SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO
KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023
Môn: Toán

TÊN CHUYÊN ĐỀ: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ SỰ TƯƠNG GIAO

Người biên soạn: Nguyễn Văn Thuy - Nguyễn Đức Nhật.
Đơn vị công tác: Trường THPT Gia Bình số 1.
NỘI DUNG TRỌNG TÂM: *Bài toán về hàm hợp, bài toán chứa tham số*

I. Hệ thống kiến thức liên quan.

- Quy trình khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số
- Tương giao của hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$: Số giao điểm của hai đồ thị là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$(1) và nghiệm của phương trình (1) cũng chính là hoành độ của giao điểm.

II. Các dạng bài/câu thường gặp

Dạng 1: Bài toán tương giao với hàm xác định.

Dạng 1.1 Bài toán tương giao của đường thẳng với đồ thị hàm số bậc 3

Bài toán tổng quát: Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K ? **(dạng có điều kiện)**

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$

Đưa về phương trình bậc ba và nhẩm nghiệm đặc biệt $x = x_o$ để chia Hoocner được:

$$(x - x_o)\cdot(ax^2 + b'x + c') = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_o \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{array}\right..$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_o \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_o) \neq 0 \end{cases}$. Giải hệ này, tìm được giá trị $m \in D_1$.

Bước 3. Gọi $A(x_o; px_o + q)$, $B(x_1; px_1 + q)$, $C(x_2; px_2 + q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b'}{a}$ và $x_1x_2 = \dfrac{c'}{a}$ (1)

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của x_1, x_2 (2)

Thế (1) vào (2) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m. Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến cấp số

Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ *có* 3 *nghiệm phân biệt.*

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số** $y=ax^3+bx^2+cx+d$ **cắt trục hoành tại** 3 **điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1,x_2,x_3 *là nghiệm của phương trình* $ax^3+bx^2+cx+d=0$

Khi đó: $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, *đồng nhất hệ số ta được* $x_2=\sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$

Thế $x_2=\sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$ *vào phương trình* $ax^3+bx^2+cx+d=0$ *ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.*

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ *có* 3 *nghiệm phân biệt.*

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3mx^2+2m=0\ \left(*\right)$

Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng $\longrightarrow$ phương trình có một nghiệm $x_0=-\frac{b}{3a}$.

Suy ra phương trình $\left(*\right)$ có một nghiệm $x=m.$

Thay $x=m$ vào phương trình $\left(*\right)$, ta được

$m^3-3m.m^2+2m=0\Leftrightarrow -2m^3+2m=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1\\ m=0\end{array}\right.$.

Thử lại:

● Với $m=1$, ta được $x^3-3x^2+2=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{3}\\ x=1\\ x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Do đó $m=1$ thỏa mãn.

● Với $m=-1$, ta được $x^3+3x^2-2=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{3}\\ x=-1\\ x=-1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Do đó $m=-1$ thỏa mãn.

● Với $m=0$, ta được $x^3=0\Leftrightarrow x=0$.

Do đó $m=0$ không thỏa mãn.

Vậy $m=\pm 1$ là hai giá trị cần tìm. **Chọn B**

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị $\left(C_m\right)$ và đường thẳng $d:y=m^2x+2m^3$. Biết rằng $m_1,m_2\left(m_1>m_2\right)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C_m\right)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là ***đúng*** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2?

A. $m_1 + m_2 = 0$. **B.** $m_1^2 + 2m_2 > 4$. **C.** $m_2^2 + 2m_1 > 4$. **D.** $m_1 - m_2 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(C_m\right)$

$x^3 + 3mx^2 - m^3 = m^2x + 2m^3$

$\Leftrightarrow x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^3 - m^2x\right) + \left(3mx^2 - 3m^3\right) = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - m^2\right) + 3m\left(x^2 - m^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + 3m\right)\left(x^2 - m^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3m \\ x = m \\ x = -m \end{array}\right.$

Để đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C_m\right)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + \left(-m\right)^4 + \left(-3m\right)^4 = 83$

$\Leftrightarrow 83m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy $m_1 = 1, m_2 = -1$ hay $m_1 + m_2 = 0$. **Chọn A**

Ví dụ 3. (Mã 123 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$

A. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$ **B.** $m \in \left(-2; +\infty\right)$ **C.** $m \in \mathbb{R}$ **D.** $m \in \left(-\infty; 0\right) \cup \left[4; +\infty\right)$

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - mx + m + 1 = 0 \quad \left(1\right)$

$\Leftrightarrow \left(x - 1\right)\left(x^2 - 2x - m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 \end{array}\right.$.

Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ 1 - 2 - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$.

Với $m > -2$ thì phương trình $\left(1\right)$ có ba nghiệm phân biệt là $1, x_1, x_2$ (x_1, x_2 là nghiệm của $x^2 - 2x - m - 1 = 0$). Mà $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$ suy ra điểm có hoành độ $x = 1$ luôn là trung điểm của hai điểm còn lại nên luôn có 3 điểm A,B,C thoả mãn $AB = BC$ Vậy $m > -2$.**Chọn B**

Ví dụ 4. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + \left(m^2 - 2\right)x + 2m^2 + 4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

A. $m = \pm 2$. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = \pm\sqrt{3}$. **D.** $m = \pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là $B\left(0;2m^2+4\right)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là:

$$x^3+\left(m^2-2\right)x+2m^2+4=0 \Leftrightarrow \left(x+2\right)\left(x^2-2x+m^2+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ \left(x-1\right)^2+m^2+1=0 \quad \left(vn\right)\end{array}\right.$$

Giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là $A\left(-2;0\right)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.2.\left(2m^2+4\right)=8 \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$. **Chọn D**

Ví dụ 5. Cho đồ thị hàm số $f\left(x\right)=x^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{f'\left(x_1\right)}+\dfrac{1}{f'\left(x_2\right)}+\dfrac{1}{f'\left(x_3\right)}$.

A. $P=3+2b+c$. **<u>B</u>.** $P=0$. **C.** $P=b+c+d$. **D.** $P=\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{c}$.

Lời giải

Vì x_1,x_2,x_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba $f\left(x\right)=0$

$\Rightarrow f\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$

Ta có $f'\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)+\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)+\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)$.

Khi đó: $\begin{cases} f'\left(x_1\right)=\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right) \\ f'\left(x_2\right)=\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_1\right) \\ f'\left(x_3\right)=\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)\end{cases}$

Suy ra $P=\dfrac{1}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\dfrac{1}{\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_1\right)}+\dfrac{1}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}$.

$=\dfrac{\left(x_2-x_3\right)-\left(x_1-x_3\right)+\left(x_1-x_2\right)}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)\left(x_2-x_3\right)}=0$. **Chọn B**

Dạng 1.2. Bài toán tương giao của đường thẳng với đồ thị hàm số nhất biến

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Tìm tham số m để đường thẳng $d:y=\alpha x+\beta$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ thỏa mãn điều kiện K?

Phương pháp giải

 <u>Bước 1</u>. (Bước này giống nhau ở các bài toán tương giao của hàm nhất biến)

Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và $\left(C\right)$: $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\alpha x+\beta$

$\Leftrightarrow g\left(x\right)=\alpha cx^2+\left(\beta c+\alpha d-a\right)x+\beta d-b=0,\ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}$.

- Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có 2 nghiệm nghiệm phân biệt $\neq -\dfrac{d}{c}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c\alpha \neq 0;\ \Delta > 0 \\ g\left(-\dfrac{d}{c}\right) \neq 0 \end{cases}$. Giải hệ này, ta sẽ tìm được $m \in D_1\ (i)$

-Gọi $A(x_1;\alpha x_1+\beta)$, $B(x_2;\alpha y_2+\beta)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $g(x)=0$

Theo Viét: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta c + \alpha d - a}{c\alpha}$; $P = x_1x_2 = \dfrac{\beta d - b}{\alpha c}\ (ii)$

 Bước 2.

-Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của $x_1, x_2\ (iii)$

-Thế (ii) vào (iii) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m.

Giải nó sẽ tìm được $m \in D_2\ (*)$

-Từ $(i),(*) \Rightarrow m \in (D_1 \cap D_2)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến tương giao giữa đường thẳng $y = kx + p$ và đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Giả sử $d: y = kx + p$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tại 2 điểm phân biệt M, N.

Với $kx + p = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ cho ta phương trình có dạng: $Ax^2 + Bx + C = 0$ thỏa điều kiện $cx + d \neq 0$, có $\Delta = B^2 - 4AC$. Khi đó:

1). $M(x_1;kx_1+p), N(x_2;kx_2+p) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; k(x_2 - x_1)) \Rightarrow MN = \sqrt{(k^2+1)\dfrac{\Delta}{A^2}}$

Chú ý: khi $\min MN$ thì tồn tại $\min \Delta, k = const$

2). $OM^2 + ON^2 = (k^2+1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)2kp + 2p^2$

3). $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = (x_1.x_2)(1+k^2) + (x_1 + x_2)kp + p^2$

4). $OM = ON \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(1 + k^2) + 2kp = 0$

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}\ (C)$ và đường thẳng $d: y = -x + m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Xét phương trình $\dfrac{x}{x-1} = -x + m$, (điều kiện $x \neq 1$).

Phương trình tương đương $x^2 - mx + m = 0\ (1)$.

Đồ thị (C) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ điều kiện cần và đủ là $m < 0 \vee m > 4$.

Khi đó hai giao điểm là $A(x_1; -x_1 + m)$; $B(x_2; -x_2 + m)$.

Ta có $OA=\sqrt{m^2-2m};OB=\sqrt{m^2-2m};AB=\sqrt{2(m^2-4m)}$; $d\left(O,d\right)=\dfrac{\left|m\right|}{\sqrt{2}}$.

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}.AB.d\left(O,d\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\left|m\right|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2(m^2-4m)}=\dfrac{OA.OB.AB}{4R}$.

Suy ra $\dfrac{1}{2}.\dfrac{\left|m\right|}{\sqrt{2}}\sqrt{2(m^2-4m)}=\dfrac{(m^2-2m).\sqrt{2(m^2-4m)}}{4.2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow m^2-2m=4\left|m\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0\ (l) \\ m=6\ (n) \\ m=-2\ (n)\end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần từ của S bằng 4. **Chọn A**

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị $\left(C\right)$ và đường thẳng $d:y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G\left(2;-2\right)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Giá trị của m bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** -9. **D.** 5.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có $y'=\dfrac{-2}{\left(x+1\right)^2}<0$, $\forall x\in D$ và đường thẳng $d:y=x-m$ có hệ số $a=1>0$ nên d luôn cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt $A\left(x_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B\right)$ với mọi giá trị của tham số m.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(C\right)$ là: $\dfrac{x+3}{x+1}=x-m$

$\Leftrightarrow x^2-mx-m-3=0\quad\left(x\neq-1\right)$.

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2-mx-m-3=0$.

Theo định lí Viet, ta có $x_A+x_B=m$.

Mặt khác, $G\left(2;-2\right)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A+x_B+x_O=3x_G$

$\Leftrightarrow x_A+x_B=6\ \Leftrightarrow m=6$.

Vậy $m=6$ thoả mãn yêu cầu đề bài. **Chọn A**

Ví dụ 3. Tìm m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm A,B sao cho độ dài AB là nhỏ nhất.

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Gọi hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị là $\left(C\right)$ và đường thẳng $y=2x+m$ có đồ thị là $\left(d\right)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và $\left(d\right)$: $\dfrac{x+3}{x+1}=2x+m,\ \forall x\neq-1.$

$\Leftrightarrow x+3=2x^2+2x+mx+m\ \Leftrightarrow 2x^2+\left(m+1\right)x+m-3=0,\ \forall x\neq1\quad\left(1\right)$

Để $\left(d\right)$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm $A,B\Leftrightarrow$ Phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases}$ với $g(x) = 2x^2 + (m+1)x + m - 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4.2.(m-3) > 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m + 25 > 0,\ \forall m.$

Giả sử hoành độ giao điểm của (C) và (d) là x_1, x_2. Khi đó $A(x_1; 2x_1 + m)$ $B(x_2; 2x_2 + m)$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{m+1}{2}$; $x_1x_2 = \dfrac{m-3}{2}$

Ta có $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (2x_2 - 2x_1)^2} = \sqrt{5(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2}$

$AB = \sqrt{5.\left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2 - 20.\dfrac{m-3}{2}} = \sqrt{\dfrac{5m^2 + 10m + 5 - 40m + 120}{4}}$

$= \dfrac{\sqrt{5(m-3)^2 + 80}}{2} \geq 2\sqrt{5}.$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $m = 3$.

