**ĐỀ 80**

**HSG TOÁN 9 SƠN LA 2023-2024**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức

A = $\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right)$**:**$\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$, (x $>0; x \ne $1)

1. Tính giá trị biểu thứcB = $\frac{2x^{4}-3x^{3}-15x^{2}-2x+3}{3x^{3}-10x^{2}-2x+2}$, với x thỏa mãn $\frac{x+1}{x^{2}+3x+8}$ = $\frac{1}{7}$

**Câu 2. (4,0 điểm)** Cho phương trình: $x^{2}-\left(3x-2\right)x+2m^{2}-m-3=0 (1)$, (với x là ẩn số).

1. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.
2. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x\_{1}$; $x\_{2}$ thỏa mãn $x\_{1}$ = 3$x\_{2}$

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}\frac{4}{2x+y+1}+\frac{3}{3x+y-2}=4\\\frac{5x+2y+3}{\left(2x+y+1\right).\left(3x+y+2\right)}=\frac{5}{4}\end{array}\right.$
2. Giải phương trình: $\left(\sqrt{9-2x}+3\right)\left(\sqrt{2x+9}-3\right)=4x$

**Câu 4. (6,0 điểm)** Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định ((O) và d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d , từ P vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B thuộc đường tròn (O)) PO giao AB tại I. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A đến đường kính BC , E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP và đường tròn (O). Chứng minh rằng

1. PF.PC = PI.PO.
2. E là trung điểm của đoạn thẳng AH .
3. Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di động trên d .

**Câu 5. (2,0 điểm)**

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$2x^{2}y+3xy+y=x^{2}+2xy^{2}+3x+1$$

1. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện x > 0, $5x^{2}=yz$. $x+y+x=xyz$.

Chứng minh rằng: $x\geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}}$

**------------HẾT------------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức

A = $\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right)$**:**$\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$, (x $>0; x \ne $1)

1. Tính giá trị biểu thức B = $\frac{2x^{4}-3x^{3}-15x^{2}-2x+3}{3x^{3}-10x^{2}-2x+2}$, với x thỏa mãn $\frac{x+1}{x^{2}+3x+8}$ = $\frac{1}{7}$

**Lời giải**

**a)** $\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}$ = $\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^{2}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$ $-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$ = $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ $-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

Mà $\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ = $\frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$

Do đó: A = $\frac{2}{\sqrt{x}-1}$ **:** $\frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$ = $\frac{2}{\sqrt{x}-1}$ . $\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\sqrt{x}}$

Vậy A = $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$, với điều kiện x $>0; x \ne $1

**b)** Ta có $\frac{x+1}{x^{2}+3x+8}$ = $\frac{1}{7}$ $⇒$ $x^{2}+3x+8=7x+7$ $⇒$ $x^{2}-4x+1=0$

Khi đó:$2x^{4}-3x^{3}-15x^{2}-2x+3$ = $\left(x^{2}-4x+1\right)\left(2x^{2}+5x+3\right)+5x=5x$

Và ta có: $3x^{3}-10x^{2}-2x+2$ = $\left(x^{2}-4x+1\right)\left(2x+2\right)+3x=3x$

Do đó: B = $\frac{2x^{4}-3x^{3}-15x^{2}-2x+3}{3x^{3}-10x^{2}-2x+2}$ $=$ $\frac{5x}{3x}$ $=\frac{5}{3}$

**Câu 2. (4,0 điểm)** Cho phương trình: $x^{2}-\left(3x-2\right)x+2m^{2}-m-3=0 (1)$, (với x là ẩn số).

1. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.
2. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x\_{1}$; $x\_{2}$ thỏa mãn $x\_{1}$ = 3$x\_{2}$

**Lời giải**

Ta có: $∆=\left[-\left(3m-2\right)\right]^{2}-4\left(2m^{2}-m-3\right)$

= $\left(3m-2\right)^{2}-8m^{2}+4m+12=9m^{2}-12+4-8m^{2}+4m+12$

= $m^{2}-8m+16=\left(m-4\right)^{2}\geq 0, ∀m $

Do $∆$ $\geq 0, ∀m$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

**b)** Từ câu a, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$; $x\_{2}$ $⇔$ $∆$ > 0 $⇔$ m $\ne 4$

Áp dụng hệ thức Vi-ét $\left\{\begin{array}{c}S=x\_{1}+x\_{2}=\frac{-b}{a}=-\left[-\left(3m-2\right)\right]=3m-2 \\P=x\_{1}.x\_{2}=\frac{c}{a}=2m^{2}-m-3\end{array}\right.$

Ta có hệ phương trình sau:

$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=3x\_{2} \\x\_{1}+x\_{2}=3m-2\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=\frac{9m-6}{4} \\x\_{2}=\frac{3m-2}{4}\end{array}\right.$, thay vào (3), ta được:

