

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Ta có $F'(x) = f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$, $F'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2}(x^3 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 2$.

Suy ra hàm số $F(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ và $F(2) = 2$. Tính $F(3)$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int (3x^2 - 4x + 1)dx = x^3 - 2x^2 + x + C$. Mà $F(2) = 2$ nên suy ra $C = 0$.

Vậy hàm số $F(x) = x^3 - 2x^2 + x$. Suy ra $F(3) = 12$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ và $f(1) = 1$. Tính $f(3)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \int f''(x)dx = \int (12x^2 + 6x - 4)dx = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C_1$.

$\Rightarrow f(x) = \int f'(x)dx = \int (4x^3 + 3x^2 - 4x + C_1)dx = x^4 + x^3 - 2x^2 + C_1x + C_2$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 4 \\ 1 + 1 - 2 + C_1 + 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 4 \\ C_1 = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$

$\Rightarrow f(3) = 85$

Câu 4. Giả sử $\int_{(0,1)^x} dx = -\frac{1}{\ln a} \cdot b^x + C$. Với a, b là các hằng số dương. Giá trị của biểu thức $\frac{a}{b}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\int_{(0,1)^x} dx = \frac{(0,1)^x}{\ln 0,1} + C = \frac{(0,1)^x}{\ln 10^{-1}} + C = -\frac{(0,1)^x}{\ln 10} + C$.

Suy ra $a = 10, b = 0,1$ vậy $\frac{a}{b} = 100$.

Câu 5. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 1)$ và $F(-1) = \frac{1}{6}$. Tính $F\left(-\frac{1}{2}\right)$ (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Ta có: $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 1) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$

Suy ra $F(x) = \int f(x) dx = \int (2x^3 + x^2 - 4x - 2) dx$

$$= \int 2x^3 dx + \int x^2 dx - \int 4x dx - \int 2 dx$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x + C, C \in \mathbb{R}.$$

Mà $F(-1) = \frac{1}{6}$ nên suy ra $C = 0$. Vậy hàm số $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x$. Suy ra

$$F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{47}{96} \approx 0,49$$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 4x^3 - m + 1$, $f(2) = 1$ và có đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm được $f(x) = ax^4 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b + c$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = x^4 - (m - 1)x + C$

Từ giả thiết, ta có: $\begin{cases} C = 3 \\ 16 - (m - 1) \cdot 2 + C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 3 \\ m - 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 3 \\ m = 10 \end{cases}$

$$f(x) = x^4 - 9x + 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -9 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -5.$$

Do đó:

Câu 7. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 30 m/s . Gia tốc trọng trường là $9,8 \text{ m/s}^2$. Tìm vận tốc của viên đạn ở thời điểm 2 giây.

Lời giải

Ta có: $v(t) = 30 - 9,8t (t \geq 0)$

Vậy vận tốc của viên đạn ở thời điểm 2 giây là $v(2) = 10,4 (m/s)$.

Câu 8. Biết hàm số $F(x) = \frac{2x^2 - 3x + 6}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ (với a, b, c là các số thực). Khi đó giá trị $a + b - c$ bằng?

Lời giải

Ta có $F'(x) = \left(2x - 3 + \frac{6}{x}\right)' = 2 - \frac{6}{x^2} = \frac{2x^2 - 6}{x^2}$ và $F'(x) = f(x)$, suy ra $a = 2; b = 0; c = -6$. Do đó $a + b - c = 8$.

Câu 9. Biết hàm số $F(x) = a \sin x + b \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x - \cos x$. Khi đó giá trị của $a + 2b$ bằng?

Lời giải

$\int f(x)dx = \int (2 \sin x - \cos x)dx = -2 \cos x - \sin x + C$ suy ra $F(x) = -\sin x - 2 \cos x$, suy ra $a = -1; b = -2$.
Do đó $a + 2b = -5$.

Câu 10. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + 3x^2$ và $F(1) = \frac{2}{\ln 2}$. Giá trị của $F(2)$ (làm tròn đến hàng phần mười) bằng?

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int (2^x + 3x^2)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^3 + C, \text{ suy ra } F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + x^3 + C.$$

Ta có $F(1) = \frac{2}{\ln 2} + 1 + C = \frac{2}{\ln 2} \Rightarrow C = -1$. Do đó $F(2) = \frac{2^2}{\ln 2} + 2^3 - 1 \approx 12,8$.

Câu 11. Giả sử $\int \frac{1}{\sqrt[n]{x^5}} dx = ax^{\frac{m}{n}} + C$ với a là hằng số thực, n là số nguyên dương, m là số nguyên và ước số chung lớn nhất của m và n bằng 1. Giá trị của biểu thức $S = a + m + n$ là bao nhiêu?

Lời giải

$$\int \frac{1}{\sqrt[n]{x^5}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{n}}} dx = \int x^{\frac{-5}{n}} dx = \frac{x^{\frac{-5}{n}+1}}{\frac{-5}{n}+1} + C = \frac{-3}{2} \frac{1}{x^{\frac{2}{n}}} + C = \frac{-3}{2} x^{\frac{-2}{n}} + C$$

$$a + m + n = \frac{-3}{2} - 2 + 3 = -0,5$$

Câu 12. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 3 m. Trong các năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$ (tính theo mét/năm). Chiều cao của cây đó sau 5 năm (làm tròn đến hàng phần mười) bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

$$\int h'(x)dx = \int \frac{\sqrt{2}}{x} dx = \sqrt{2} \ln |x| + C, \text{ suy ra } h(x) = \sqrt{2} \ln |x| + C.$$

Ta có $h(1) = \sqrt{2} \ln 1 + C = 3$, suy ra $C = 3$. Do đó $h(5) = \sqrt{2} \ln 5 + 3 \approx 5,3(m)$.

