**Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC XUẤT**

**Chương X XÁC XUẤT**

**Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu một số khái niệm cơ bản trong xác xuất là phép thử ngẫu nhiên, không gian mẫu, biến cố, biến cố đối và công thức tính xác suất của biến cố.**



**Xác suất là một công cụ được nhiều nhà đầu tư sử dụng để phân tích thị trường chứng khoản nhằm tìm ra phương án kinh doanh hiệu quả.**

Học xong chương này, bạn có thể:

* Nhận biết được một số khái niệm về xác suất cổ điển: phép thử ngẫu nhiên, không gian mẫu và biến cố.
* Tính được xác suất của biến cố bằng phương pháp tổ hợp và sử dụng sơ đồ hình cây.
* Hiểu được ý nghĩa và các tính chất cơ bản của xác suất.
* Nhận biết được khái niệm biến cố đối và tính được xác suất của biến cố đối.

**Bài 1. Không gian mẫu và biến cố**

Từ khóa: **Phép thử ngẫu nhiên; Không gian mẫu; Biến cố; Kết quả thuận lợi.**

**Ta thường gặp những hoạt động mà không thể đoán trước được kết quả của nó mặc dù biết được tất cả các kết quả có thể xảy ra, ví dụ như khi ta gieo một con xúc xắc, tung đồng xu, … Trong bài này, ta sẽ tìm hiểu các hoạt động trên theo quan niệm của xác suất cổ điển.**

**1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu**

Ba bạn An, Bình, Cường đang chơi cùng với nhau. An gieo một con xúc xắc 6 mặt cân đối (viết tắt là xúc xắc) hai lần. Nếu kết quả hai lần gieo ra hai mặt có số chấm khác nhau thì Bình thắng. Ngược lại, nếu kết quả hai lần gieo ra hai mặt có số chấm giống nhau thì Cường thắng.

a) Trước khi An gieo con xúc xắc, có thể biết bạn nào sẽ chiến thắng không?

b) Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra đối với số chấm xuất hiện trong hai lần gieo.

Ở hoạt động trên, trước khi An gieo xúc xắc ta không thể biết được kết quả nào có thể xảy ra. Có thể cả hai lần tung đều ra mặt có số chấm giống nhau, hoặc hai lần tung ra hai mặt có số chấm khác nhau. Ta nói rằng An đã thực hiện *một phép thử ngẫu nhiên*.

***Phép thử ngẫu nhiên*** (gọi tắt là phép thử) là một hoạt động mà ta không thể biết trước được kết quả của nó.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử ngẫu nhiên được gọi là ***không gian mẫu***, kí hiệu là Ω.

***Chú ý:*** Trong chương này, ta chỉ xét các phép thử mà không gian mẫu gồm hữu hạn phần tử.

***Ví dụ 1***

Một đồng xu có hai mặt, trên một mặt có ghi giá trị của đồng xu, thường gọi là mặt sấp, mặt kia là mặt ngửa. Hãy xác định không gian mẫu của mỗi phép thử ngẫu nhiên sau:

a) Tung đồng xu một lần;

b) Tung đồng xu hai lần.

***Giải***

a) Khi tung đồng xu một lần, ta có không gian mẫu Ω = {*S*; *N*}, trong đó kí hiệu *S* để chỉ đồng xu xuất hiện mặt sấp và *N* để chỉ đồng xu xuất hiện mặt ngửa.

b) Khi tung đồng xu hai lần, ta có không gian mẫu Ω = {*SS*; *SN*; *NS*; *NN*}. Ở đây ta quy ước *SN* có nghĩa là lần đầu tung được mặt sấp, lần sau tung được mặt ngửa. Các kí hiệu *SS*, *NS*, *NN* được hiểu một cách tương tự.

***Ví dụ 2***

Trong hộp có bốn quả bóng được đánh số từ 1 đến 4. Hãy xác định không gian mẫu của các phép thử sau:

a) Lấy ngẫu nhiên một quả bóng;

b) Lấy ngẫu nhiên cùng một lúc hai quả bóng;

c) Lấy ngẫu nghiên lần lượt hai quả bòng.

***Giải***

a) Không gian mẫu Ω = {1; 2; 3; 4}.

b) Do mỗi lần ta lấy hai quả bóng mà không tính đến thứ tự nên không gian mẫu sẽ gồm các tập con gồm hai phần tử của tập hợp {1; 2; 3; 4}, tức là:

Ω = { {1; 2}; {1; 3}; {1; 4}; {2; 3}; {2; 4}; {3; 4} }.

c) Do hai quả bóng được lấy lần lượt nên ta cần phải tính đến thứ tự lấy bóng. Nếu lần đầu lấy được bóng số 3, lần sau lấy được bóng số 1 thì ta sẽ kí hiệu kết quả của phép thử là cặp (3; 1). Khi đó không gian mẫu của phép thử là:

Ω = { (1; 2); (2; 1); (1; 3); (3; 1); (1; 4); (4; 1); (2; 3); (3; 2); (2; 4); (4; 2); (3; 4); (4; 3) }.



Tìm không gian mẫu của phép thử thực hiện ở .



Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp ở Ví dụ 2, xem số, sau đó trả lại hộp, trộn đều rồi lại lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp đó. Hãy xác định không gian mẫu của phép thử hai lần lấy bóng này.

**2. Biến cố**

Xét trò chơi ở .

a) Nếu kết quả của phép thử là (2; 3) thì ai là người chiến thắng?

b) Hãy liệt kê tất cả các kết quả của phép thử đem lại chiến thắng cho Cường.