Vậy $m = 3$ thì độ dài AB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{5}$. **Chọn D**

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}$ (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = -1$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = -\dfrac{2}{3}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\dfrac{x}{1-x} = mx - m - 1$ (đk: $x \neq 1$)

$\Rightarrow x = (1-x)(mx - m - 1)$

$\Leftrightarrow x = mx - m - 1 - mx^2 + mx + x$

$\Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0$ (*)

Để (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m+1) = -m > 0 \\ m - 2m + m + 1 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m < 0$

Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$. Theo hệ thức viét : $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = \dfrac{m+1}{m}$

$\Rightarrow y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) - 2m - 2 = 2m - 2m - 2 = -2$

và $y_1.y_2 = (mx_1 - m - 1)(mx_2 - m - 1) = m^2x_1x_2 - m(m+1)(x_1 + x_2) + (m+1)^2$

$= m(m+1) - 2m(m+1) + (m+1)^2 = m + 1$

Ta có: $AM^2 + AN^2 = (x_1 + 1)^2 + (y_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2$

$=\left(x_1+x_2+2\right)^2-2\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)+\left(y_1+y_2-2\right)^2-2\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)$

$=\left(x_1+x_2+2\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1+x_2+1\right)+\left(y_1+y_2-2\right)^2-2\left(y_1y_2-\left(y_1+y_2\right)+1\right)$

$=\left(2+2\right)^2-2\left(\dfrac{m+1}{m}+2+1\right)+\left(-2-2\right)^2-2\left(m+1-\left(-2\right)+1\right)$

$=18-2\left(\dfrac{m+1}{m}\right)-2m=18-2-2.\dfrac{1}{m}-2m=16+2.\left[\dfrac{1}{-m}+(-m)\right]\geq 16+2.2=20$ (Áp dụng BĐT Côsi)

Suy ra: AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất là 20 khi $\dfrac{1}{-m}=-m\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$

Vậy $m=-1$ (vì $m<0$). **Chọn A**

Ví dụ 5. Giá trị k thỏa mãn đường thẳng $d:y=kx+k$ cắt đồ thị $\left(H\right):y=\dfrac{x-4}{2x-2}$ tại hai điểm phân biệt A,B cùng cách đều đường thẳng $y=0$. Khi đó k thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-2;-1\right)$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ các giao điểm: $kx+k=\dfrac{x-4}{2x-2}$ (điều kiện: $x\neq 1$).

$\Rightarrow 2kx^2-x-2k+4=0\ \left(1\right)$.

Đường thẳng d cắt đồ thị $\left(H\right)$ tại hai điểm phân biệt A,B khi và chỉ khi phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}k\neq 0\\2k-1-2k+4\neq 0\\1-4.2k.(4-2k)>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}k\neq 0\\16k^2-32k+1>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}k\neq 0\\\left[\begin{array}{l}k>\dfrac{4+\sqrt{15}}{4}\\k<\dfrac{4-\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.\end{cases}$.

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\left(1\right)$, ta có: $A\left(x_1;kx_1+k\right),B\left(x_2;kx_2+k\right)$. Do A,B cách đều đường thẳng $y=0$ nên $\left|kx_1+k\right|=\left|kx_2+k\right|\Leftrightarrow kx_1+k=-kx_2-k$ (vì A,B là hai điểm phân biệt) $\Leftrightarrow x_1+x_2=-2\Rightarrow \dfrac{1}{2k}=-2$ (áp dụng Viet) $\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{4}$(thỏa mãn điều kiện).

Chọn C

Dạng 1.3. Bài toán tương giao của đường thẳng với hàm số trùng phương

. **Bài toán tổng quát**: Tìm m để đường thẳng $d:y=\alpha$ cắt đồ thị $(C):y=f(x;m)=ax^4+bx^2+c$ tại *n* điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện *K* cho trước?

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4+bx^2+c-\alpha=0$ (1)

Đặt $t=x^2\geq 0$ thì $(1)\Leftrightarrow at^2+bt+c-\alpha=0$ (2)

Tùy vào số giao điểm *n* mà ta biện luận để tìm giá trị $m\in D_1$. Cụ thể:

- Để $d\cap(C)=n=4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa điều kiện: $0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$

• Để $d \cap (C) = n = 3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa điều kiện: $0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \dfrac{b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$

• Để $d \cap (C) = n = 2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ac < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow m \in D_1.$

• Để $d \cap (C) = n = 1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm kép $= 0$ hoặc $\begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ c - \alpha = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$

Bước 2. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của $t_1,\ t_2$ (3)

Thế biểu thức tổng, tích vào (3) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải chúng ta sẽ tìm được $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

 Biểu diễn nghiệm của phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ qua các nghiệm của phương trình $at^2 + bt + c = 0$.

Ta có: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)*, đặt* $t = x^2 \geq 0$*, thì có:* $at^2 + bt + c = 0$ (2)

Để (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt thì* (2) *có hai nghiệm phân biệt dương, tức là:* $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1.t_2 > 0 \end{cases}$

Khi đó (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt lần lượt là* $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + (m-2)x^2 + 8x + 4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

A. 8. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 4x^3 + (m-2)x^2 + 8x + 4 = 0$ (*)

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + (m-2)x^2 + 8x + 4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 $\Leftrightarrow$ (*) có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

$(*) \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 8x + 4 = (2-m)x^2$

$\Leftrightarrow 2 - m = x^2 - 4x + \dfrac{8}{x} + \dfrac{4}{x^2}$

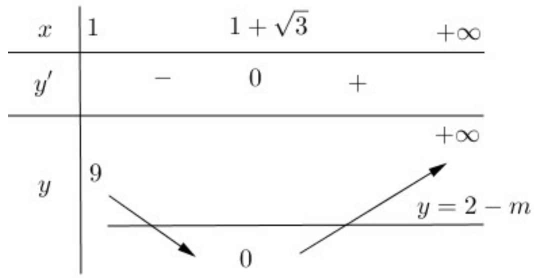
Đây là phương trình hoành độ giao điểm của $(C): y = x^2 - 4x + \dfrac{8}{x} + \dfrac{4}{x^2}$ $(x > 1)$ với đường thẳng $y = 2 - m$ song song với trục hoành.

Xét hàm số $y = x^2 - 4x + \dfrac{8}{x} + \dfrac{4}{x^2}$ $(x > 1)$.

$$y' = 2x - 4 - \frac{8}{x^2} - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 4x^3 - 8x - 8}{x^2}.$$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{3}\ (L) \\ x = 1 + \sqrt{3}\ (t/m) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, ycbt $\Leftrightarrow 0 < 2 - m < 9 \Leftrightarrow -7 < m < 2$.

Vì m nguyên nên $m \in \{-6, -5, ..., 1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa bài toán. **Chọn A**

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m$ (với m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a;b)$ (với $a, b \in \mathbb{Q}$, a, b là phân số tối giản). Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

A. -63. **B.** 63. **<u>C</u>.** 95. **D.** -95.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4 + 2mx^2 + m = -3$.

Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 + 2mt + m + 3 = 0$ (1)

và đặt $f(t) = t^2 + 2mt + m + 3$.

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -3$ tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < t_2$ và khi đó hoành độ bốn giao điểm là $-\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$.

Do đó, từ điều kiện của bài toán suy ra $\begin{cases} \sqrt{t_2} > 2 \\ \sqrt{t_1} < 1 \end{cases}$ hay $0 < t_1 < 1 < 4 < t_2$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ 3m + 4 < 0 \\ 9m + 19 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -\frac{19}{9}$.

Vậy $a = -3$, $b = -\frac{19}{9}$ nên $15ab = 95$. **Chọn C**

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $|x^4 - 2x^2 - 3| = 2m - 1$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

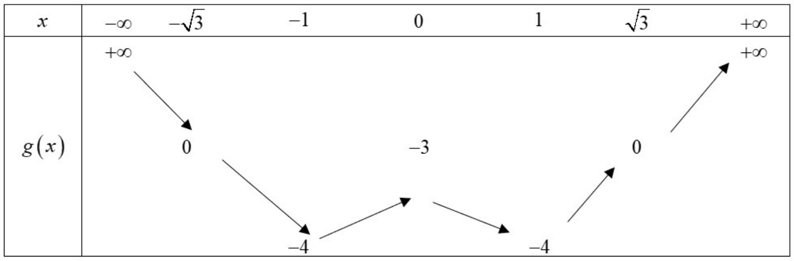
A. $1 < m < \frac{3}{2}$. **B.** $4 < m < 5$. **C.** $3 < m < 4$. **<u>D</u>.** $2 < m < \frac{5}{2}$.

Lời giải

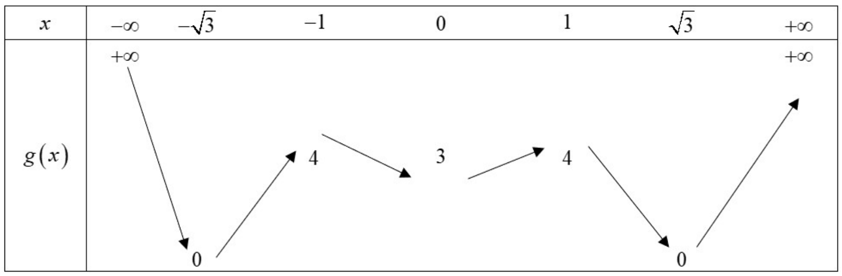
Xét $g(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$g'(x) = 4x^3 - 4x$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$.



Đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\left|x^4-2x^2-3\right|$ là:



Để phương trình $\left|x^4-2x^2-3\right|=2m-1$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

$\Leftrightarrow 3<2m-1<4$ $\Leftrightarrow 4<2m<5\Leftrightarrow 2<m<\dfrac{5}{2}$ **Chọn D**

Ví dụ 4. Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là $0,1,m,n$. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=1$. **B.** $S=0$. **<u>C.</u>** $S=3$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng là $d:y=ax+b$.

Theo đề ta có $0,1,m,n$ là các nghiệm của phương trình: $x^4-2x^2-ax-b=0$ (1).

Vì x=0 ,x=1 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có: $\left\{\begin{array}{l}b=0\\a+b=-1\end{array}\right.$

Khi đó phương trình (1) trở thành: $x^4-2x^2+x=0\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-1)=0$.

Dễ thấy m,n là nghiệm của phương trình: $x^2+x-1=0$.

$S=m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=(-1)^2+2=3$. **Chọn C**

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C), có bao nhiêu đường thẳng d có đúng 3 điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn ${x_1}^3+{x_2}^3+{x_3}^3=-1$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Vì đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại 3 điểm phân biệt nên đường thẳng d là đường thẳng có hệ số góc dạng $y=ax+b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $x^4-2x^2=ax+b$.

Mà phương trình là phương trình bậc 4 nên phương trình muốn có 3 nghiệm phân biệt thì trong đó sẽ có 1 nghiệm kép gọi là x_1, hai nghiệm còn lại là x_2,x_3.

Suy ra đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C), không mất tính tổng quát giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) tại x_1.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x_1, d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_2, x_3(\neq x_1)$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

Ta có: $d : y = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$x^4 - 2x^2 = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2 (1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_1)^2(x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ f(x) = x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$ thì phương trình $f(x) = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_2, x_3 khác x_1 và thỏa mãn định lí Vi – ét: $\begin{cases} x_2 + x_3 = -2x_1 \\ x_2.x_3 = 3x_1^2 - 2 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} \Delta' = x_1^2 - 3x_1^2 + 2 > 0 \\ x_1^2 + 2x_1^2 + 3x_1^2 - 2 \neq 0 \\ x_1^3 + (x_2 + x_3)^3 - 3x_2x_3(x_2 + x_3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x_1 < 1 \\ 3x_1^2 - 1 \neq 0 \\ x_1^3 + (-2x_1)^3 - 3(3x_1^2 - 2).(-2x_1) = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-11 + \sqrt{165}}{22}$. Vậy có đúng 1 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B**

Dạng 1.4. Bài toán tương giao của hai đường bất kỳ

Cơ sở lý thuyết để suy luận: số giao điểm của hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)(1)$ và nghiệm của phương trình (1) cũng chính là hoành độ của giao điểm.