Câu 13. Một ô tô đang chạy với vận tốc $17,5 m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động với vận tốc $v(t) = \frac{35}{2} - \frac{7}{2}t (m/s)$, trong đó t (tính bằng giây) là thời gian kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{35}{2} - \frac{7}{2}t = 0 \Leftrightarrow t = 5$ (giây).

Quãng đường ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh là

$$s(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{35}{2} - \frac{7}{2}t \right) dt = \frac{35t}{2} - \frac{7t^2}{4} + C$$

Ta có $s(0) = 0$, suy ra $C = 0$, suy ra $s(t) = \frac{35t}{2} - \frac{7t^2}{4}$. Do đó $s(5) = \frac{35}{2} \cdot 5 - \frac{7}{4} \cdot 5^2 = 43,75(m)$.

Câu 14. Cá hồi Thái Bình Dương đến mùa sinh sản thường bơi từ biển ngược dòng vào sông và đến thượng nguồn các dòng sông để đẻ trứng. Giả sử cá bơi ngược dòng sông với vận tốc là

$v(t) = -\frac{2t}{5} + 4(km/h)$. Nếu coi thời điểm ban đầu $t = 0$ là lúc cá bắt đầu bơi vào dòng sông thì khoảng cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là bao nhiêu?

Lời giải

Quãng đường con cá bơi được khi bơi ngược dòng là:

$$S(t) = \int v(t) dt = \int \left(-\frac{2t}{5} + 4 \right) dt = -\frac{1}{5}t^2 + 4t + C$$

Vì $S(0) = 0$ nên suy ra $C = 0$.

Do đó: $S(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 4t = -\frac{1}{5}(t^2 - 20t + 100) + 20 = -\frac{1}{5}(t - 10)^2 + 20 \leq 20$

Vậy khoảng cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là $20 km$.

Câu 15. Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là $80 m/s$ bắt đầu từ $2 m$. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian $5 s$ kể từ lúc bắn (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm t là

$$v(t) = \int -9,8 dt = -9,8t + C_1.$$

Do $v(0) = 80$ nên $v(0) = -9,8 \cdot 0 + C_1 = 80$

$$\Leftrightarrow C_1 = 80 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 80.$$

Độ cao của viên đạn tại thời điểm t là

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-9,8t + 80) dt = -4,9t^2 + 80t + C_2.$$

Vì $s(0) = 2$ nên $s(0) = -4,9 \cdot 0^2 + 80 \cdot 0 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + 80t + 2.$

Vậy sau khoảng thời gian $5s$ kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao

$$s(5) = -4,9 \cdot 5^2 + 80 \cdot 5 + 2 = 279,5(m).$$

Câu 16. Một vật được ném lên từ độ cao $300m$ với vận tốc được cho bởi công thức

$v(t) = -9,8t + 29,43(m/s)$. Gọi $h(t)(m)$ là độ cao của vật tại thời điểm $t(s)$. Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu được ném lên thì vật đó chạm đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?

Lời giải

Ta có
$$h(t) = \int v(t) dt = \int (-9,81t + 29,43) dt = -\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + C$$

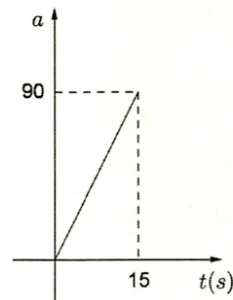
Vì vật được ném lên từ độ cao $300m$ nên $h(0) = 300$. Suy ra $C = 300$.

Vậy
$$h(t) = -\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + 300$$
. Khi vật bắt đầu chạm đất ứng với $h(t) = 0$.

Nên ta có
$$-\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + 300 = 0 \Leftrightarrow t \approx 11$$
 hoặc $t \approx -5$.

Do $t > 0$ nên $t \approx 11$ (s).

Câu 17. Một máy bay đang chuyển động thẳng đều trên mặt đất với vận tốc $v = 3(m/s)$ thì bắt đầu tăng tốc với độ biến thiên vận tốc là hàm số $a(t)$ có đồ thị hàm số là đường thẳng như hình vẽ.



Sau 15s tăng tốc thì máy bay đạt đến vận tốc đủ lớn để phóng khỏi mặt đất. Hãy tính vận tốc khi máy bay bắt đầu rời khỏi mặt đất.

Lời giải

Đường thẳng $a(t) = mt + n$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $A(16;90)$ nên suy ra

$$\begin{cases} m \cdot 0 + n = 0 \\ m \cdot 15 + n = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ m = 6 \end{cases} \Rightarrow a(t) = 6t.$$

Ta hiểu rằng, nguyên hàm của gia tốc $a(t)$ chính là vận tốc của vật chuyển động. Do đó ta có
$$v(t) = \int a(t) dt = \int 6t dt = 3t^2 + C.$$

Tại thời điểm bắt đầu tăng tốc thì xem như $t = 0$ và vận tốc lúc đó là $v = 3(m/s)$

Suy ra
$$v(0) = 3 \Leftrightarrow 3 \cdot 0^2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow v(t) = 3t^2 + 3.$$

Vậy vận tốc máy bay đạt được khi bắt đầu phóng khỏi mặt đất là

$$v(15) = 3 \cdot 15^2 + 3 = 678(m/s).$$

Câu 18. Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau x tháng kể từ bây giờ, dân số của thành phố A sẽ tăng với tốc độ $v(x) = 10 + 2\sqrt{2x+1}$ (người/tháng). Dân số của thành phố sẽ tăng thêm bao nhiêu trong 4 tháng tới.