$\frac{9m-6}{4}$ . $\frac{3m-2}{4}$ $=$ $2m^{2}-m-3$

$⇔$ $\left(9m-6\right)\left(3m-2\right)=16\left(2m^{2}-m-3\right)$

$⇔27m^{2}-36m+12=$ $32m^{2}-16m-48$

$⇔$ $5m^{2}+20m-60=0⇔m^{2}+4m-12=0$

$⇔$ $m=-2, m=6$

Vậy $m=-2, m=6$ là giá trị cần tìm

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}\frac{4}{2x+y+1}+\frac{3}{3x+y-2}=4\\\frac{5x+2y+3}{\left(2x+y+1\right).\left(3x+y+2\right)}=\frac{5}{4}\end{array}\right.$
2. Giải phương trình: $\left(\sqrt{9-2x}+3\right)\left(\sqrt{2x+9}-3\right)=4x$

**Lời giải**

**a)** Điều kiện $\left\{\begin{array}{c}a=2x+y+1\\b=3x+y+2\end{array}\right.$ hệ trở thành $\left\{\begin{array}{c}\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=4\\\frac{a+b}{a.b}=\frac{5}{4}\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=4\\\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{4}\end{array}\right.$

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{a}=\frac{1}{4}\\\frac{1}{b}=1\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}a=4\\b=1\end{array}\right.$

Ta có: $\left\{\begin{array}{c}2x+y+1=1\\3x+y+2=1\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x=-4\\y=11\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $\left\{\begin{array}{c}x=-4\\y=11\end{array}\right.$

**b)**

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{c}2x+9\geq 0\\9-2x\geq 0\end{array}\right.$ $⇔$ $-\frac{9}{2}$ $\leq x\leq $ $\frac{9}{2}$

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$2x\left(\sqrt{9-2x}+3\right)=4x\left(\sqrt{2x+9}+3\right)$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}x=0\\\sqrt{9-2x}=2\sqrt{2x+9}+3 (\*)\end{array}\right.$

Đặt a = $\sqrt{9-2x}$, b = $\sqrt{9+2x}$ ta có a, b $\geq $ 0. Từ (\*), ta có hệ phương trình

$\left\{\begin{array}{c}a=2b+3 (1)\\a^{2}+b^{2}=18 (2)\end{array}\right.$

Thay (1) vào (2) suy ra $\left(2b+3\right)^{2}+b^{2}=18$ $⇔$ $5b^{2}+12b-9=0$

$⇔$ $\left[\begin{array}{c}b=3/5\\b=-3\end{array}\right.$

Với $b=-3$ loại

Với $b=\frac{3}{5}$ $⇒$ $\sqrt{9+2x}=\frac{3}{5}$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x\geq -\frac{9}{2}\\x=-\frac{108}{20}\end{array}\right.$ $⇔x=-\frac{108}{20}$

Thử lại, phương trình có tập nghiệm S = $\left\{-\frac{108}{20};0\right\}$

**Câu 4. (6,0 điểm)** Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định ((O) và d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d , từ P vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B thuộc đường tròn (O)) PO giao AB tại I. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A đến đường kính BC , E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP và đường tròn (O). Chứng minh rằng

1. PF.PC = PI.PO.
2. E là trung điểm của đoạn thẳng AH .
3. Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di động trên d.

**Lời giải**

****

**a)** Chứng minh PF.PC = PI.PO.

+) Xét $△AOP$ vuông tại A có AI là đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác

$⇒$ $PA^{2}=PI.PO$ (1).

+) Xét hai tam giác $△A$FP và $△$CAP có:

$\hat{PAF}=\hat{ACF}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo cung AF)

$⇒$ $△A$FP đồng dạng với $△$CAP.

$⇒$ $\frac{PF}{PA}$ $=\frac{PA}{PC}$ $⇔$ PF.PC = $PA^{2}$ (2).

Từ (1) và (2) $⇒$ PF.PC = PI.PO

b) + Xét hai tam giác $△A$HC và $△$PBO có:

$\hat{AHC}=\hat{OBP}$ $=$ 90⁰

Mặt khác do PO//AC (cùng vuông góc với AB)

$⇒$ $\hat{POB}=\hat{ACB}$ (hai góc đồng vị)

$⇒$ $△A$HC đồng dạng với $△$PBO do đó: $\frac{AH}{PB}$ $=\frac{CH}{OB}$ (1).

+) Xét hai tam giác $△$EHC và $△$PCB có:

$\hat{PCB}$ chung

$\hat{EHC}=\hat{PBO}$ $=$ 90⁰

$⇒$ $△$EHC đồng dạng với $△$CPB do đó: $\frac{CH}{CB}$ $=\frac{EH}{PB}$ (2).

Do CB = 2OB, kết hợp (1) và (2) ta suy ra: AH = 2EH

hay E là trung điểm của AH.

c) Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ O lên đường thẳng d . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OM và AB .