Khi có tham số ta thực hiện giải bài toán theo quy trình sau:

B1: Cô lập tham số đưa phương trình về dạng $f(x) = m$

B2: Lập bảng biến thiên (vẽ đồ thị) của hàm số $y = f(x)$

B3: Sử dụng kiến thức tương giao, quan sát bảng biến thiên hoặc quan sát đồ thị để chọn các giá trị của tham số m phù hợp với yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1. (Mã 101 2019) Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1}$ và $y = \left|x+2\right| - x + m$

(m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $\left[2;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;2\right)$. **C.** $\left(2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;2\right]$.

Lời giải

Xét phương trình $\dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} = \left|x+2\right| - x + m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} - \left|x+2\right| + x = m\,(1)$

Hàm số $p\left(x\right) = \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} - \left|x+2\right| + x$.

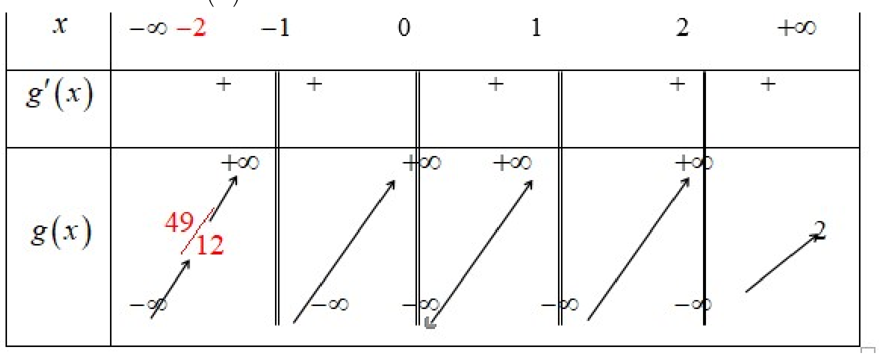
$$=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}-2 & \text{khi } x\ge -2\\ \dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+2x+2 & \text{khi}\, x<-2\end{cases}$$

Ta có $p'\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}>0,\forall x\in\left(-2;+\infty\right)\setminus\left\{-1;0;1;2\right\}\\ \dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}+2>0,\forall x<-2\end{cases}$

nên hàm số $y=p\left(x\right)$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$, $\left(-1;0\right)$, $\left(0;1\right)$, $\left(1;2\right)$, $\left(2;+\infty\right)$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}p\left(x\right)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}p\left(x\right)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g\left(x\right)$:



Do đó để $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=p\left(x\right)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m\ge 2$. **Chọn A**

Ví dụ 2. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}$ và $y=e^x+2023+3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2022;2023)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt ?

A. 2696. **B.** 2695. **C.** 2692. **D.** 2693.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}=e^x+2023+3m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}-e^x-2023=3m$ (1).

Đặt $g(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}-e^x-2023$.

Ta có $g'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}-e^x<0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $\left(-\infty;-1\right)$, $\left(-1;0\right)$, $\left(0;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$ nên hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-2020$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖		
$g(x)$	-2020 ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘		$-\infty$

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = 3m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $3m \geq -2020 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{2020}{3} \approx -673,3$.

Do m nguyên thuộc $(-2022;2023)$ nên $m \in \left\{-673;-672;...;2022\right\}$. Vậy có tất cả 2696 giá trị m thỏa mãn. **Chọn A**

Ví dụ 3. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y = \left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y = \dfrac{11}{3x-4} - \dfrac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $\left(-\infty;0\right)$. **<u>B.</u>** $\left(-\infty;1\right)$. **C.** $\left(-\infty;1\right]$. **D.** $\left(-\infty;2\right]$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1} = \dfrac{11}{3x-4} - \dfrac{1}{2-x} + 11 + m \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \neq \dfrac{4}{3} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq \dfrac{4}{3} \\ x \neq 2 \end{cases}$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1} - \dfrac{11}{3x-4} + \dfrac{1}{2-x} - 11 = m$

Xét hàm số $f(x) = \left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1} - \dfrac{11}{3x-4} + \dfrac{1}{2-x} - 11$ trên $\left[1;+\infty\right) \setminus \left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng $\left[1;\dfrac{4}{3}\right), \left(\dfrac{4}{3};2\right), \left(2;+\infty\right)$

Ta có, $f'(x) = \left(\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1} - \dfrac{11}{3x-4} + \dfrac{1}{2-x} - 11\right)'$

$= 4x\sqrt{x-1} + \left(2x^2+1\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{33}{\left(3x-4\right)^2} + \dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}$

$= \dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{33}{\left(3x-4\right)^2} + \dfrac{1}{\left(2-x\right)^2} > 0$ với $\forall x \in \left[1;+\infty\right) \setminus \left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$ Suy ra, hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right) \setminus \left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Bảng biến thiên

x	1		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$	||	$-\infty$ ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y = \left(2x^2 + 1\right)\sqrt{x-1}$ và

$y = \dfrac{11}{3x-4} - \dfrac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m \in (-\infty;1)$. **Chọn B**

Ví dụ 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + x^3 - 5x^2 - x + m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có các hoành độ là x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)\left(x_4^2+1\right) \geq 68$ .Tập S có bao nhiêu tập con ?

A. 16 . **<u>B</u>.** 8 . **C.** 32 . **D.** 4 .

Hướng dẫn giải

Xét hàm $h\left(x\right) = x^4 + x^3 - 5x^2 - x + m,$

$$TXD:\mathbb{R},\quad h'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 10x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx -1{,}9 \\ x \approx 1.3 \\ x \approx -0.09 \end{array}\right.$$

Có BBT

x	$-\infty$		-1.9		-0.09		1.3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$m-9.9$	↗	$m+0.05$	↘	$m-4.69$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} m + 0.05 > 0 \\ m - 4.69 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -0.05 < m < 4.69$

Khi đó

$y(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \Rightarrow y(-x) = (-x-x_1)(-x-x_2)(-x-x_3)(-x-x_4)$

$\Rightarrow y(x).y(-x) = (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2)(x^2-x_4^2)$

$\Rightarrow y(i).y(-i) = (x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)$

$\Rightarrow (x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1) = \left(i^4 + i^3 - 5i^2 + m\right)\left(i^4 - i^3 - 5i^2 + m\right)$

$= \left(6+m-2i\right)\left(6+m+2i\right) = \left(6+m\right)^2 + 4 \geq 68 \Leftrightarrow -14 \leq m \leq 2$

Kết hợp trên ta có $S = \left\{0;1;2\right\}$. Vậy số tập con của S là $2^3 = 8$. **Chọn B**

Ví dụ 5. Cho hai hàm số $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^3 + 2x^2 + mx - 3$. Giá trị của tham số m để đồ thị của hai hàm số có 3 giao điểm phân biệt và 3 giao điểm đó nằm trên đường tròn bán kính bằng 3 thuộc vào khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-4\right)$. **B.** $\left(-4;-2\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(-2;0\right)$.

Lời giải

Giả sử m là số thực thỏa mãn bài toán.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị là

$$x^2 + x - 1 = x^3 + 2x^2 + mx - 3 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + \left(m-1\right)x - 2 = 0 \quad \left(1\right).$$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là một trong 3 giao điểm. Ta có

$$\begin{cases} y_0 = x_0^2 + x_0 - 1 \\ x_0^3 + x_0^2 + \left(m-1\right)x_0 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0^2 = x_0^4 + 2x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 + 1 & \left(2\right) \\ x_0^3 + x_0^2 + \left(m-1\right)x_0 - 2 = 0 & \left(3\right) \end{cases}.$$

Từ $\left(2\right)$ và $\left(3\right)$ suy ra

$$y_0^2 = \left(x_0+1\right)\left[x_0^3 + x_0^2 + \left(m-1\right)x_0 - 2\right] + \left(-m-1\right)x_0^2 - \left(m-1\right)x_0 + 3 = \left(-m-1\right)x_0^2 - \left(m-1\right)x_0 + 3$$

.

Hay $y_0^2 + x_0^2 = -mx_0^2 - \left(m-1\right)x_0 + 3 = -m\left(y_0 - x_0 + 1\right) - \left(m-1\right)x_0 + 3$.

Rút gọn ta được $x_0^2 + y_0^2 - x_0 + my_0 + m - 3 = 0 \quad \left(4\right)$.

Đây là phương trình đường tròn khi $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{m}{2}\right)^2 - m + 3 > 0 \quad \left(*\right)$.

Với điều kiện $\left(*\right)$ thì $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đường tròn có bán kính $R = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{m}{2}\right)^2 - m + 3}$.

Theo đề bài $R = 3 \Leftrightarrow \dfrac{m^2+1}{4} - m + 3 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 23 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 + 3\sqrt{3} \\ m = 2 - 3\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Thử lại.

Với $m = 2 + 3\sqrt{3}$ thì phương trình $\left(1\right)$ có 1 nghiệm. Do đó, $m = 2 + 3\sqrt{3}$ không thỏa mãn.

Với $m = 2 - 3\sqrt{3}$ thì phương trình $\left(1\right)$ có 3 nghiệm và cũng thỏa mãn $\left(*\right)$.

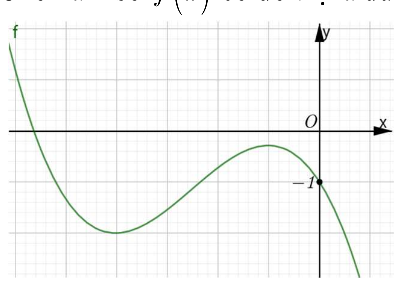
Vậy giá trị m cần tìm là $m = 2 - 3\sqrt{3} \in \left(-4;-2\right)$. **Chọn B**

Dạng 2: Bài toán tương giao với hàm hợp, hàm ẩn

Dạng 2.1. Bài toán tương giao với hàm hợp, hàm ẩn không có tham số

Định hướng phương pháp: Giải bài toán bằng phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp biến đổi tương đương.

Ví dụ 1. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f\left(x\right)\right) + 1 = 0$ là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy $f\left(x^3 f\left(x\right)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f\left(x\right)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 f\left(x\right)=a\in\left(-6;-5\right) & \left(1\right) \\ x^3 f\left(x\right)=b\in\left(-3;-2\right) & \left(2\right) \\ x^3 f\left(x\right)=0 & \left(3\right) \end{array}\right.$

+ Phương trình $\left(3\right)$ tương đương $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ f\left(x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1,\ \left(-6<x_1<a<-5\right) \end{array}\right.$.

+ Các hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{a}{x^3}$ và $h\left(x\right)=\dfrac{b}{x^3}$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$, và nhận xét rằng $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình $\left(1\right)$ nên: $\left(1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=g\left(x\right) \\ f\left(x\right)=h\left(x\right) \end{array}\right.$.

+ Trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$, ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to0^-} f\left(x\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} h\left(x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to0^-} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^-} h\left(x\right)=+\infty \end{cases}$

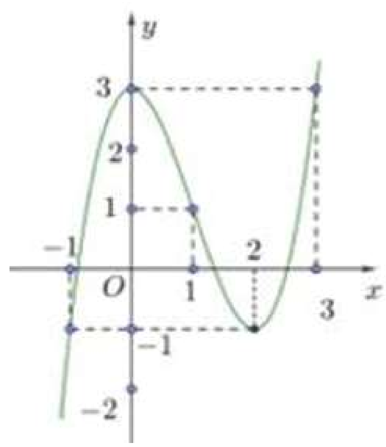
nên các phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ và $f\left(x\right)=h\left(x\right)$ có nghiệm duy nhất.

+ Trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to0^+} f\left(x\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} h\left(x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to0^+} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+} h\left(x\right)=-\infty \end{cases}$

nên các phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ và $f\left(x\right)=h\left(x\right)$ có nghiệm duy nhất.