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C$$

Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị. Cho biết

Lời giải

Gọi $f(x)$ là dân số của thành phố sau x tháng kể từ bây giờ.

Tốc độ thay đổi của dân số là $v(x) = 10 + 2\sqrt{2x+1}$.

Suy ra $f(x) = \int (10 + 2\sqrt{2x+1}) dx = 10x + 2 \int \sqrt{2x+1} dx$.

Do $\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} d(2x+1) = \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$, nên ta có

$$f(x) = 10x + \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Số dân trong 4 tháng tới là

$$f(4) - f(0) = 10 \cdot 4 + \frac{2}{3} (2 \cdot 4 + 1)^{\frac{3}{2}} + C - \left(0 + \frac{2}{3} + C \right) \approx 57 \text{ (người)}.$$

Câu 19. Sản phẩm A có hàm lợi nhuận biên theo sản lượng là $M\pi = -100Q + 1000$

Biết rằng, nếu chỉ bán được 100 sản phẩm thì công ti lỗ 50000 đơn vị tiền tệ (1 đơn vị tiền tệ là 1000 đồng). Ta tìm được hàm lợi nhuận theo Q là một hàm số bậc hai có dạng $\pi(Q) = aQ^2 + bQ + c$, tính $7000a + \frac{b}{1000} + c$?

Lời giải

Ta có

$$\pi = \int (-100Q + 1000) dQ = -50Q^2 + 1000Q + C, C \text{ là hằng số.}$$

Vì $\pi(100) = -50000$ đơn vị tiền do bị lỗ, nên ta có

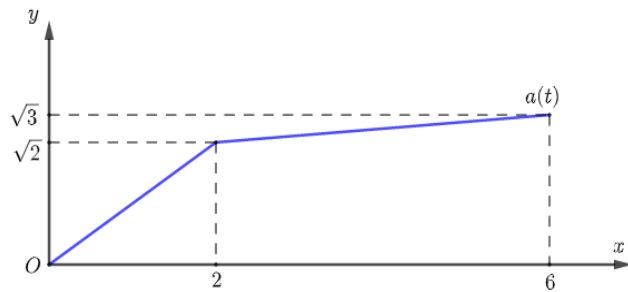
$$\pi(100) = -50(100)^2 + 1000(100) + C = -50000.$$

Vậy $C = 350000$.

Hàm lợi nhuận là $\pi(Q) = -50Q^2 + 1000Q + 350000$

$$\text{Khi đó } 7000a + \frac{b}{1000} + c = 1$$

Câu 20. (ĐH Sư Phạm-ĐGNL-2020) Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0) = 1 \text{ (m/s)}$.



Tại thời điểm $t = 6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

$$a(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}t & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}t + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

Từ đồ thị ta có

$$v(t) = \int a(t) dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 1 & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{8}t^2 + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}t + C & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

Mà $v(0) = 1 (m/s)$ nên

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = \lim_{x \rightarrow 2^+} v(t) \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 2}{2}$$

$$\text{Do đó } v(6) = 1 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \approx 8,7 (m/s)$$

Câu 21. Tốc độ tăng các cặp đôi kết hôn (đơn vị tính: triệu người) của nước Mỹ từ năm 1970 đến năm 2005 có thể được mô hình bởi hàm số $f(t) = 1,218t^2 - 44,72t + 709,1$, với t là năm ($t=0$ ứng với năm 1970). Số lượng cặp đôi kết hôn vào năm 2005 là 59513 ngàn người. Ta tìm được một mô hình biểu thị cho số lượng các cặp đôi kết hôn của nước Mỹ. Sử dụng mô hình đó để dự đoán số lượng các cặp đôi kết hôn của nước Mỹ vào năm 2012.

Lời giải

Để tìm một mô hình cho số lượng các cặp đôi kết hôn tìm nguyên hàm của $f(t)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int (1,218t^2 - 44,72t + 709,1) dt \\ &= \frac{1,218}{3}t^3 - \frac{44,72}{2}t^2 + 709,1t + C \\ &= 0,406t^3 - 22,36t^2 + 709,1t + C. \end{aligned}$$

Số lượng các cặp đôi kết hôn vào năm 2005 là 59,513 triệu người nên ta có

$$\begin{aligned} F(35) &= 59513 \Leftrightarrow 0,406 \cdot 35^3 - 22,36 \cdot 35^2 + 709,1 \cdot 35 + C \\ &= 59513 \Leftrightarrow C = 44678,25. \end{aligned}$$

Vậy mô hình cần tìm là $F(t) = 0,406t^3 - 22,36t^2 + 709,1t + 44678,25$.

Số lượng các cặp đôi kết hôn vào năm 2012 là $F(42) = 65097,138$ (triệu người)

Câu 22. Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng) ($x \geq 0$). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -20x + 300$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12000 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất?