Ta thấy sự kiện *A*: “Cường giành chiến thắng” xảy ra khi và chỉ khi kết quả hai lần gieo là (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6). Do đó, ta có thể đồng nhất *A* với tập hợp gồm các kết quả trên và viết:

*A* = {(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5); (6; 6)}.

Mỗi tập con của không gian mẫu được gọi là một ***biến cố***, kí hiệu là *A*, *B*, *C*, …

Một kết quả thuộc A được gọi là kết quả làm cho *A* xảy ra, hoặc ***kết quả thuận lợi*** cho *A*.

***Ví dụ 3***

Xét phép thử gieo hai con xúc xắc:

a) Hãy xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Viết tập hợp mô tả biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 4”. Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố đó?

***Giải***

a) Kết quả của phép thử là một cặp số (*i*; *j*), trong đó *i* và *j* lần lượt là số chấm xuất hiện trên con xúc xắc thứ nhất và thứ hai.

Không gian mẫu của phép thử là:

 Ω = {(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (1; 6);

 (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (2; 6);

 (3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5); (3; 6);

 (4; 1); (4; 2); (4; 3); (4; 4); (4; 5); (4; 6);

 (5; 1); (5; 2); (5; 3); (5; 4); (5; 5); (5; 6);

 (6; 1); (6; 2); (6; 3); (6; 4); (6; 5); (6; 6)}.

Ta cũng có thể viết không gian mẫu dưới dạng:

 Ω = {(*i*; *j*) | *i*, *j* = 1, 2, …, 6}.

b) Gọi *A* là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 4”. Tập hợp mô tả biến cố *A* là:

 *A* = {(1; 3); (2; 2); (3; 1)}.

Như vậy có ba kết quả thuận lợi cho biến cố *A*.

Trong phép thử gieo hai con xúc xắc, gọi *B* là biến cố “Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm” và *C* là biến cố “Số chấm xuất hiện ở con xúc xắc thứ nhất gấp 2 lần số chấm xuất hiện ở con xúc xắc thứ hai”.

a) Hãy xác định biến cố *B* và *C* bằng cách liệt kê các phần tử.

b) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho *B* và bao nhiêu kết quả thuận lợi cho *C*?

Trong phép thử gieo hai con xúc xắc, có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau?

*D*: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn 13”;

*E*: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 13”.

Biến cố *D* luôn xảy ra, ta nói *D* là ***biến cố chắc chắn***.

Biến cố *E* không bao giờ xảy ra, ta nói *E* là ***biến cố không thể***.

***Biến cố chắc chắn*** là biến cố luôn xảy ra, kí hiệu là Ω.

***Biến cố không thể*** là biến cố không bao giờ xảy ra, kí hiệu là Ø.

Đôi khi ta cần dùng các quy tắc đếm và công thức tổ hợp để xác định số phần tử của không gian mẫu và số kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố.

***Ví dụ 4***

Một nhóm có 5 bạn nam và 4 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên cùng một lúc ra 3 bạn đi làm công tác tình nguyện.

a) Hãy xác định số phần tử của không gian mẫu.

b) Hãy xác định số các kết quả thuận lợi cho biển cố “Trong 3 bạn được chọn có đúng 2 bạn nữ”.

***Giải***

a) Do ta chọn ra 3 bạn khác nhau từ 9 bạn trong nhóm và không tính đến thứ tự nên số phần tử của không gian mẫu là $C\_{9}^{3}$ = 84.

b) Ta có $C\_{4}^{2}$ cách chọn ra 2 bạn nữ từ 4 bạn nữ. Ứng với mỗi cách chọn 2 bạn nữ có $C\_{5}^{1}$ cách chọn ra 1 bạn nam từ 5 bạn nam.

Theo quy tác nhân ta có tất cả $C\_{4}^{2}C\_{5}^{1}$ cách chọn ra 2 bạn nữ và 1 bạn nam từ nhóm bạn. Do đó số các kết quả thuận lợi cho biến cố “Trong 3 bạn chọn ra có đúng 2 bạn nữ” là $C\_{4}^{2}C\_{5}^{1}$ = 30.

Trong Ví dụ 4, hãy xác định số kết quả thuận lợi cho biến cố:

a) “Trong 3 bạn được chọn có đúng một bạn nữ”;

b) “Trong 3 bạn được chọn không có bạn nam nào”.

**BÀI TẬP**

**1.** Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 100.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Gọi *A* là biến cố “Số được chọn là số chính phương”. Hãy viết tập hợp mô tả biến cố *A*.

c) Gọi *B* là biến cố “Số được chọn chia hết cho 4”. Hãy tính số các kết quả thuận lợi cho *B*.

**2.** Trong hộp có 3 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 3. Hãy xác định không gian mẫu của các phép thử:

a) Lấy 1 thẻ từ hộp, xem số, trả thẻ vào hộp rồi lại lấy tiếp 1 thẻ từ hộp;

b) Lấy 1 thẻ từ hộp, xem số, bỏ ra ngoài rồi lại lấy tiếp một thẻ khác tử hộp;

c) Lấy đồng thời 2 thẻ từ hộp.

**3.** Gieo hai con xúc xắc. Hãy tính số các kết quả thuận lợi cho biến cố:

a) “Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc hơn kém nhau 3 chấm”;

b) “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 5”;

c) “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là số lẻ”.

**4.** Xếp 4 viên bi xanh và 5 viên bi trắng có các kích thước khác nhau thành một hàng ngang một cách ngẫu nhiên. Hãy tính số các kết quả thuận lợi cho biến cố:

a) “Không có hai viên bi trắng nào xếp liền nhau”;

b) “Bốn viên bi xanh được xếp liền nhau”.