PHÒNG GD&ĐT THẠCH HÀ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn thi: Toán 9
(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. *(4,5 điểm)*

1. Tính giá trị biểu thức $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$

2. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

$$M=\frac{2018}{\sqrt{x^2-2x-3}} \qquad N=\frac{-2019}{\sqrt{x-\sqrt{2x+3}}}$$

Câu 2. *(3,0 điểm)*

1. Cho 3 số *a, b,c* khác 0, thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$$

2. Tính giá trị của biểu thức: $B=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+....+\sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}}$

Câu 3. *(4,5 điểm)*

1. Cho đa thức f(x), tìm dư của phép chia f(x) cho (x-1)(x+2). Biết rằng f(x) chia cho x - 1 dư 7 và f(x) chia cho x + 2 dư 1.

2. Giải phương trình: $x^3-3x^2+2x+6=0$

3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2+y^2=17-2xy$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho *a*, *b*, *c* là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

b) $\frac{1}{a+b};\ \frac{1}{b+c};\ \frac{1}{c+a}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Câu 5. *(5,0 điểm)*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM, phân giác AI. Tính HI, IM; biết rằng AC= 4/3AB và diện tích tam giác ABC là 24 cm^2

2. Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ 3 đường thẳng song song với 3 cạnh tam giác. Đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC, BC lần lượt tại E và D; đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại M và N; đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB và BC lần lượt tại F và H. Biết diện tích các tam giác ODH, ONE, OMF lần lượt là a^2, b^2, c^2.

a) Tính diện tích *S* của tam giác ABC theo *a*, *b*, *c*

b) Chứng minh $S\le 3(a^2+b^2+c^2)$

------------------*Hết*-----------------

Họ và tên học sinh:……………………………………………………SBD:…………
(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm, học sinh không được sử dụng máy tính bỏ túi)

SƠ LƯỢC GIẢI
Đề thi chọn HSG cấp huyện năm học 2018 – 2019
Môn: TOÁN 9

Đáp án
1. Ta có $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{4+\sqrt{15}}\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\sqrt{4-\sqrt{15}}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)$
$A=\sqrt{4+\sqrt{15}}.1.\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{8+2\sqrt{15}}.\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$
$A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=5-3=2$
Điều kiện xác định của M là $x^2-2x-3>0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-3>0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x-3>0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+1<0 \\ x-3<0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$
Điều kiện xác định của N là $\begin{cases} 2x+3\geq 0 \\ x-\sqrt{2x+3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\sqrt{2x+3}\geq 0$ (*)
$\Leftrightarrow x^2>2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$ (**)
Từ (*) và (**) ta được $x>3$ là điều kiện xác định của M
2. Ta có: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bc}\right)$
$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}+\frac{b}{abc}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{abc}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$
Vậy $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left\lvert\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right\rvert$
Theo câu a) Ta có $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left\lvert\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right\rvert=\left\lvert\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right\rvert$ (*) Áp dụng (*) ta có: $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(-2)^2}}=\left\lvert\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{(-2)}\right\rvert=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$ (Vì $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}>0$)
Tượng tự $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$;….
$\sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}$
Suy ra $B=2019-\frac{1}{2019}=\frac{4076360}{2019}$
3. $x^3-3x^2+2x+6=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+6)=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$ (1) hoặc $x^2-4x+6=0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow x=-1$

(2) $\Leftrightarrow (x-2)^2+2=0$. Do $(x-2)^2+2\neq 0\ \forall x$ nên pt này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-1\}$

Vì $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$ là đa thức bậc 2 nên f(x) : $(x-1)(x+2)$ có đa thức dư dạng ax + b

Đặt $f(x)=(x-1)(x+2).q(x)+ax+b$

Theo đề ra f(x) : (x - 1) dư 7 $\Rightarrow$ $f(1)=7\Leftrightarrow a+b=7$ (1)

f(x) : (x + 2) dư 1 $\Rightarrow$ $f(-2)=1\Leftrightarrow -2a+b=1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ a = 2 và b = 5.

Vậy f(x) : $[(x-1)(x+2)]$ được dư là 2x + 5

$5x^2+y^2=17-2xy \Leftrightarrow 4x^2+(x+y)^2=17$

$\Rightarrow 4x^2\le 17\Rightarrow x^2\le\frac{17}{4}$ vì x^2 là số chính phương nên $x^2=0; 1; 4$

Nếu $x^2=0 \Rightarrow (x+y)^2=17$ (loại)

Nếu $x^2=1 \Rightarrow (x+y)^2=13$ (loại)

Nếu $x^2=4 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=-2$

$x=2 \Rightarrow (2+y)^2=1 \Rightarrow y=-3$ hoặc $y=-1$.

