**ĐỀ 80**

**HSG TOÁN 9 SƠN LA 2023-2024**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức

A = **:**, (x 1)

1. Tính giá trị biểu thứcB = , với x thỏa mãn =

**Câu 2. (4,0 điểm)** Cho phương trình: , (với x là ẩn số).

1. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.
2. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt ; thỏa mãn = 3

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình:
2. Giải phương trình:

**Câu 4. (6,0 điểm)** Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định ((O) và d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d , từ P vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B thuộc đường tròn (O)) PO giao AB tại I. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A đến đường kính BC , E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP và đường tròn (O). Chứng minh rằng

1. PF.PC = PI.PO.
2. E là trung điểm của đoạn thẳng AH .
3. Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di động trên d .

**Câu 5. (2,0 điểm)**

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:
2. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện x > 0, . .

Chứng minh rằng:

**------------HẾT------------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức

A = **:**, (x 1)

1. Tính giá trị biểu thức B = , với x thỏa mãn =

**Lời giải**

**a)**  = =

Mà =

Do đó: A = **:**  = .

Vậy A = , với điều kiện x 1

**b)** Ta có =

Khi đó: =

Và ta có: =

Do đó: B =

**Câu 2. (4,0 điểm)** Cho phương trình: , (với x là ẩn số).

1. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.
2. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt ; thỏa mãn = 3

**Lời giải**

Ta có:

=

=

Do nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

**b)** Từ câu a, phương trình có hai nghiệm phân biệt ; > 0 m

Áp dụng hệ thức Vi-ét

Ta có hệ phương trình sau:

, thay vào (3), ta được:

.

Vậy là giá trị cần tìm

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình:
2. Giải phương trình:

**Lời giải**

**a)** Điều kiện hệ trở thành

Ta có:

Vậy hệ phương trình có nghiệm là:

**b)**

Điều kiện:

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với phương trình:

Đặt a = , b = ta có a, b 0. Từ (\*), ta có hệ phương trình

Thay (1) vào (2) suy ra

Với loại

Với

Thử lại, phương trình có tập nghiệm S =

**Câu 4. (6,0 điểm)** Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định ((O) và d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d , từ P vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B thuộc đường tròn (O)) PO giao AB tại I. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A đến đường kính BC , E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP và đường tròn (O). Chứng minh rằng

1. PF.PC = PI.PO.
2. E là trung điểm của đoạn thẳng AH .
3. Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di động trên d.

**Lời giải**

****

**a)** Chứng minh PF.PC = PI.PO.

+) Xét vuông tại A có AI là đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác

(1).

+) Xét hai tam giác FP và CAP có:

(cùng bằng số đo cung AF)

FP đồng dạng với CAP.

PF.PC = (2).

Từ (1) và (2) PF.PC = PI.PO

b) + Xét hai tam giác HC và PBO có:

90⁰

Mặt khác do PO//AC (cùng vuông góc với AB)

(hai góc đồng vị)

HC đồng dạng với PBO do đó: (1).

+) Xét hai tam giác EHC và PCB có:

chung

90⁰

EHC đồng dạng với CPB do đó: (2).

Do CB = 2OB, kết hợp (1) và (2) ta suy ra: AH = 2EH

hay E là trung điểm của AH.

c) Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ O lên đường thẳng d . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OM và AB .

Xét hai tam giác OIK và OMP có góc chung, 90⁰

OIK đồng dạng với OMP

OK =

Mặt khác *OP.OI =* suy ra OK = cố định, K thuộc OM cố định suy ra điểm K cố định

Mà 90⁰ với mọi vị trí của M

Vậy khi M di động trên d thì I di động trên đường tròn đường kính OK cố định.

**Câu 5. (2,0 điểm)**

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:
2. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện x > 0,

.

Chứng minh rằng:

**Lời giải**

**a)**

(1)

Coi (1) là phương trình theo ẩn x

+) Nếu (loại)

+) Nếu 0 , Ta có (1) là phương trình bậc 2

=

=

=

Phương trình (1) có nghiệm nguyên

là số chính phương

Đặt a = =

là số chính phương, đặt = (k N), ta có =

Vì là số chẵn, và là số chẵn nên cũng là số chẵn

Do đó hoặc hoặc

* Với (loại)
* Với y = 1, ta thay vào phương trình (1) được phương trình

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là (x;y)

b) Ta có

Áp dụng bất đẳng thức Cosi

Vậy x

**------------HẾT------------**