Lời giải

Ta có: $T(x) = \int T'(x)dx = \int (-20x + 300)dx = -10x^2 + 300x + C, C \in \mathbb{R}$.

Khi người đó tăng giá cho thuê mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12000 triệu đồng. Nên ứng với $x = 10$ ta có $T(10) = 12000$ suy ra

$$12000 = -10 \cdot 10^2 + 300 \cdot 10 + C \Rightarrow C = 10000.$$

Vậy $T(x) = -10x^2 + 300x + 10000$. Ta có $T(x)$ là một hàm số bậc hai với hệ số $a < 0$ và đồ thị hàm số có đỉnh là $I(15; 12250)$.

Vậy doanh thu cao nhất mà người đó có thể thu về là 12250 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng đã tăng giá cho thuê thêm 15 triệu đồng.

Câu 23. Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 5 \cos t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc $2,5 \text{ m/s}$. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong $\pi(s)$ đầu tiên.

Lời giải

Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = \int a(t)dt = \int 5 \cos t dt = 5 \sin t + C$.

Khi bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc $2,5 \text{ m/s}$ nên ta có:

$$v(0) = 2,5 \Leftrightarrow 5 \sin 0 + C = 2,5 \Leftrightarrow C = 2,5.$$

Suy ra $v(t) = 5 \sin t + 2,5$. Mà $5 \sin t + 2,5 \leq 7,5$. Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{\pi}{2}$. Khi

đó, gia tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ là $a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Câu 24. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc tại thời điểm t ($t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên) cho bởi $v(t) = 180 - 9,8t \text{ (m/s)}$. Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) khi nó đạt độ cao cực đại (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Độ cao $h(t)$ của viên đạn tại thời điểm t là

$$h(t) = \int (180 - 9,8t) dt = 180t - 9,8 \frac{t^2}{2} + C = 180t - 4,9t^2 + C.$$

Thay $t=0$ ta được $h(0)=C=0$. Vậy $h(t)=180t-4,9t^2(m)$.

Viên đạn đạt độ cao cực đại tại thời điểm $t_{\max} = \frac{180}{9,8}$. Khi đó,

$$h_{\max} = 180t_{\max} - 4,9t_{\max}^2 = 1653,1(m).$$

Câu 25. Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t , trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$\int P'(t) dt = \int k\sqrt{t} dt = \frac{2}{3}k\sqrt{t^3} + C = P(t)$$

$$P(0) = \frac{2}{3}k\sqrt{0^3} + C = 500 \Rightarrow C = 500$$

$$P(1) = \frac{2}{3}k\sqrt{1^3} + 500 = 600 \Rightarrow k = 150$$

Vậy số lượng vi khuẩn của quần thể đó được biểu diễn bởi hàm số $P(t) = 100\sqrt{t^3} + 500$

Số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày là: $P(7) = 100\sqrt{7^3} + 500 = 2352$ (con)

Câu 26. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc tại thời điểm $t(t=0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên) cho bởi $v(t) = 150 - 9,8t(m/s)$. Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất). Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của mét).

Lời giải

Độ cao $h(t)$ của viên đạn tại thời điểm t là

$$h(t) = \int (150 - 9,8t) dt = 150t - 9,8 \frac{t^2}{2} + C = 150t - 4,9t^2 + C$$

Thay $t=0$ ta được $h(0)=C=0$.

Vậy $h(t) = 150t - 4,9t^2(m)$.

Viên đạn đạt độ cao lớn nhất tại thời điểm $t_{\max} = \frac{150}{9,8}$. Khi đó

$$h_{\max} = 150t_{\max} - 4,9t_{\max}^2 \approx 1148,0(m).$$

Câu 27. Một hồ nước bị ô nhiễm được xử lí bằng một chất diệt khuẩn. Tốc độ phát triển của số lượng vi

khuẩn sống sót được mô hình bởi $B'(t) = -\frac{3000}{(1+0,2t)^2}, t \geq 0$ với $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước và t là số ngày tính từ khi hồ nước được xử lí. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 10000 con/ml nước. Sử dụng mô hình này xác định lượng vi khuẩn sau 5 ngày.

Cho biết $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$

Lời giải

Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sống sót được mô hình cho bởi công thức đạo hàm

$$B'(t) = -\frac{3000}{(1+0,2t)^2}, t \geq 0$$

Nguyên hàm của $B'(t)$ là hàm $B(t)$ biểu diễn số lượng vi khuẩn sống sót trong ngày thứ t .

Ta có

$$\begin{aligned} B(t) &= \int \frac{-3000}{(1+0,2t)^2} dt = -3000 \int (1+0,2t)^{-2} dt \\ &= 15000(1+0,2t)^{-1} + C = \frac{15000}{1+0,2t} + C. \end{aligned}$$

Vi số lượng vi khuẩn ban đầu là 10000 con / ml nước nên ta có

$$B(0) = 10000 \Rightarrow 15000 + C = 10000 \Rightarrow C = -5000.$$

Vậy hàm số biểu thị số lượng vi khuẩn sống sót tại ngày thứ t là

$$B(t) = \frac{15000}{1+0,2t} - 5000.$$

Số vi khuẩn sau 5 ngày sẽ là $B(5) = 2500(\text{con} / \text{ml})$.

Câu 28. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số

$B'(t) = \frac{1000}{(1+0,3t)^2}, t \geq 2$ trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t . Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng, mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi.