Do đó, phương trình $f\left(x^3 f\left(x\right)\right)+1=0$ có 6 nghiệm phân biệt. **Chọn A**

Ví dụ 2. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

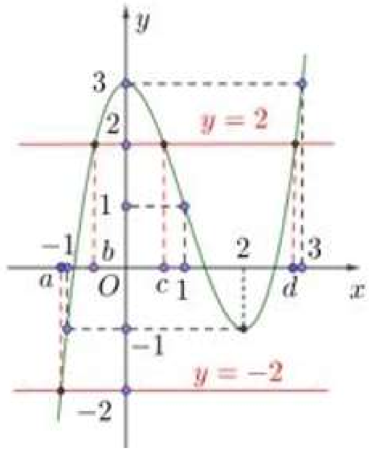


Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

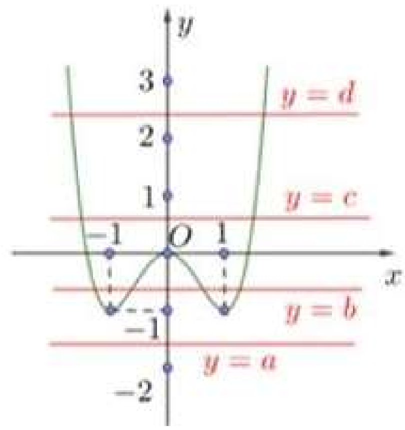
Phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^4-2x^2\right)=2 \\ f\left(x^4-2x^2\right)=-2 \end{array}\right.$.



* Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-2x^2=b,(-1<b<0) \\ x^4-2x^2=c,(0<c<1);x^4-2x^2=d,(2<d<3) \end{array}\right.$.

* Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=-2 \Leftrightarrow x^4-2x^2=a,(-2<a<-1)$.

Đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị trên ta có:

- Phương trình $x^4-2x^2=a,(-2<a<-1)$ không có nghiệm thực.
- Phương trình $x^4-2x^2=b,(-1<b<0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4-2x^2=c,(0<c<1)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4-2x^2=d,(2<d<3)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ có 8 nghiệm thực phân biệt. **Chọn A**

Nhận xét: Khi bài toán chứa dấu giá trị tuyệt đối ta đi phá dấu giá trị tuyệt đối bằng phép biến đổi tương đương $\left|f(x)\right|=A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=A \\ f(x)=-A \end{array}\right.$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2022	$\nearrow$	2022	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x+2021\right)-2022\right|=2023$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có :

$$\left|f\left(x+2021\right)-2022\right|=2023 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x+2021\right)-2022=-2023 \\ f\left(x+2021\right)-2022=2023 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x+2021\right)=-1 \\ f\left(x+2021\right)=4045 \end{array}\right..$$

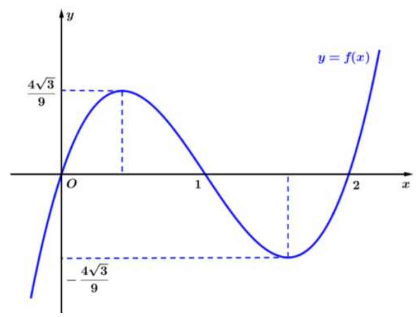
Từ bảng biến thiên suy ra:

+) Phương trình: $f\left(x+2021\right)=-1$ có 3 nghiệm.

+) Phương trình: $f\left(x+2021\right)=4045$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm. **Chọn A**

Ví dụ 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)=\dfrac{1}{2023}$ là



A. 24. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

$y=g(x)=f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)$ với $g(x)=\dfrac{1}{2023}$

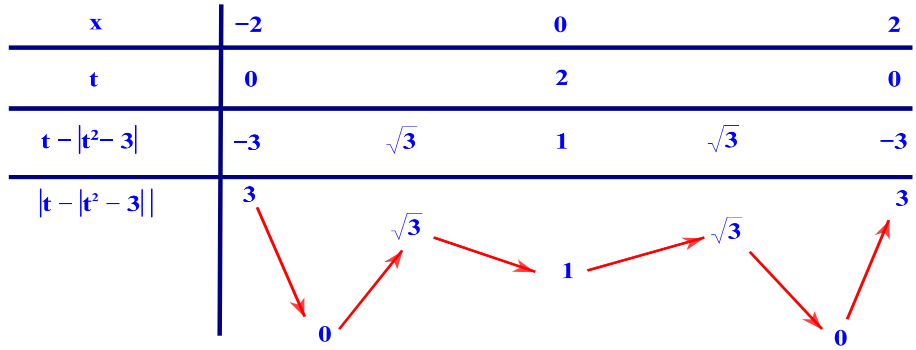
Ta đặt: $t=\sqrt{4-x^2},\forall x\in\left[-2;2\right]$ thì suy ra $y=g(t)=f\left(\left|t-\left|t^2-3\right|\right|\right),\forall t\in\left[0;2\right]$

Suy ra: $h(t)=t-\left|t^2-3\right|=\begin{cases} t^2+t-3, t\in\left[0;\sqrt{3}\right] \\ -t^2+t+3, t\in\left[\sqrt{3};2\right] \end{cases}.$

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ bên:

t	0		$\sqrt{3}$		2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	1

Đặt $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ thì ta cũng có BBT của u như sau:



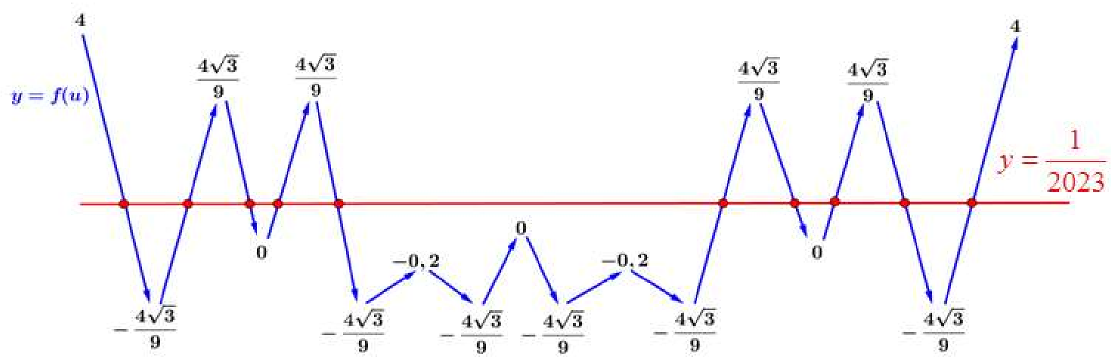
Nhìn vào đồ thị $y = f(x)$ trên ta có được:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx, a \neq 0 \\ f(1) = f(2) = 0, f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3} > 0$$

Như vậy ta suy ra $f(x) = \frac{2}{3}x\left(x-1\right)\left(x-2\right)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x = x_0$ nên suy ra $f\left(x_0\right) = \frac{-4\sqrt{3}}{9} \Rightarrow x_0 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

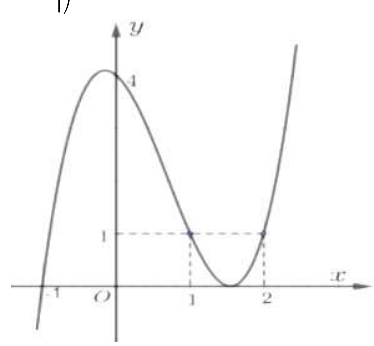
Như vậy: $f(3) = 4, f\left(\sqrt{3}\right) = -0,2, f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-4\sqrt{3}}{9}$

Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y = f\left(u\right)$ với $u = \left|t - \left|t^2 - 3\right|\right|$ như sau:



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x) = \frac{1}{2023}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt. **Chọn D**

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm trên khoảng $\left(-\pi; 4\pi\right)$ của phương trình $f\left(2\left|\cos 2x\right|\right) = 1$ là



A. 48. **B.** 29. **C.** 31. **D.** 40.

Lời giải

Đặt $t=2\left|\cos 2x\right|$. Vì $x\in\left(-\pi;4\pi\right)$ nên $t\in\left[0;2\right]$

Phương trình trở thành: $f\left(t\right)=1$.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f\left(t\right)=1$ có các nghiệm thuộc $\left[0;2\right]$ là $\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$.

Với $t=1\Leftrightarrow\left|\cos 2x\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=\frac{1}{2}\\\cos 2x=\frac{-1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pm\pi}{6}+k\pi\\x=\frac{\pm\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.$

Vì $x\in\left(-\pi;2\pi\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-\pi<\frac{\pi}{6}+k\pi<4\pi\\-\pi<\frac{-\pi}{6}+k\pi<4\pi\\-\pi<\frac{\pi}{3}+k\pi<4\pi\\-\pi<\frac{-\pi}{3}+k\pi<4\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{-7}{6}<k<\frac{23}{6}\\\frac{-5}{6}<k<\frac{25}{6}\\\frac{-4}{3}<k<\frac{11}{3}\\\frac{-2}{3}<k<\frac{13}{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ phương trình có 20 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi;4\pi\right)$.

Với $t=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\\cos 2x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.$

Vì $x\in\left(-\pi;2\pi\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-\pi<k\pi<4\pi\\-\pi<\frac{\pi}{2}+k\pi<4\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<k<4\\\frac{-3}{2}<k<\frac{7}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ phương trình có 9 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi;4\pi\right)$.

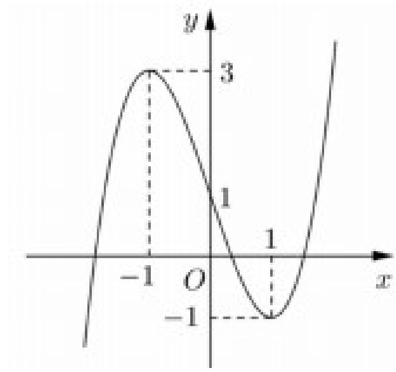
Vậy phương trình đã cho có tất cả 29 nghiệm. **Chọn B**

Dạng 2.1. Bài toán tương giao với hàm hợp, hàm ẩn có tham số

Định hướng phương pháp

- Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm $x\in D$ khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên miền D, hơn nữa số giao điểm chính là số nghiệm của phương trình đã cho.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ có GTLN,GTNN trên D thì phương trình $f(x)=m$ có nghiệm $x\in D$ khi và chỉ khi $\underset{D}{Min}\,f(x)\le m\le\underset{D}{Max}\,f(x)$
- Bất phương trình $f(x)\ge m$ có nghiệm $x\in D$ khi và chỉ khi có phần đồ thị của hàm số hàm số $y=f(x)$ trên miền D nằm phía trên đường thẳng $y=m$
- Nếu hàm số $y=f(x)$ có GTLN trên D thì bất phương trình $f(x)\ge m$ có nghiệm $x\in D$ khi và chỉ khi $\underset{D}{Max}\,f(x)\ge m$
- Bất phương trình $f(x)\ge m$ nghiệm đúng với mọi $x\in D$ khi và chỉ khi phần đồ thị của hàm số hàm số $y=f(x)$ trên miền D nằm hết phía trên hoặc ở trên đường thẳng $y=m$
- Nếu hàm số $y=f(x)$ có GTNN trên D thì bất phương trình $f(x)\ge m$ nghiệm đúng với mọi $x\in D$ khi và chỉ khi $\underset{D}{Min}\,f(x)\ge m$.
- Với các bất phương trình dạng khác sử dụng cách tư duy, suy luận tương tự để giải.

Ví dụ 1. (Đề Tham Khảo 2019) Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ là



A. $\left(-1;3\right)$ **B.** $\left[-1;1\right)$ **C.** $\left[-1;3\right)$ **D.** $\left(-1;1\right)$

Lời giải

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \forall x \in \left(0;\pi\right) \Rightarrow t \in \left(0;1\right]$

Vậy phương trình trở thành $f\left(t\right) = m$. Dựa và đồ thị hàm số suy ra $m \in \left[-1;1\right)$. **Chọn B**

Ví dụ 2. (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2 - 4x\right) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

Lời giải

Ta đặt: $g\left(x\right) = f\left(x^2 - 4x\right)$.