Xét hai tam giác $△$OIK và $△$OMP có góc $\hat{POM}$ chung, $\hat{OIK}=\hat{OMP}$ $=$ 90⁰

$⇒$ $△$OIK đồng dạng với $△$OMP

$⇒\frac{OK}{OP}$ $=\frac{OI}{OM}$ $⇔$ OK = $\frac{OP.OI}{OM}$

Mặt khác *OP.OI =* $OB^{2}$suy ra OK = $\frac{OB^{2}}{OM}$ cố định, K thuộc OM cố định suy ra điểm K cố định

Mà $\hat{OIK}$ $=$ 90⁰ với mọi vị trí của M

Vậy khi M di động trên d thì I di động trên đường tròn đường kính OK cố định.

**Câu 5. (2,0 điểm)**

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$2x^{2}y+3xy+y=x^{2}+2xy^{2}+3x+1$$

1. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện x > 0,

$5x^{2}=yz$. $x+y+x=xyz$

Chứng minh rằng: $x\geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}}$

**Lời giải**

**a)**

$2x^{2}y+3xy+y=x^{2}+2xy^{2}+3x+1$

$⇔$ $\left(2y-1\right)x^{2}-x\left(2y^{2}-3y+3\right)+y-1=0$ (1)

Coi (1) là phương trình theo ẩn x

+) Nếu $2y-1=0⇔y=\frac{1}{2}$ (loại)

+) Nếu $2y-1\ne $0 $⇔y\ne \frac{1}{2}$ , Ta có (1) là phương trình bậc 2

$∆$ = $\left[-\left(2y^{2}-3y+3\right)\right]^{2}-4\left(y-1\right)\left(2y-1\right)$

$=\left(2y^{2}-3y+3\right)^{2}-4\left(2y^{2}-3y+1\right)$

$∆$ = $\left(2y^{2}-3y+3\right)^{2}-4\left(2y^{2}-3y+3-2\right)$

= $\left(2y^{2}-3y+3\right)^{2}-4\left(2y^{2}-3y+3\right)+8$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên

$⇒$ $∆$ là số chính phương

Đặt a = $\left(2y^{2}-3y+3\right)$ $⇒$ $∆$ = $a^{2}-4a+8=\left(a-2\right)^{2}+4$

$∆$ là số chính phương, đặt $∆$ = $k^{2}$ (k $\in $ N), ta có $\left(a-2\right)^{2}+4$ = $k^{2}$

$⇔$ $k^{2}-\left(a-2\right)^{2}=4$ $⇔\left(k+a-2\right)\left(k-a+2\right)=4$

Vì $\left(k+a-2\right)\left(k-a+2\right)=2k$ là số chẵn, và $\left(k+a-2\right)\left(k-a+2\right)=4$ là số chẵn nên $\left(k+a-2\right) và \left(k-a+2\right)$ cũng là số chẵn

Do đó $\left\{\begin{array}{c}\left(k+a-2\right)=2\\\left(k-a+2\right)=2\end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{c}\left(k+a-2\right)=-2\\\left(k-a+2\right)=-2\end{array}\right.$ $⇔\left\{\begin{array}{c}k=2\\a=2\end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{c}k=-2\\a=-2\end{array}\right.$

* Với $y=\frac{1}{2}$ (loại)
* Với y = 1, ta thay vào phương trình (1) được phương trình $x^{2}-2x=0$

$⇔$ $\left[\begin{array}{c}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là (x;y) $\in $ $\left\{\left(0;1\right),\left(2;1\right)\right\}$

b) Ta có $5x^{2}=yz$ $⇒$ $5x^{3}=xyz$ $⇒$ $x^{3}=\frac{xyz}{5}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi $5x^{2}=yz\leq $ $\frac{\left(y+z\right)^{2}}{4}$ $=$ $\frac{\left(5x^{3}-x\right)^{2}}{4}$ $⇒$ $5x^{2}\leq $ $\frac{\left(5x^{3}-x\right)^{2}}{4}$

$20x^{2}$ $\leq $ $\left(5x^{3}-x\right)^{2}$ $⇔$ $x^{2}\left(5x^{3}-x\right)^{2}$ $\geq $ $20x^{2}⇔\left(5x^{2}-1\right)^{2}-\left(2\sqrt{5}\right)^{2}\geq 0$

$⇔$ $\left(5x^{2}-1-2\sqrt{5}\right)\left(5x^{2}-1+2\sqrt{5}\right)\geq 0$

$⇔$ $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}5x^{2}-1-2\sqrt{5}\geq 0\\5x^{2}-1+2\sqrt{5}\geq 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}5x^{2}-1-2\sqrt{5}\leq 0\\5x^{2}-1+2\sqrt{5}\leq 0\end{array}\right.\end{array}\right.$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}5x^{2}\geq 1+2\sqrt{5}\\5x^{2}\geq 1-2\sqrt{5}\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}5x^{2}\leq 1+2\sqrt{5}\\5x^{2}\leq 1-2\sqrt{5}\end{array}\right.\end{array}\right.$

 $⇔$ $5x^{2}\geq 1+2\sqrt{5}$ $⇔x^{2}$ $\geq $ $\frac{1+2\sqrt{5}}{5}$

Vậy x $\geq $ $\sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}}$

**------------HẾT------------**