Cho biết $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$

Lời giải

Số lượng vi khuẩn tại ngày thứ t được mô hình bởi hàm số $B(t)$ là nguyên hàm của $B'(t)$. Ta có

$$B(t) = \int \frac{1000}{(1+0,3t)^2} dt = 1000 \int (1+0,3t)^{-2} dt = -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} + C.$$

Số lượng vi khuẩn lúc ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước nên

$$B(0) = 500 \Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3 \cdot 0)} + C = 500$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{11500}{3}.$$

Suy ra hàm số biểu diễn cho số lượng vi khuẩn tại ngày thứ t là:

$$B(t) = -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3}.$$

Số lượng vi khuẩn dưới 3000 con trên mỗi ml nước thì người bơi vẫn an toàn và người bơi không an toàn khi

$$B(t) \geq 3000 \Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3} \geq 3000$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} \geq -\frac{2500}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1+0,3t \geq 4$$

$$\Leftrightarrow t \geq 10.$$

Vậy vào ngày thứ 10 thì số lượng vi khuẩn sẽ là 3000 con và hồ bơi không còn an toàn, cần phải thay nước mới.

Câu 29. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là $h_1 = 280 \text{ cm}$.

Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ

tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau

bao lâu thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Cho biết $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$

Lời giải

Ta biết rằng, chiều cao $h(t)$ của mực nước bơm được chính là nguyên hàm của tốc độ tăng $h'(t)$ của chiều cao mực nước.

$$h(t) = \int h'(t) dt = \int \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3} dt = \frac{3}{2000} (t+3)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Lúc ban đầu (tại $t=0$) hồ bơi không chứa nước, nghĩa là

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2000} (0+3)^{\frac{4}{3}} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}.$$

Suy ra mực nước bơm được tại thời điểm t giây là

$$h(t) = \frac{3}{2000} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}.$$

Theo giả thiết, lượng nước bơm được bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi nên ta có

$$\begin{aligned} h(t) = \frac{3}{4} h_1 &\Leftrightarrow \frac{3}{2000} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000} = \frac{3}{4} \cdot 280 \\ &\Leftrightarrow (t+3)^{\frac{4}{3}} = 140004,33 \\ &\Leftrightarrow t \approx 7234 \text{ (s)}. \end{aligned}$$

Câu 30. Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$, trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 400$), $m(t)$ tính theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là 400000 đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

Lời giải

$$\int m(t) dt = \int (800 - 2t) dt = 800t - t^2 + C$$

Tại $t=0$ thì $M(t)=0 \Leftrightarrow C=0$

Vậy $M(t) = 800t - t^2$

Số ngày công tính đến khi hoàn thành dự án là: $M(400) = 800 \cdot 400 - 400^2 = 160000$ (ngày)

Chi phí nhân công lao động của công trình đó là: $160000 \cdot 400000 = 64$ tỷ VND

Câu 31. Một quần thể vi sinh vật có tốc độ tăng số lượng cá thể được ước lượng bởi $P'(t) = 150\sqrt{t}$ (cá thể/ngày) với $0 \leq t \leq 10$ trong đó $P(t)$ là số lượng cá thể vi sinh vật tại thời điểm t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Biết rằng ban đầu quần thể có 1000 cá thể. Ước lượng số cá thể của quần thể sau 5 ngày kể từ thời điểm ban đầu (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

Lời giải

$$P(t) = \int P'(t) dt = \int 150\sqrt{t} dt = 150 \int t^{\frac{1}{2}} dt = 150 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = 100t\sqrt{t} + C$$

Theo giả thiết, ta có $P(0) = 1000$, suy ra $C = 1000$.

Do đó $P(t) = 100t\sqrt{t} + 1000$

$P(5) = 100 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} + 1000 = 500\sqrt{5} + 1000 \approx 2100$ (cá thể).

Câu 32. Một vật chuyển động thẳng dọc theo một đường thẳng (có gắn trục tọa độ Ox với độ dài đơn vị bằng 1 m). Biết rằng vật xuất phát từ vị trí ban đầu là gốc tọa độ và chuyển động với vận tốc $v(t) = 8 - 0,4t$ (m/s), trong đó t là thời gian tính theo giây ($t \geq 0$).

Hỏi tại thời điểm nào thì vật đi qua gốc tọa độ (không tính thời điểm ban đầu)?

Lời giải

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (8 - 0,4t) dt = 8t - 0,2t^2 + C$$

Ban đầu vật ở gốc tọa độ nên $x(0) = 0$, suy ra $C = 0$, suy ra $x(t) = 8t - 0,2t^2 (t \geq 0)$.

Ta có $x(t) = 0 \Leftrightarrow 8t - 0,2t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 40$.

Vậy vật đi qua gốc tọa độ tại thời điểm $t = 40$ giây (không tính thời điểm ban đầu).

Câu 33. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng (có gắn trục tọa độ Ox với độ dài đơn vị bằng 1m). Biết rằng vật chuyển động với vận tốc (tính theo m/s) là $v(t) = 2t - t^2 (0 \leq t \leq 10)$, tính theo giây) và lúc đầu vật ở vị trí có tọa độ $x_0 = 2$. Tại thời điểm $t = 6$ giây, vật cách vị trí ban đầu bao xa?