$g'\left(x\right) = \left(2x - 4\right)f'\left(x^2 - 4x\right)$

$= 2\left(x-2\right)\left(x^2 - 4x + 4\right)\left(x^2 - 4x + 2\right)\left(x^2 - 4x\right)$ (dựa vào bảng biến thiên)

$= 2\left(x-2\right)^3\left(x^2 - 4x + 2\right)x\left(x-4\right)$.

Mặt khác:

$g\left(0\right) = f\left(0\right) = -3$;

$g\left(2 - \sqrt{2}\right) = g\left(2 + \sqrt{2}\right) = f\left(-2\right) = 2$;

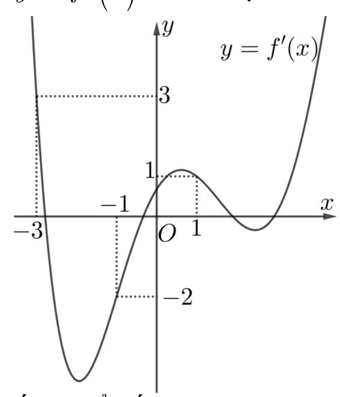
$g\left(2\right)=f\left(-4\right)=-2$;
$g\left(4\right)=f\left(0\right)=-3$.
Ta có bảng biến thiên:

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3<\dfrac{m}{6}\le 2$

$\Leftrightarrow -18<m\le 12$. Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B**

Ví dụ 3. Cho hàm số $f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình sau.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$2f\left(\sin x-2\right)-\dfrac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\dfrac{5\cos 2x}{4}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le 2f\left(-3\right)+\dfrac{11}{12}$.
B. $m<2f\left(-1\right)+\dfrac{19}{12}$.
C. $m\le 2f\left(-1\right)+\dfrac{19}{12}$.
D. $m<2f\left(-3\right)+\dfrac{11}{12}$.

Lời giải

Ta có

$$2f\left(\sin x-2\right)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\frac{5\cos 2x}{4}$$
$$\Leftrightarrow m<2f\left(\sin x-2\right)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x-\frac{5\left(1-2\sin^2 x\right)}{4}$$

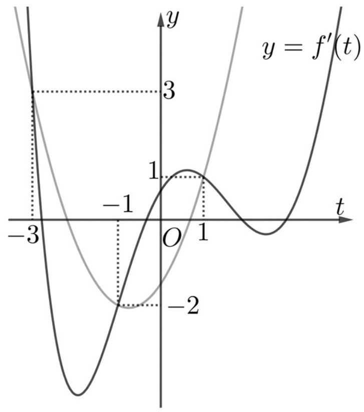
Đặt $t=\sin x-2$ (với $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in\left(-3;-1\right)$, khi đó bất phương trình được viết lại thành:

$$m<2f\left(t\right)-\frac{2\left(t+2\right)^3}{3}+\left(t+2\right)-\frac{5\left[1-2\left(t+2\right)^2\right]}{4}.$$

hay $m < 2f\left(t\right) - \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 3t + \dfrac{65}{12} \quad \left(*\right)$.

Xét hàm số $g\left(t\right) = 2f\left(t\right) - \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 3t + \dfrac{65}{12}$ trên đoạn $\left[-3;-1\right]$.

Ta có $g'\left(t\right) = 2f'\left(t\right) - 2t^2 - 3t + 3$. Do đó $g'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(t\right) = t^2 + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{3}{2}$.



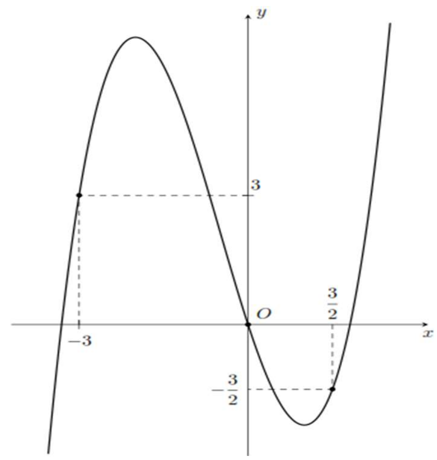
Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'\left(t\right)$ và parabol $y = t^2 + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-3;-1\right]$ thì $g'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-3;-1\right\}$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g\left(t\right)$ trên đoạn $\left[-3;-1\right]$ như sau:

t	-3		-1
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình $\left(*\right)$ nghiệm đúng với mọi $t \in \left(-3;-1\right)$. Điều đó tương đương với $m \le g\left(-1\right) = 2f\left(-1\right) + \dfrac{19}{12}$ dựa vào tính liên tục của hàm số $g\left(t\right)$. **Chọn C**

Ví dụ 4. Cho hàm $y = f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc bốn. Biết rằng $f\left(0\right) = 0$, $f\left(-3\right) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ có dạng như hình vẽ.



Xét hàm số $g\left(x\right)=\left|4f\left(x\right)+2x^2\right|-2m^2+1$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m\in\left(-50;50\right)$ để phương trình $g\left(x\right)=1$ có đúng hai nghiệm thực?

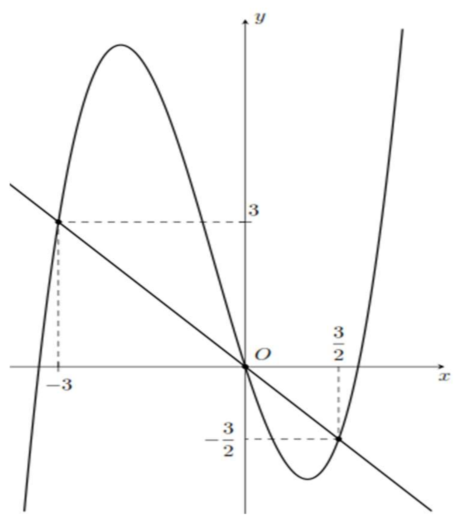
A. 94. **B.** 96. **C.** 47. **D.** 48.

Lời giải

Ta có $\left|4f\left(x\right)+2x^2\right|-2m^2+1=1\Leftrightarrow\left|4f\left(x\right)+2x^2\right|=2m^2,\left(1\right)$.

Xét hàm số $h\left(x\right)=4f\left(x\right)+2x^2$, ta có $h'\left(x\right)=4\left[f'\left(x\right)-\left(-x\right)\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-x$.



Ta thấy: $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=0\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

và $h\left(-3\right)=4f\left(-3\right)+2\left(-3\right)^2=-1$, $h\left(0\right)=0$, $h\left(\dfrac{3}{2}\right)=4f\left(\dfrac{3}{2}\right)+2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=-\dfrac{29}{2}$.

Do đó ta có bảng biến thiên hàm số $h\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$		-1		0		$-\frac{29}{2}$		$+\infty$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $\left|h\left(x\right)\right|$ như sau

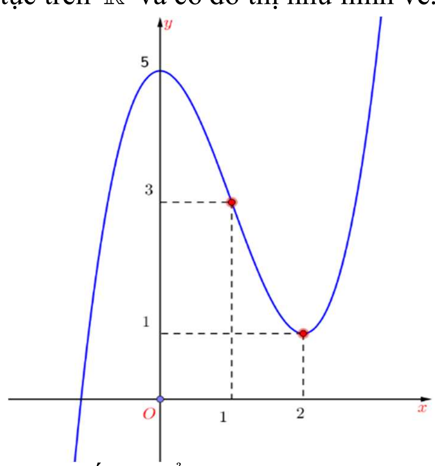
x	$-\infty$		x_1		-3		0		$\frac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$				-1		0		$-\frac{29}{2}$				$+\infty$
$\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$		0		1		0		$\frac{29}{2}$		0		$+\infty$

Do đó để phương trình $\left(1\right)$ có đúng hai nghiệm thực thì $2m^2 > \dfrac{29}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{\sqrt{29}}{2} \\ m < -\dfrac{\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$.

Mà m là số nguyên thuộc $\left(-50;50\right)$ nên $\left[\begin{array}{l} 3 \le m \le 49 \\ -49 \le m \le -3 \end{array}\right.$.

Vậy có 94 số nguyên m thỏa mãn. **Chọn A**

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| + 2\right) = f\left(\sqrt{(m+2)^2 + 4}\right)$ có nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

- Ta có: $-1 \le \sin x \le 1,\ -1 \le \cos x \le 1$ nên suy ra $2\cos x - \sin x + 4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t=\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\Rightarrow t(2\cos x-\sin x+4)=3\sin x-\cos x-1$

$\Leftrightarrow (2t+1)\cos x-(t+3)\sin x=-(4t+1)$.

Phương trình trên có nghiệm khi $(2t+1)^2+(t+3)^2\ge(4t+1)^2 \Leftrightarrow \dfrac{-9}{11}\le t\le 1\Rightarrow 2\le\left|t\right|+2\le 3$

.

Nhìn vào hình trên ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left[2;3\right]$ nên phương trình

$f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ hay phương trình

$f\left(\left|t\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $\left|t\right|+2=\sqrt{(m+2)^2+4}$ có nghiệm t thỏa mãn điều kiện $2\le\left|t\right|+2\le 3$

$\Leftrightarrow 2\le\sqrt{(m+2)^2+4}\le 3\Rightarrow m^2+4m-1\le 0\Leftrightarrow -2-\sqrt5\le m\le -2+\sqrt5$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên có tất cả 5 giá trị m thỏa mãn. **Chọn B**

BÀI LUYỆN TẬP

Câu 1. Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4$ và đường thẳng $y=x+4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A\left(0;4\right)$, B, C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt2$ với $I\left(1;3\right)$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $\left(d\right):y=x-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2\left(m-2\right)x^2+\left(8-5m\right)x+m-5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=-mx+m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2+m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $-1<x_1+x_2+x_3<3$?.

A. 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị đi qua điểm $A\left(1;1\right),B\left(2;4\right),C\left(3;9\right)$. Các đường thẳng AB,AC,BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M,N,P (M khác A và B, N khác A và C, P khác B và C. Biết rằng tổng các hoành độ của M,N,P bằng 5, giá trị của $f\left(0\right)$ là

A. -6. **B.** -18. **C.** 18. **D.** 6.

Câu 5. Gọi m_0 là số thực sao cho phương trình $\left|x^3-12x\right|=m_0$ có ba nghiệm dương phân biệt x_1; x_2; x_3 thỏa mãn $x_1+x_2+x_3=1+4\sqrt3$. Biết rằng m_0 có dạng $a\sqrt3+b$ với a; b là các số hữu tỷ. Tính $4a^2+8b$:

A. 106. **B.** 115. **C.** 113. **D.** 101.

Câu 6. Trong số các cặp số thực $\left(a;b\right)$ để bất phương trình $\left(x-1\right)\left(x-a\right)\left(x^2+x+b\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.

Câu 7. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=(x-1).(x-2)...(x-2023)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $\left[-2023;2023\right]$ để phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2023 nghiệm phân biệt?

A. 2022. **B.** 4046. **C.** 4040. **D.** 2023.

Câu 9. Cho hàm số $y=\frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m\neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y=3x-3m$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

A. $-\frac{4}{9}$. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 10. Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}$, (C) và đường thẳng $d: y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T=a+b$ bằng

A. $T=2$. **B.** $T=\frac{5}{2}$. **C.** $T=4$. **D.** $T=\frac{7}{2}$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\frac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 (với O là gốc tọa độ)?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Câu 12. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-4x^2+3+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $\left(-1;3\right)$. **B.** $\left(-3;1\right)$. **C.** $\left(2;4\right)$. **D.** $\left(-3;0\right)$.

Câu 13. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2mx^2+(2m-1)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\left\{1\right\}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 14. Cho hàm số $y=x^4-3x^2-2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ.

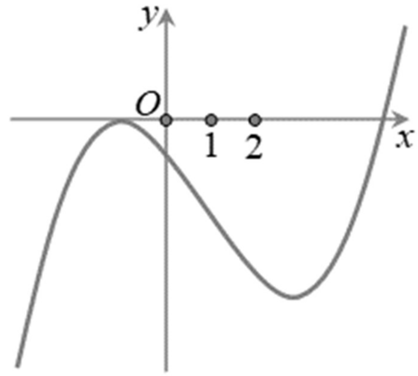
A. $m=2$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left(m+1\right)x^4-2\left(2m-3\right)x^2+6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$.

