm số  có đồ thị lần lượt là  và *m* là tham số thực. Tìm *m* để  cắt  tại 3 điểm phân biệt có tung độ là  thỏa

.

**Lời giải**

1. Phương trình đã cho tương đương . Xét hàm số  liên tục

trên  và có  nên phương trình có nghiệm

, .

Mặt khác, đây là phương trình bậc 3 nên đây là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

Do phương trình có 3 nghiệm  nên .

Ta có: 

**2)** Giả sử  là giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho thì tọa độ  thỏa hệ

.

Nên cũng thỏa phương trình hệ quả của hệ là: .

Khi đó, ta có:  với  là nghiệm phương trình hoành độ giao điểm .

Theo Vi-et ta có .

Và từ giả thiết thì: .

Từ đây giải ra được .

Thử lại,  thì phương trình  có 3 nghiệm phân biệt theo câu 1 nên  là giá trị cần tìm.

**Câu 2.** Cho là các số thực không âm thỏa mãn . Chứng minh rằng

.

**Lời giải**

Nếu tồn tại một trong ba số  bằng  thì điều cần chứng minh đúng.

Do đó chúng ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp .

Giả sử ngược lại . Khi đó  . Tương tự .

Do đó  (mâu thuẫn). Do đó ta có đpcm.

**Câu 3.** Cho dãy  xác định bởi .

**1)** Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy  đều là số nguyên

**2)** Tính .

**Lời giải**

**1)** Ta có từ giả thiết  từ đây suy ra



Hay suy ra 

Từ đó ta có: 

Mà  nên ta có 

**2)** Dãy đã cho là dãy sai phân thuần nhất cấp hai nên có phương trình đặc trưng là  với hai nghiệm  nên có công thức tổng quát là .

Khi đó, .

Từ đó ta có .

**Câu 4 (4 điểm).** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn  có trực tâm , là trung điểm và  là

hình chiếu vuông góc của trên . Lấy  đối xứng qua và  đối xứng qua D. Tia

phân giác  cắt  tại  và tia phân giác  cắt  ở ,  cắt  tại  .

**1)** Chứng minh rằng nằm trên đường tròn .

**2)** Tiếp tuyến tại của cắt  ở , cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  ở điểm

thứ hai là . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  tiếp xúc đường tròn .

**Lời giải**



**1)** Do  thuộc đường tròn đường kính  và , tiếp xúc  với  là chân

đường cao hạ từ  lên , lên .

Từ đó ta có đẳng thức .

Từ đó suy ra .Kết hợp tính đối xứng, suy ra  nội tiếp

**2)** Theo câu 1) ta có  nội tiếp và  là đối trung trong tam giác  .

Hay ta có tứ giác  điều hòa.

Điều này dẫn đến  đồng dạng  theo trường hợp cạnh – góc – cạnh. Suy ra , mà  là hai đường phân giác nên ta có  hay 

Do nên , dẫn đến  nội tiếp.

Khi đó, lại có tứ giác điều hòa nên  cũng tiếp xúc  và hơn nữa.

Điều này suy ra  tiếp xúc  hay  tiếp xúc  ở .

**Câu 5 (4 điểm).** Cho  là các số tự nhiên thỏa mãn , chứng minh  là lập phương

của một số nguyên.

**Lời giải**

Ta có 

Giả sử  là một ước nguyên tố chung của  thì  là số lẻ do

 lẻ.

Mà  nên suy ra  hay từ đó ta có  do . Mà  cũng chia hết

cho p nên , điều này vô lý.

Vậy  hay suy ra  là lập phương của một số nguyên.