Lời giải

$$\text{Ta có } x(t) = \int v(t) dt = \int (2t - t^2) dt = 2 \int t dt - \int t^2 dt = t^2 - \frac{t^3}{3} + C$$

Theo giả thiết, $x(0) = x_0 = 2$, suy ra $C = 2$.

$$\text{Vậy } x(t) = t^2 - \frac{t^3}{3} + 2, 0 \leq t \leq 10$$

$$\text{Ta có } |x(6) - x(0)| = \left| 6^2 - \frac{6^3}{3} + 2 - 2 \right| = |-36| = 36$$

Vậy tại thời điểm $t = 6$, vật cách vị trí ban đầu 36 m.

Câu 34. Giả sử tốc độ tăng trưởng của một quần thể muỗi thỏa mãn công thức $N'(t) = 0,2N(t), 0 \leq t \leq 5$, trong đó t là thời gian tính theo ngày, $N(t)$ là số cá thể muỗi tại thời điểm t . Biết rằng ban đầu quần thể muỗi có 2000 cá thể. Đặt $y(t) = \ln N(t), 0 \leq t \leq 5$. Chứng tỏ rằng $y'(t) = 0,2$. Từ đó, tìm được $N(t)$ với $0 \leq t \leq 5$.

Khí đó, hãy tìm số lượng cá thể của quần thể muỗi sau 3 ngày (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

Lời giải

$$y'(t) = [\ln N(t)]' = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{0,2N(t)}{N(t)} = 0,2$$

$$\text{Suy ra } y(t) = \int y'(t) dt = \int 0,2 dt = 0,2t + C$$

Do đó, $\ln N(t) = 0,2t + C$, suy ra $N(t) = e^{0,2t+C} = C_0 \cdot e^{0,2t}$ (với $C_0 = e^C$).

Ta có $N(0) = 2000$, suy ra $C_0 = 2000$, suy ra $N(t) = 2000 \cdot e^{0,2t}, 0 \leq t \leq 5$.

$$N(3) = 2000 \cdot e^{0,23} \approx 3600 \text{ (cá thể)}.$$

Câu 35. Trong một dịch cúm, tốc độ tăng số trường hợp mắc bệnh của một thành phố được ước lượng bởi $N'(t) = 10 \cdot e^{0,2t}$ (trường hợp/ngày) trong đó $N(t)$ là số trường hợp mắc bệnh sau thời gian t ngày kể

từ khi bắt đầu dịch. Biết rằng thời điểm bắt đầu dịch có 5 trường hợp mắc bệnh. Ước lượng số trường hợp mắc bệnh của thành phố sau 10 ngày dịch bắt đầu.

Lời giải

Ta có
$$N(t) = \int N'(t) dt = \int 10 \cdot e^{0.2t} dt = 10 \int (e^{0.2})^t dt = 10 \cdot \frac{e^{0.2t}}{\ln e^{0.2}} + C = 50 \cdot e^{0.2t} + C.$$

Theo giả thiết, $N(0) = 5$ suy ra $50 + C = 5$, suy ra $C = -45$.

Vậy
$$N(t) = 50 \cdot e^{0.2t} - 45.$$

$$N(10) = 50 \cdot e^{0.2 \cdot 10} - 45 \approx 324 \text{ (trường hợp).}$$

Vậy sau 10 ngày kể từ khi dịch bắt đầu, thành phố có khoảng 324 trường hợp mắc bệnh.

Câu 36. Khi nghiên cứu dịch sốt xuất huyết ở một địa phương, các chuyên gia y tế ước tính rằng tại ngày thứ m có $F(m)$ người mắc bệnh (sau khi đã làm tròn đến chữ số hàng đơn vị). Biết rằng tốc độ lan truyền bệnh là $F'(m) = \frac{150}{2m+1}$ và ngày đầu tiên ($m=0$) người ta phát hiện ra 50 bệnh nhân. Hãy xác định biểu thức của $F(m)$ và số người mắc bệnh ở ngày thứ 10.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$F(m) = \int F'(m) dm = \int \frac{150}{2m+1} dm = 75 \ln |2m+1| + C$$

$$F(0) = C = 50$$

Vậy
$$F(m) = 75 \ln |2m+1| + 50.$$

Số người mắc bệnh ở ngày thứ 10 là: $F(10) \approx 278.$

Câu 37. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$, trong đó $f(x) > 0 (\forall x \in \mathbb{R})$. Biết rằng $\int f(x) dx = f(x) + C$ và $\int f(x) \cdot g(x) dx = (5x - 2) \cdot f(x) + C$. Tìm số thực a thoả mãn $g(a) + g'(a) = 3$.

Lời giải

Ta có
$$\int f(x) dx = f(x) + C \Rightarrow f(x) = f'(x)$$

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = (5x - 2) \cdot f(x) + C \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 5f(x) + 5xf'(x) - 2f'(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 5f(x) + 5xf'(x) - 2f'(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)(g(x) - 3 - 5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) - 3 - 5x = 0 \text{ (vì } f(x) > 0)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 5x + 3 \Rightarrow g'(x) = 5$$

$$\Rightarrow g(a) + g'(a) = 5a + 3 + 5 = 3 \Rightarrow a = -1.$$

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thoả mãn $\int \frac{\sqrt{x} + f'(x)}{2} dx = \frac{x^3}{2} + x\sqrt{x} + C$. Biết rằng $f(0) = 2$, tính $f(9)$.