$x=-2 \Rightarrow (-2+y)^2=1 \Rightarrow y=3$ hoặc $y=1$.

Vậy phương trình có nghiệm : (x; y) = (2; -3), (2; -1), (-2; 3), (-2; 1)

4. Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên b + c > a

$\Leftrightarrow a(b+c)>a^2 \Leftrightarrow a(b+c)+ab+ac>a^2+ab+ac$

$\Leftrightarrow 2a(b+c)>a(a+b+c)\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}<\frac{2a}{a+b+c}$

Tượng tự ta cũng có: $\frac{b}{c+a}<\frac{2b}{a+b+c}$; $\frac{c}{b+a}<\frac{2c}{a+b+c}$

Suy ra: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{b+c+a}+\frac{2c}{a+b+c}=2\ (dpcm)$

Ta có a + b > c

$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{1}{b+c+a}+\frac{1}{c+a+b}=\frac{2}{a+b+c}>\frac{2}{(a+b)+(a+b)}=\frac{1}{a+b}$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}>\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{c+a}$

Vậy $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác *(Đpcm)*

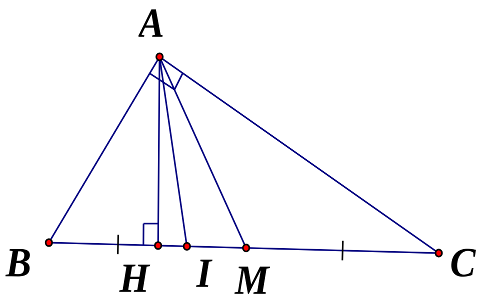
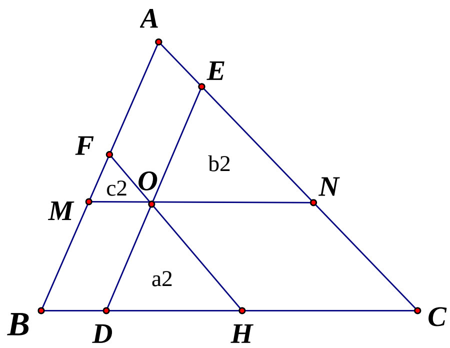
5. Do AC= ¾ AB (gt) và AB.AC = 2S = 48, suy ra AC = 6 (cm); AB = 8(cm).

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông ABC ta tính được BC = 10 cm, suy ra AM = 5 (cm) (1)

Áp dụng tính chất giữa canh và đường cao trong tam giác vuông ABC ta tính được

$\mathrm{BH}=\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{BC}}=3,6(\mathrm{cm})$ (2)

Áp dụng tính chất đường phân giác cua tam giác ta có

$\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{IB}{IB+IC}=\frac{AB}{AB+AC}\Leftrightarrow\frac{IB}{10}=\frac{6}{6+8}\Rightarrow IB=\frac{30}{7}$ cm (3) Từ (1), (2) và (3), ta có I nằm giữa B và M; H nằm giữa B và I Vậy: HI = BI - BH $=\frac{4,8}{7}$ cm MI = BM - BI $=\frac{5}{7}$ cm 
Ta có các tam giác ODH, EON, FMO đồng dạng với tam giác ABC Đặt $S_{ABC}=d^2$. Ta có: $\frac{S_{ODH}}{S_{ABC}}=\frac{a^2}{d^2}=\left(\frac{DH}{BC}\right)^2\Rightarrow\frac{a}{d}=\frac{DH}{BC}$; $\frac{S_{EON}}{S_{ABC}}=\frac{b^2}{d^2}=\left(\frac{ON}{BC}\right)^2=\left(\frac{HC}{BC}\right)^2\Rightarrow\frac{b}{d}=\frac{HC}{BC}$; Tương tự $\frac{c}{d}=\frac{BD}{BC}$ Suy ra: $\frac{a+b+c}{d}=\frac{DH+HC+DB}{BC}=1\Rightarrow d=a+b+c$ Vậy $S=d^2=(a+b+c)^2$ 
Áp dụng BĐT Cosy, ta có: $a^2+b^2\geq 2ab$; $b^2+c^2\geq 2bc$; $a^2+c^2\geq 2ac$ $S=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ $S\leq a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=3(a^2+b^2+c^2)$
Dấu "=" xẩy ra khi $a=b=c$, hay O là trọng tâm của tam giác ABC

Lưu ý: *Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa;*
Điểm toàn bài quy tròn đến 0,5.