|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **THANH HÓA**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH**  **NĂM HỌC 2021-2022**  **Ngày thi : 26/12/2021**  **MÔN THI: TOÁN – THCS**  *Thời gian làm bài : 150 phút* |

**Câu I. (4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức :

với 

1. Cho là các số thực dương thỏa mãn điều kiện Tính giá trị biểu thức 

**Câu II. (4,0 điểm)**

1. Giải phương trình 
2. Giải hệ phương trình 

**Câu III. (4,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương thỏa mãn phương trình



1. Cho ba số tự nhiên thỏa mãn là số nguyên tố và . Chứng minh là số chính phương

**Câu IV. (6,0 điểm)** Cho nửa đường tròn đường kính và C là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó khác A và B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa nửa đường tròn vẽ các tia tiếp tuyến và By. Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia theo thứ tự tại . Gọi I là giao điểm của và cắt tại H

1. Chứng minh song song với và I là trung điểm của đoạn thẳng 
2. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với cạnh tại K. Chứng minh rằng 
3. Qua C vẽ đường thẳng song song với cắt tia tại F. Gọi M là giao điểm của và BC. Xác định vị trí của điểm trên nửa đường tròn sao cho tam giác có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo 

**Câu V. (2,0 điểm)** Cho là các số thực dương. Chứng minh rằng :



**ĐÁP ÁN**

**Câu I. (4,0 điểm)**

1. **Rút gọn biểu thức :**

**với **

****

1. **Cho là các số thực dương thỏa mãn điều kiện Tính giá trị biểu thức **

Ta có 

Tương tự ta cũng có : 

Do đó 

**Câu II. (4,0 điểm)**

1. **Giải phương trình **

ĐKXĐ: 

Đặt . Ta có :



Vậy phương trình có nghiệm 

1. **Giải hệ phương trình **

ĐKXĐ: . Cộng theo vế các phương trình của hệ ta có :



Vậy hệ phương trình có tập nghiệm 

**Câu III. (4,0 điểm)**

1. **Tìm tất cả các cặp số nguyên dương thỏa mãn phương trình**

****

Đặt . Vì . Ta có :





Vì b là số nguyên nên 

Với 

Với thì b không là số nguyên

Vậy 

1. **Cho ba số tự nhiên thỏa mãn là số nguyên tố và . Chứng minh là số chính phương**

Ta có 

Giả sử 

Vì là số nguyên tố nên 

Xét Suy ra tồn tại sao cho 

, thay vào (\*) ta có là số chính phương, mà và là hai số tự nhiên liên tiếp nên 

Khi đó là số chính phương

Xét tồn tại sao cho là số nguyên tố, mà 

Kết hợp với ta có là số chính phương.

**Câu IV. (6,0 điểm) Cho nửa đường tròn đường kính và C là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó khác A và B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa nửa đường tròn vẽ các tia tiếp tuyến và By. Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia theo thứ tự tại . Gọi I là giao điểm của và cắt tại H**

****

1. **Chứng minh song song với và I là trung điểm của đoạn thẳng **

Áp dụng định lý Ta-let ta có :

hay 

Mặt khác hay I là trung điểm của 

1. **Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với cạnh tại K. Chứng minh rằng **

Đường tròn nội tiếp tiếp xúc với lần lượt tại . Ta có



Tương tự ta cũng có :





1. **Qua C vẽ đường thẳng song song với cắt tia tại F. Gọi M là giao điểm của và BC. Xác định vị trí của điểm trên nửa đường tròn sao cho tam giác có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo **

Kẻ tại N. Dễ dàng chứng minh được là hình chữ nhật. Đặt 

Ta có 

Áp dụng bđt Cosi, ta có :



Suy ra . Diện tích lớn nhất khi MN lớn nhất (vì cố định), hay 

Dấu bằng xảy ra khi . Điểm C nằm trên nửa đường tròn (O) sao cho . Khi đó 

**Câu V. (2,0 điểm) Cho là các số thực dương. Chứng minh rằng :**

****

Ta có : 

. Áp dụng bất đẳng thức Svacxo ta có:



Áp dụng bất đẳng thức phụ ta có :

. Tương tự ta cũng có :



Từ và (2) suy ra . Dấu bằng xảy ra khi 