Lời giải

$$\int \frac{\sqrt{x} + f'(x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int \left(x^{\frac{1}{2}} + f'(x) \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + f(x) \right) = \frac{1}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{2} f(x) + C_1 \text{ Có}$$

$$\frac{1}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{2} f(x) + C_1 = \frac{x^3}{2} + x\sqrt{x} + C \Rightarrow \frac{1}{2} f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C + C_1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + \frac{4}{3} x\sqrt{x} + 4(C + C_1)$$

$$\text{Mà } f(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = 4(C + C_1) \Rightarrow C + C_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + \frac{4}{3} x\sqrt{x} + 2$$

$$\Rightarrow f(9) = 767$$

Câu 39. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng

$f'(x) = 6x + 4 \sin x - 3 \cos x, f(0) = 1, F(0) = 2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

Lời giải

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x + 4 \sin x - 3 \cos x) dx = 3x^2 - 4 \cos x - 3 \sin x + C$$

$$\text{Có } f(0) = 1 \Rightarrow -4 + C = 1 \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 - 4 \cos x - 3 \sin x + 5$$

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int (3x^2 - 4 \cos x - 3 \sin x + 5) dx$$

$$= x^3 - 4 \sin x + 3 \cos x + 5x + C$$

$$\text{Mà } F(0) = 2 \Rightarrow 3 + C = 2 \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow F(x) = x^3 - 4 \sin x + 3 \cos x + 5x - 1$$

$$\text{Suy ra } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 4 \sin \frac{\pi}{2} + 3 \cos \frac{\pi}{2} + 5 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \approx 10$$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = 2x + 1$ và $f(1) = 5$. Phương trình $f(x) = 5$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính tổng $S = \log_2 |x_1| + \log_2 |x_2|$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x + 1) dx = x^2 + x + C$$

$$\text{Mà } f(1) = 5 \Leftrightarrow 1 + 1 + C = 5 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = x^2 + x + 3$$

$$\text{Xét phương trình: } f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$S = \log_2 |x_1| + \log_2 |x_2| = \log_2 |1| + \log_2 |-2| = 1$$

Câu 41. (Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019) Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x - \cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Vì $(F(x))' = f(x)$ nên ta xét sự đổi dấu của hàm số $f(x)$ để tìm cực trị hàm số đã cho.

Ta xét hàm số $g(x) = x - \cos x$, ta có $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0 \forall x$.

Vì vậy $g(x)$ là hàm số đồng biến trên toàn trục số.

Hơn nữa ta có $\begin{cases} g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0 \\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0 \end{cases}$, do đó $g(x) = 0$ có duy nhất nghiệm $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	-	0	+

Kết luận hàm số đã cho có một cực trị.

Câu 42. (Sở Lạng Sơn 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = e$ và $f'(x) + f(x) = x, x \in \mathbb{R}$. Giá trị $f(2)$ bằng

Lời giải

Ta có:

$$f'(x) + f(x) = x \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = xe^x \Leftrightarrow (e^x \cdot f(x))' = xe^x$$

$$\text{Nên } \int (e^x \cdot f(x))' dx = \int xe^x dx \Leftrightarrow e^x \cdot f(x) = xe^x - e^x + C \Rightarrow f(x) = \frac{xe^x - e^x + C}{e^x}$$

$$\text{Do } f(1) = e \Rightarrow f(1) = \frac{e^1 - e^1 + C}{e^1} \Rightarrow C = e^2$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{xe^x - e^x + e^2}{e^x}$$

$$f(2) = \frac{2 \cdot e^2 - e^2 + e^2}{e^2} = 2$$

Câu 43. (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh – 2022) Cho hàm số $y = f(x) > 0$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = e^3$. Biết $f'(x) = (2x - 3)f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi phương trình $f(x) = e^{2x^4 - 3x + 4}$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 3)f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x - 3 \\ \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \int (2x - 3) dx \Rightarrow \ln f(x) = x^2 - 3x + C, (f(x) > 0); f(1) = e^3 \\ \Rightarrow 3 &= C - 2 \Leftrightarrow C = 5 \Rightarrow \ln f(x) = x^2 - 3x + 5 \\ \Leftrightarrow f(x) &= e^{x^2 - 3x + 5} \Rightarrow f(x) = e^{2x^4 - 3x + 4} \\ \Leftrightarrow e^{x^2 - 3x + 5} &= e^{2x^4 - 3x + 4} \Leftrightarrow 2x^4 - 3x + 4 = x^2 - 3x + 5 \Leftrightarrow x = \pm 1. \end{aligned}$$

Câu 44. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$$F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\frac{17\pi}{2}; \frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$$

Suy ra

Vậy $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \dots + \tan 10\pi + 9 = 44.$

Câu 45. (Đề minh họa 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x^2 + 2) dx = 4x^3 + 2x + C_1$

Mà $f(1) = 3$ nên $4 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = -3$

$$\text{Đ } f(x) = 4x^3 + 2x - 3$$

$$\text{Lại có } F(x) = \int f(x) dx = \int (4x^3 + 2x - 3) dx = x^4 + x^2 - 3x + C_2$$

$$\text{Hơn nữa, } F(0) = 2 \Rightarrow 0^4 + 0^2 - 3 \cdot 0 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 2$$

$$\text{Đ } F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$$

$$\text{Suy ra } F(1) = 1^4 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1$$

Câu 46. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2x \cdot f'(x) + f(x) = 3x^2 \sqrt{x}, \forall x \in (0; +\infty)$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$, tính $f(4)$.