A. $m\in\left(-1;\frac{-5}{6}\right)$. **B.** $m\in\left(-3;-1\right)$. **C.** $m\in\left(-3;1\right)$. **D.** $m\in\left(-4;-1\right)$

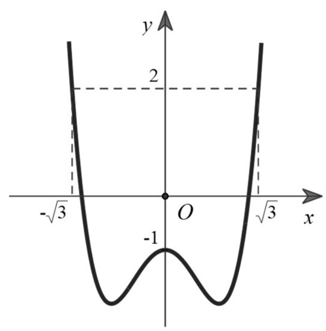
.

Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f\left(x\right)>x^2-2x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in\left(1;2\right)$ khi và chỉ khi



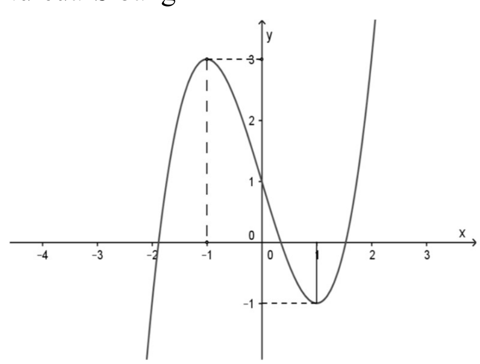
A. $m\le f\left(2\right)-2$. **B.** $m\le f\left(1\right)+1$. **C.** $m\le f\left(1\right)-1$. **D.** $m\le f\left(2\right)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f\left(x\right)\ge x^3-3x+m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f\left(x\right)\ge x^3-3x+m$ đúng với mọi $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là



A. $m\ge 3f\left(1\right)$. **B.** $m\ge 3f\left(-\sqrt{3}\right)$. **C.** $m\le 3f\left(0\right)$. **D.** $m\le 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 19. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3\left(x\right)+f\left(x\right)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in\left[-1;2\right]$?

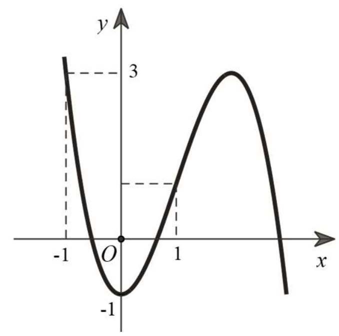
A. 1750.　　**B.** 1748.　　**C.** 1747.　　**D.** 1746.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[2;4\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[2;4\right]$?

x	2		3		$\frac{7}{2}$		4
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\sqrt{11}$	$\searrow$	2

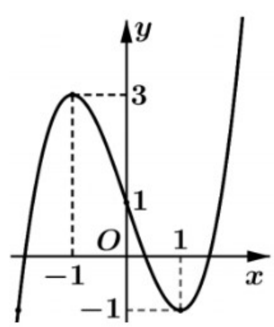
A. 6.　　**B.** 5.　　**C.** 4.　　**D.** 3.

Câu 21. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(\cos x\right)+\left(m-2022\right)f\left(\cos x\right)+m-2023=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$ là



A. 1.　　**B.** 3.　　**C.** 2.　　**D.** 5.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết $f\left(-1\right)=1;f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f\left(x\right)<\ln\left(-x\right)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;\frac{-1}{e}\right)$.



A. $m\geq 2$.　　**B.** $m\geq 3$.　　**C.** $m>2$.　　**D.** $m>3$.

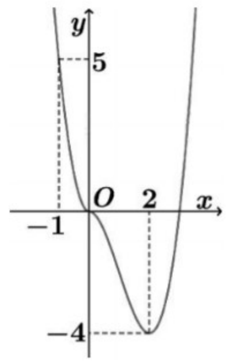
Câu 23. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(-1\right)=5,f\left(-3\right)=0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f\left(2-x\right)+\sqrt{x^2+4}-x=m$ có nghiệm trong khoảng $\left(3;5\right)$ là

A. 16. **B.** 17. **C.** 0. **D.** 15.

Câu 24. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-1\right) = 1$, $f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2$. Hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f\left(x\right) < \ln\left(-x\right) + x^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m > 0$. **B.** $m > 3 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$. **C.** $m \geq 3 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$. **D.** $m \geq 0$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \log_3 x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{4\,|\,x - m\,|+3}\right) + f\left(x^2 - 4x + 7\right) = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt bằng

A. 14. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + \left(m + 3\right)x + 4$ và đường thẳng $y = x + 4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A\left(0;4\right)$, B, C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I\left(1;3\right)$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

+) Gọi đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + \left(m + 3\right)x + 4$ là $\left(C_m\right)$ và đồ thị hàm số $y = x + 4$ là $\left(d\right)$.

+) Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C_m\right)$ và $\left(d\right)$ là

$x^3 + 2mx^2 + \left(m + 3\right)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + \left(m + 2\right)x = 0 \left(*\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{array}\right.$

+) Gọi $g\left(x\right) = x^2 + 2mx + m + 2$.

+) $\left(d\right)$ cắt $\left(C_m\right)$ tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $\left(*\right)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $g\left(x\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (a)$

+) $x = 0$ là hoành độ điểm A, hoành độ điểm B, C là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình $g(x) = 0$

+) $BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left[(x_2 + 4) - (x_1 + 4)\right]^2 = 2(x_2 - x_1)^2$ (do B, C thuộc đường thẳng (d)

$= 2\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right] = 8(m^2 - m - 2)$

+) Viết phương trình đường thẳng (d) dưới dạng $x - y + 4 = 0$, ta có

$d(I,(d)) = \dfrac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

+) $S_{IBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}BC.d(I,(d)) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}BC^2.\left[d(I,(d))\right]^2 = 128$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}8(m^2 - m - 2).2 = 128$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1 + \sqrt{137}}{2} \\ m = \dfrac{1 - \sqrt{137}}{2} \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện (a))

+) Vậy tổng tất cả các giá trị m là 1.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $(d): y = x - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 + (8 - 5m)x + m - 5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình

$x^3 + 2(m-2)x^2 + (8 - 5m)x + m - 5 = x - m + 1$

$\Leftrightarrow (x - 2)\left[x^2 + (2m - 2)x - m + 3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x^2 + (2m - 2)x - m + 3 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$.

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 + (m - 3) > 0 \\ 4 + (2m - 2).2 - m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$ (2).

Khi đó, $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m - 2) \\ x_1x_2 = -m + 3 \end{cases}$.

Theo giả thiết $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_3^2 = 20$

$\Leftrightarrow (2m-2)^2 + 2(m-3) + 4 = 20 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn (2)).

Vậy giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = -mx + m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 + m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $-1 < x_1 + x_2 + x_3 < 3$?.

A. 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$(d) y = -mx + m$, $(C) y = x^3 + mx^2 + m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C): $x^3 + mx^2 + mx = 0$ (1).

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + mx + m = 0 \ (2) \end{array}\right.$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (2), $x_3 = 0$.

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt và khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \Delta = m^2 - 4m \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

(1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa $-1 < x_1 + x_2 + x_3 < 3$, với $x_1 + x_2 = -m$, $x_3 = 0$.

$\Leftrightarrow -1 < -m < 3$

$\Leftrightarrow -3 < m < 1$, mà $m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$, $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow m \in \{-2; -1\}$. Vậy có 2 giá trị m.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B, N khác A và C, P khác B và C. Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6. **B.** -18. **C.** 18. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thuyết bài toán ta giả sử $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$ $(a \neq 0)$

Ta có: $AB: y = 3x - 2$, $AC: y = 4x - 3$, $BC: y = 5x - 6$.

Khi đó:

Hoành độ của M là nghiệm của phương trình: $a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + x_M{}^2 = 3x_M - 2$

$\Leftrightarrow a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + (x_M - 1)(x_M - 2) = 0 \Leftrightarrow a(x_M - 3) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_M = 3 - \dfrac{1}{a}$.

Hoành độ của N là nghiệm của phương trình: $a(x_N - 1)(x_N - 2)(x_N - 3) + x_N{}^2 = 4x_N - 3$

$\Leftrightarrow a(x_N - 1)(x_N - 2)(x_N - 3) + (x_N - 1)(x_N - 3) = 0 \Leftrightarrow a(x_N - 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_N = 2 - \dfrac{1}{a}$.

Hoành độ của P là nghiệm của phương trình: $a(x_P - 1)(x_P - 2)(x_P - 3) + x_P{}^2 = 5x_P - 6$

$\Leftrightarrow a(x_P - 1)(x_P - 2)(x_P - 3) + (x_P - 2)(x_P - 3) = 0 \Leftrightarrow a(x_P - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_P = 1 - \dfrac{1}{a}$.

Từ giả thuyết ta có; $x_M + x_N + x_P = 5 \Leftrightarrow 6 - \dfrac{3}{a} = 5 \Leftrightarrow a = 3$.

Do đó: $f\left(x\right) = 3\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right) + x^2$

$f\left(0\right) = -18$.

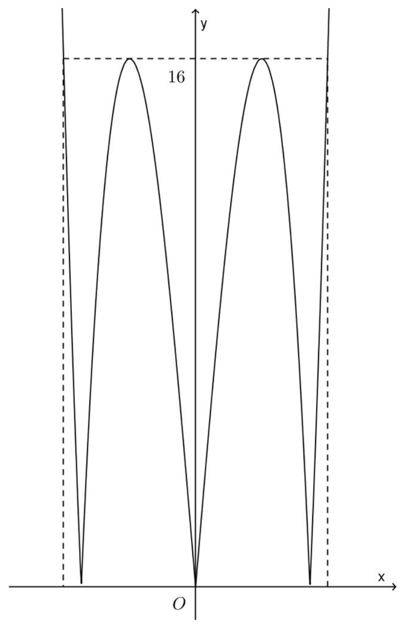
Câu 5. Gọi m_0 là số thực sao cho phương trình $\left|x^3 - 12x\right| = m_0$ có ba nghiệm dương phân biệt x_1; x_2; x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 4\sqrt{3}$. Biết rằng m_0 có dạng $a\sqrt{3} + b$ với a; b là các số hữu tỷ. Tính $4a^2 + 8b$:

A. 106. **B.** 115. **C.** 113. **D.** 101.

Lời giải

Chọn A

Vẽ đồ thị hàm số $y = \left|x^3 - 12x\right|$



Do đó với mọi $m \in \left(0;16\right)$ thì phương trình đã cho luôn có ba nghiệm dương phân biệt x_1; x_2; x_3

$\left(x_1 < x_2 < x_3\right)$ thỏa mãn: $\begin{cases} -x_1^3 + 12x_1 = m_0 \\ -x_2^3 + 12x_2 = m_0 \\ x_3^3 - 12x_3 = m_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-x_1\right)^3 - 12\left(-x_1\right) - m_0 = 0 \\ \left(-x_2\right)^3 - 12\left(-x_2\right) - m_0 = 0 \\ x_3^3 - 12x_3 - m_0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -x_1$; $-x_2$; x_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 12x - m_0 = 0$

$\Rightarrow -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2$

Mà $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 4\sqrt{3} \Rightarrow x_3 = \dfrac{1+4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m_0 = \left(\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 12\left(\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{97}{8}$

$\Rightarrow a = \dfrac{3}{2}$; $b = \dfrac{97}{8} \Rightarrow 4a^2 + 8b = 106$.

Câu 6. Trong số các cặp số thực $\left(a;b\right)$ để bất phương trình $\left(x-1\right)\left(x-a\right)\left(x^2 + x + b\right) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

A. $-\dfrac{1}{4}$. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-a\right)\left(x^2+x+b\right)$ và $g\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x^2+x+b\right)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x^2+x+b\right)=0$ thì hàm số $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-a\right)\left(x^2+x+b\right)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $\left(x-1\right)\left(x-a\right)\left(x^2+x+b\right)\ge 0$ không nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x^2+x+b\right)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra hoặc $\begin{cases}a=1\\x^2+x+b\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$ hoặc là phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\x^2+x+b\ge 0,\forall x\in R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\1>0\\\Delta=1-4b\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b\ge\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Trường hợp 2: phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Ta thay $x=1$ vào phương trình $x^2+x+b=0$ có $1^2+1+b=0\Rightarrow b=-2$. Với $b=-2$ có phương trình $x^2+x+b=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Vì $x=a$ cũng là nghiệm của phương trình nên $a=-2$.