Lời giải

$$2x \cdot f'(x) + f(x) = 3x^2 \sqrt{x}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(x) = \frac{3x^2}{2}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot f'(x) + (\sqrt{x})' \cdot f(x) = \frac{3x^2}{2}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{x} \cdot f(x)]' = \frac{3x^2}{2}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = \int \frac{3x^2}{2} dx = \frac{x^3}{2} + C \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = \frac{x^3}{2} + C (*)$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào } (*) \text{ ta được: } f(1) = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = f(1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Vậy } f(4) = 16$$

Câu 47. (Sở Nam Định 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $(1+x^2)f'(x) - 1 = 3x^4 + 4x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x^2)$ và $F(0) = 10$, hãy tính $F(2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (1+x^2)f'(x) - 1 = 3x^4 + 4x^2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3x^4 + 4x^2 + 1}{1+x^2}$$

Suy ra

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3x^4 + 4x^2 + 1}{1+x^2} dx = \int \frac{3x^2(x^2+1) + (x^2+1)}{1+x^2} dx = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C$$

Do $f(1)=0 \Leftrightarrow 2+C=0 \Leftrightarrow C=-2$

Vậy $f(x)=x^3+x-2$. Suy ra $f(x^2)=(x^2)^3+x^2-2=x^6+x^2-2$

Do $F(x)=\int_{21} f(x^2)dx=21\int f(x^2)dx=21\int(x^6+x^2-2)dx=21\left(\frac{x^7}{7}+\frac{x^3}{3}-2x\right)+D$

Mặt khác $F(0)=10 \Leftrightarrow D=10$. Suy ra $F(x)=3x^7+7x^3-42x+10$

Vậy ta có $F(2)=3.2^7+7.2^3-42.2+10=366$

Câu 48. (Sở Thái Nguyên 2023) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$, đồng thời thỏa mãn $f(x) \cdot f'(x) - [f(x)]^2 = 2e^{6x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $f(1)=a \cdot e^b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị $a+b$ bằng

Lời giải

$$+f(x) \cdot f'(x) - [f(x)]^2 = 2e^{6x} \Leftrightarrow 2e^{-2x} [f(x) \cdot f'(x) - f^2(x)] = 4e^{4x}$$

$$\Leftrightarrow [e^{-2x} \cdot f^2(x)]' = 4e^{4x} \Rightarrow e^{-2x} \cdot f^2(x) = e^{4x} + C.$$

$$+f(0)=1 \Rightarrow e^0 \cdot f^2(0) = e^0 + C \Rightarrow C=0.$$

$$+f(1)=a \cdot e^b \Rightarrow e^{-2} \cdot f^2(1) = e^4 \Rightarrow f^2(1) = e^6 \Rightarrow f(1) = e^3.$$

Vậy $a=1, b=3 \Rightarrow a+b=4$

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)=ax^2+\frac{b}{x^3}, f(1)=3, f(1)=2, f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{12}$. Khi đó $2a+b$ bằng

Lời giải

Ta có $f(1)=3 \Rightarrow a+b=3$ (1)

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, các điểm $x=1, x=\frac{1}{2}$ đều thuộc $(0; +\infty)$ nên

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (2ax-\frac{3b}{x^4})dx=\frac{ax^3}{3}-\frac{b}{2x^2}+C$$

$$+f(1)=2 \Rightarrow \frac{a}{3}-\frac{b}{2}+C=2$$
 (2)

$$+f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24}-2b+C=-\frac{1}{12}$$
 (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình $\begin{cases} a+b=3 \\ \frac{a}{3}-\frac{b}{2}+C=2 \\ \frac{a}{24}-2b+C=-\frac{1}{12} \end{cases}$ U $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ C=\frac{11}{6} \end{cases}$ và $2a+b=2.2+1=5$.

Câu 50. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3 f^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Lời giải

Ta có $f'(x)=x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C$

Mà $f(2)=-\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{19}{4} = \frac{16}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}$. Suy ra $f(x) = -\frac{4}{x^4+3}$.

Vậy $f(1) = -1$.

Câu 51. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

Lời giải

$$f(x)-xf'(x)=-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow \frac{1.f(x)-x.f'(x)}{x^2} = \frac{-2x^3-3x^2}{x^2} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = 2x+3$$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2x+3$.

Ta có $\int (2x+3)dx = x^2+3x+C, C \in \mathbb{R}$.

Do đó, $\frac{f(x)}{x} = x^2+3x+C_1$, (1) với $C_1 \in \mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1)=4$ theo giả thiết, nên thay $x=1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1=0$, từ đó $f(x)=x^3+3x^2$. Vậy $f(2)=20$.

Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x)-x^2.f'(x)=2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0;+\infty)$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tính $M-m$.

Lời giải

Ta có: $3x.f(x) - x^2.f'(x) = 2f^2(x) \Rightarrow 3x^2.f(x) - x^3.f'(x) = 2x.f^2(x)$

$$\Rightarrow \frac{3x^2.f(x) - x^3.f'(x)}{f^2(x)} = 2x \quad \text{vì } f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = \int 2x dx = x^2 + C$$

Mà $f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$

Ta có: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty)$

Vậy, hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mà $[1; 2] \subset (0; +\infty)$ nên hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Suy ra, $M = f(2) = \frac{4}{3}; m = f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow M - m = 1$