Trong trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\b\ge\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow ab\ge\dfrac{1}{4}$ suy ra tích ab nhỏ nhất khi $ab=\dfrac{1}{4}$

Và với $a=1,b=\dfrac{1}{4}$, tích $ab=\dfrac{1}{4}$ thì bất phương trình đã cho tương đương với

$\left(x-1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+\dfrac{1}{4}\right)\ge 0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\ge 0$ thỏa mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$ (nhận)

Trong trường hợp 2: Tích $ab=4>\dfrac{1}{4}$

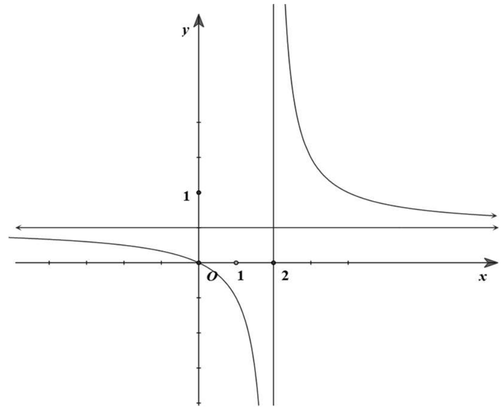
Vậy tích ab nhỏ nhất khi $ab=\dfrac{1}{4}$.

Câu 7. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Hàm số $y = \dfrac{x}{x-2}$ có đồ thị $\left(C\right)$ như hình vẽ. Gọi $A\left(a;\dfrac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b;\dfrac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của $\left(C\right)$ $\left(a < 2 < b\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(b-a;\dfrac{b}{b-2} - \dfrac{a}{a-2}\right) = \left(b-a;\dfrac{b-a}{\left(b-2\right)\left(2-a\right)}\right)$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $\left(b-2\right)\left(2-a\right) \le \dfrac{\left(b-a\right)^2}{4}$.

Suy ra: $AB^2 = \left(b-a\right)^2 + \dfrac{\left(b-a\right)^2}{\left[\left(b-2\right)\left(2-a\right)\right]^2} \ge \left(b-a\right)^2 + \dfrac{64}{\left(b-a\right)^2} \ge 16$

$\Rightarrow AB \ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2 - \sqrt{2}$ và $b = 2 + \sqrt{2}$.

Vậy $AB_{\min} = 4$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = (x-1).(x-2)...(x-2023)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $\left[-2023;2023\right]$ để phương trình $f'(x) = m.f(x)$ có 2023 nghiệm phân biệt?

A. 2022. **B.** 4046. **C.** 4040. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn B

Ta có nhận xét: khi $f(x) = 0$ thì phương trình $f'(x) = m.f(x)$ vô nghiệm.

Do đó: $f'(x) = m.f(x) \Leftrightarrow m = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \ldots + \dfrac{1}{x-2023}$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{-1}{\left(x-1\right)^2} + \dfrac{-1}{\left(x-2\right)^2} + \dfrac{-1}{\left(x-3\right)^2} + \ldots + \dfrac{-1}{\left(x-2023\right)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1;2;3...;2023\right\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3	$\cdots$	2023		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$\cdots$	$\parallel$	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	$-\infty \parallel$	$\cdots$	$\parallel +\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x) = m.f(x)$ có 2023 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 0$ hoặc $m < 0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $\left[-2023;2023\right]$ nên

$m \in \left\{n \in \mathbb{Z} \mid -2023 \le n \le 2023, n \ne 0\right\}$.

Vậy có tất cả 4046 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m \ne 0,$ đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

A. $-\dfrac{4}{9}$. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

Với $m \ne 0$, xét phương trình $\dfrac{3x-2m}{mx+1} = 3x - 3m \Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0$. (*)

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là: $A\left(x_1;3x_1 - 3m\right)$, $B\left(x_2;3x_2 - 3m\right)$.

Tọa độ các điểm C, D là $C\left(m;0\right)$ và $D\left(0;-3m\right)$.

Gọi $h = d_{(O,d)}$ thì h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD.

Theo giả thiết: $S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OCD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AB.h = 2.\dfrac{1}{2}CD.h \Leftrightarrow AB = 2CD \Leftrightarrow AB^2 = 4CD^2$

$\Leftrightarrow \left(x_1 - x_2\right)^2 + \left[3\left(x_1 - x_2\right)\right]^2 = 4\left[m^2 + \left(-3m\right)^2\right]$

$\Leftrightarrow 10\left(x_1 - x_2\right)^2 = 40m^2 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2$

$\Leftrightarrow m^2 + \dfrac{4}{3} = 4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{2}{3}$.

Vậy tích các giá trị của m là $-\dfrac{4}{9}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x+2},$ (C) và đường thẳng $d: y = ax + 2b - 4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T = a + b$ bằng

A. $T = 2$. **B.** $T = \dfrac{5}{2}$. **C.** $T = 4$. **D.** $T = \dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ: $\dfrac{3x+2}{x+2} = ax + 2b - 4; x \neq -2$.

$\Leftrightarrow ax^2 + (2a + 2b - 7)x - 10 = 0 (*)$.

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ (2\text{a} + 2b - 7)^2 - 4a(4b - 10) > 0 (2*) \\ 4 \neq 0 \end{cases}$

Gọi $A(x_1; ax_1 + 2b - 4); B(x_2; ax_2 + 2b - 4)$.

Do A, B đối xứng nhau qua gốc O nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 4b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ b = 2 \end{cases}$

Theo Viét của phương trình (*) ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{7 - 2a - 2b}{a}$.

$\Rightarrow \dfrac{7 - 2a - 2b}{a} = 0 \Leftrightarrow 7 - 2a - 2b = 0 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2}$.

Thay $\begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases}$ vào điều kiện (2*) thấy thỏa mãn.

Vậy $a + b = \dfrac{7}{2}$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y = x - m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0(với O là gốc tọa độ)?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{1-x} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - mx + m = 0 \quad (*) \end{cases}$

Để có hia điểm phân biệt A, B thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\begin{cases} 1 - m + m \neq 0 \\ m^2 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < 0 \end{array}\right.$

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biết x_1, x_2 thỏa mãn:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$

Giả sử $A(x_1; x_1 - m), B(x_2; x_2 - m)$, suy ra: $\overrightarrow{OA}(x_1; x_1 - m), \overrightarrow{OB}(x_2; x_2 - m)$

Theo giả thiết góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 suy ra:

$\cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \cos 60^0 \Leftrightarrow \dfrac{|x_1x_2 + (x_1 - m)(x_2 - m)|}{\sqrt{x_1^2 + (x_1 - m)^2}\sqrt{x_2^2 + (x_2 - m)^2}} = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2x_1x_2 - m\left(x_1 + x_2\right) + m^2\right|}{\sqrt{x_1^2x_2^2 + \left(x_1x_2 - mx_2\right)^2 + x_1^2\left(x_1x_2 - m\right)^2 + \left[\left(x_1 - m\right)\left(x_2 - m\right)\right]^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2m - m^2 + m^2\right|}{\sqrt{m^2 + \left(m - mx_2\right)^2 + \left(m - mx_1\right)^2 + \left[x_1x_2 - m\left(x_1 + x_2\right) + m^2\right]^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2m\right|}{\sqrt{m^2 + \left(m - mx_2\right)^2 + \left(m - mx_1\right)^2 + \left[m - m^2 + m^2\right]^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2 + \left(1 - x_2\right)^2 + \left(1 - x_1\right)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 + \left(1 - x_2\right)^2 + \left(1 - x_1\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 - 2\left(x_1 + x_2\right) = 12$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Câu 12. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $\left(-1;3\right)$. **<u>B</u>.** $\left(-3;1\right)$. **C.** $\left(2;4\right)$. **D.** $\left(-3;0\right)$.

Lời giải

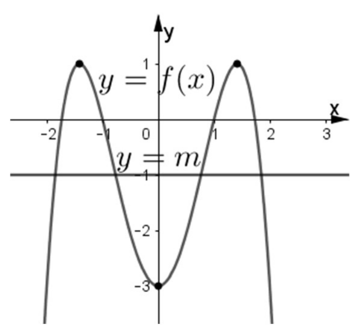
Chọn B

Ta có: $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 - 3 = m$.

Xét hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$, khi đó:

$y' = -4x^3 + 8x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Suy ra $y_{CD} = 1; y_{CT} = -3$.



Vậy để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì: $-3 < m < 1 \Rightarrow m \in \left(-3;1\right)$.

Câu 13. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + (2m - 1) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

<u>A</u>. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \left\{1\right\}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x^4-2mx^2+(2m-1)=0$.

Đặt $x^2=t(t\ge 0)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-2mt+(2m-1)=0$ (*).

Để phương trình ban đầu có bốn nghiệm thực phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m+1>0\\2m>0\\2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall m\ne 1\\m>0\\m>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{1}{2}\\m\ne 1\end{cases}\text{ hay } m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}.$$

Câu 14. Cho hàm số $y=x^4-3x^2-2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ.

A. $m=2$. **B.** $m=\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$x^4-3x^2-2=m\Leftrightarrow x^4-3x^2-2-m=0 \qquad (1)$.

Vì $m>0\Leftrightarrow -2-m<0$ hay phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$$x^2=\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}} \text{ và } x_2=-\sqrt{\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}}.$$

Khi đó: $A\left(x_1;m\right)$, $B\left(x_2;m\right)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_1.x_2+m^2=0$.

$$\Leftrightarrow\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}=m^2\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2-3\ge 0\\4m^4-12m^2-4m-8=0\end{cases}\xleftrightarrow[2m^2-3\ge 0]{m>0}m=2.$$

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left(m+1\right)x^4-2\left(2m-3\right)x^2+6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$.

A. $m\in\left(-1;\dfrac{-5}{6}\right)$. **B.** $m\in\left(-3;-1\right)$. **C.** $m\in\left(-3;1\right)$. **D.** $m\in\left(-4;-1\right)$.

Lời giải

C1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$\left(m+1\right)x^4-2\left(2m-3\right)x^2+6m+5=0 \qquad (1)$$

Đặt $t=x^2\ge 0$ pt trở thành $\left(m+1\right)t^2-2\left(2m-3\right)t+6m+5=0 \qquad (2)$

$g\left(t\right)=\left(m+1\right)t^2-2\left(2m-3\right)t+6m+5$

Để pt (1) có 4 nghiệm phân biệt thì pt (2) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

Hay $\begin{cases} m+1\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ t_1.t_2>0 \\ t_1+t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ (2m-3)^2-(m+1)(6m+5)>0 \\ \dfrac{6m+5}{m+1}>0 \\ \dfrac{2m-3}{m+1}>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ \dfrac{-23-\sqrt{561}}{4}<m<\dfrac{-23+\sqrt{561}}{4} \\ m<-1 \vee m>-\dfrac{5}{6} \\ m<-1 \vee m>\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Để pt (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$

thì pt (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1-1<0 \\ t_2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow (t_1-1)(t_2-1)<0 \Leftrightarrow t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6m+5}{m+1}-\frac{2(2m-3)}{m+1}+1<0 \Leftrightarrow \frac{3m+12}{m+1}<0 \Leftrightarrow -4<m<-1$$

Kết hợp với (*) ta có $m\in(-4;-1)$ thỏa yêu cầu bài toán.

C2:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5=0 \quad (1)$$

Đặt $t=x^2\geq 0$ pt trở thành $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0 \quad (2)$

Để pt (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$

thì pt (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<1<t_2$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow m=\dfrac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$ (biểu thức $t^2-4t+6\neq 0, \forall t$)

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$, với $t\in(0;+\infty)$

Ta có $f(t)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và có

$$f'(t)=\frac{10t^2-2t-56}{(t^2-4t+6)^2}$$

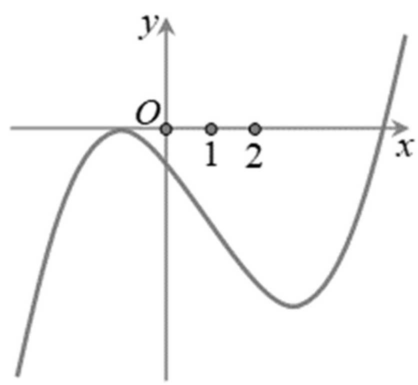
$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1-\sqrt{561}}{10}<0 \\ t=\dfrac{1+\sqrt{561}}{10}>1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$\frac{1+\sqrt{561}}{10}$	$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	$-\frac{5}{6}$	-4		-1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$ tại hai giao điểm có hoàng độ thỏa $0<t_1<1<t_2$ khi $-4<m<-1$.

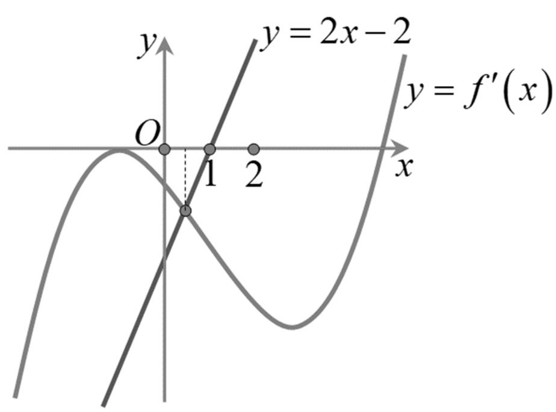
Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x)>x^2-2x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2)$ khi và chỉ khi



A. $m\le f(2)-2$. **B.** $m\le f(1)+1$. **C.** $m\le f(1)-1$. **D.** $m\le f(2)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $f(x)>x^2-2x+m\ \left(\forall x\in(1;2)\right)\Leftrightarrow f(x)-x^2+2x>m\ \left(\forall x\in(1;2)\right)\ (*)$.

Gọi $g(x)=f(x)-\left(x^2-2x\right)$

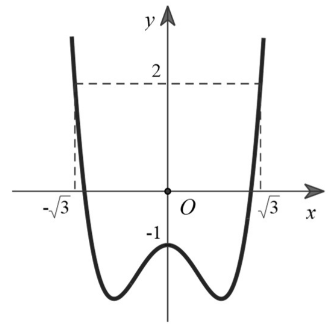
$\Rightarrow\ g'(x)=f'(x)-(2x-2)$

Theo đồ thị ta thấy $f'(x) < (2x-2)$ $(\forall x \in [1;2]) \Rightarrow g'(x) < 0$ $(\forall x \in [1;2])$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[1;2]$

Do đó $(*) \Leftrightarrow$ $m \le \min\limits_{[1;2]} g(x) = g(2) = f(2)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f(x) \ge x^3 - 3x + m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f(x) \ge x^3 - 3x + m$ đúng với mọi $x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là



A. $m \ge 3f(1)$. **B.** $m \ge 3f(-\sqrt{3})$. **C.** $m \le 3f(0)$. **<u>D</u>.** $m \le 3f(\sqrt{3})$.

Lời giải

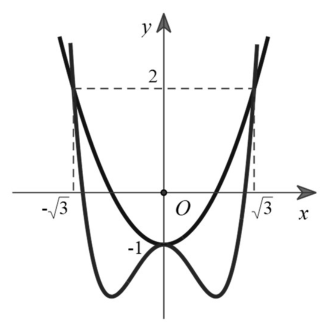
Chọn D

Ta có $3f(x) \ge x^3 - 3x + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x \ge m$

Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tính $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1$

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 1$



Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$

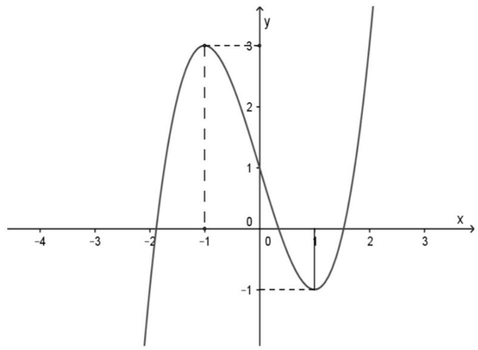
BBT

x	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$
$g'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-\sqrt{3})$	$\searrow$			

	$g\left(\sqrt{3}\right)$

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ thì $m \le \min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]} g\left(x\right) = g\left(\sqrt{3}\right) = 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4. **B.** -1. **C.** 3. **<u>D</u>.** 2.

Lời giải

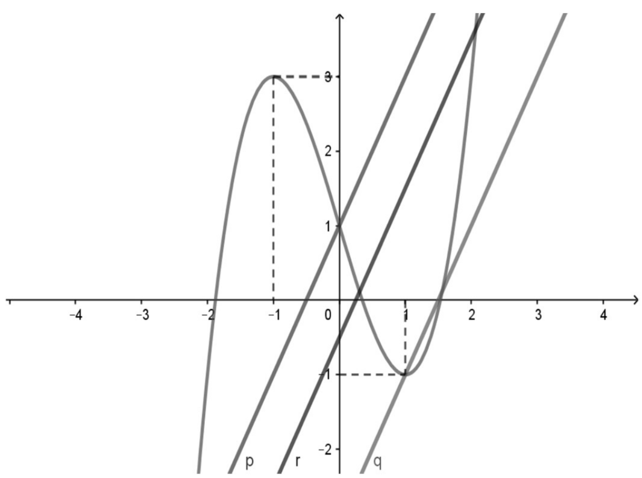
Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left(0;\pi\right) \Rightarrow t \in \left(0;1\right]$.

Ta được phương trình: $f\left(t\right) - 2t = m - 2 \Leftrightarrow f\left(t\right) = 2t + m - 2$ (1)

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f\left(t\right)$ và đường thẳng $y = 2t + m - 2 \quad \left(r\right)$.

Gọi $\left(p\right): y = 2x + 1$ song song với đường thẳng $\left(\Delta\right): y = 2t$ và đi qua điểm $A\left(0;1\right)$.

Gọi $q: y = 2x - 3$ song song với đường thẳng $\left(\Delta\right): y = 2t$ và đi qua điểm $B\left(1;-1\right)$.



Để phương trình $f\left(\sin x\right) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ thì phương trình (1) phải có nghiệm $t \in \left(0;1\right]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p (có thể trùng lên q và bỏ p)

$\Rightarrow -3 \le m - 2 < 1 \Leftrightarrow -1 \le m < 3 \Rightarrow m \in \left\{-1;0;1;2\right\} \Rightarrow S = \left\{-1;0;1;2\right\}$.

Do đó tổng các phần tử là: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$.

Câu 19. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3\left(x\right)+f\left(x\right)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in\left[-1;2\right]$?

A. 1750. **B.** 1748. **C.** 1747. **D.** 1746.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+2$, ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)$

$\Leftrightarrow -x=\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+x^3+m=0\quad(1)$

Xét $h(x)=f^3(x)+f(x)+x^3+m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $h'(x)=3f'(x)\cdot f^2(x)+f'(x)+3x^2=f'(x)\left[3f^2(x)+1\right]+3x^2$.

Ta có $f'(x)=3x^2+1>0,\forall x\in[-1;2]\Rightarrow h'(x)>0,\forall x\in[-1;2]$.

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1;2]$ nên

$\min\limits_{[-1;2]}h(x)=h(-1)=m-1,\quad \max\limits_{[-1;2]}h(x)=h(2)=m+1748.$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$\min\limits_{[-1;2]}h\left(x\right)\cdot\max\limits_{[-1;2]}h\left(x\right)\le 0\quad\Leftrightarrow\quad h\left(-1\right)\cdot h\left(2\right)$

$\Leftrightarrow\quad\left(m-1\right)\left(1748+m\right)\le 0$

$\Leftrightarrow\quad -1748\le m\le 1.$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S=\{-1748;-1747;\ldots;0;1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[2;4\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[2;4\right]$?

x	2	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4 ↘	3 ↗	$\sqrt{11}$ ↘	2

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\underset{\left[2;4\right]}{Min}\,f\left(x\right)=f(4)=2$ và $\underset{\left[2;4\right]}{Max}\,f\left(x\right)=f(2)=4$

Hàm số $g(x)=x+2\sqrt{x^2-2x}$ liên tục và đồng biến trên $\left[2;4\right]$

Suy ra $\underset{\left[2;4\right]}{Min}\,g\left(x\right)=g(2)=2$ và $\underset{\left[2;4\right]}{Max}\,g\left(x\right)=g(4)=4+4\sqrt{2}$

Ta có $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)\Leftrightarrow\dfrac{x+2\sqrt{x^2-2x}}{f(x)}=m\Leftrightarrow\dfrac{g(x)}{f(x)}=m$

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $\left[2;4\right]$

Vì $g\left(x\right)$ nhỏ nhất và $f\left(x\right)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x=2$ nên

$$\underset{[2;4]}{Min}\,h(x)=\frac{\underset{[2;4]}{Min}\,g\left(x\right)}{\underset{[2;4]}{Max}\,f\left(x\right)}=\frac{g\left(2\right)}{f\left(2\right)}=h(2)=\frac{1}{2}$$

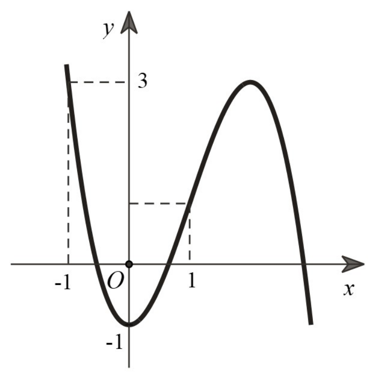
Vì $g\left(x\right)$ lớn nhất và $f\left(x\right)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x=4$ nên

$$\underset{[2;4]}{Max}\,h(x)=\frac{\underset{[2;4]}{Max}\,g\left(x\right)}{\underset{[2;4]}{Min}\,f\left(x\right)}=\frac{g\left(4\right)}{f\left(4\right)}=h(4)=2+2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{2}\le m\le 2+2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 21. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(\cos x\right)+\left(m-2022\right)f\left(\cos x\right)+m-2023=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$ là



A. 1. **B.** 3. **<u>C</u>.** 2. **D.** 5.

Lời giải

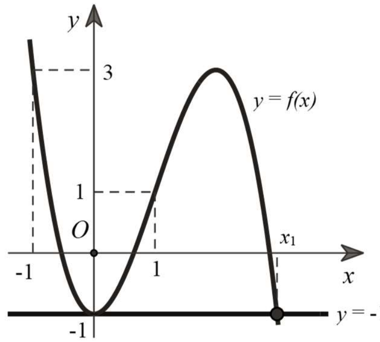
Chọn C

Ta có $f^2\left(\cos x\right)+\left(m-2022\right)f\left(\cos x\right)+m-2023=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\cos x\right)=-1\\f\left(\cos x\right)=2023-m\end{array}\right.$ (1)

* Với $f\left(\cos x\right)=-1$

Dựa vào đồ thị ta có $f\left(\cos x\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\\cos x=x_1\ \ \left(x_1>1\right)(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Vì $x\in\left[0;2\pi\right]\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$



* Với $f\left(\cos x\right) = 2023 - m$

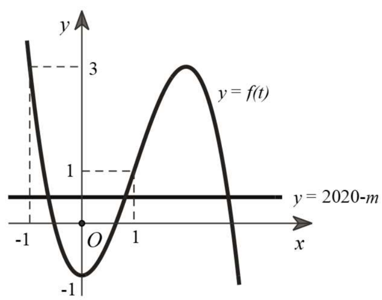
Đặt $t = \cos x \left(t \in \left[-1;1\right]\right)$

Với $t \in \left(-1;1\right]$ thì phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;2\pi\right]$.

Với $t = -1$ thì phương trình $t = \cos x$ có một nghiệm thuộc $\left[0;2\pi\right]$

Phương trình trở thành $f\left(t\right) = 2023 - m$

Để phương trình (1) có tất cả 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f\left(\cos x\right) = 2023 - m$ có 4 nghiệm phân biệt, hay phương trình $f\left(t\right) = 2023 - m$ có hai nghiệm $t \in \left(-1;1\right]$

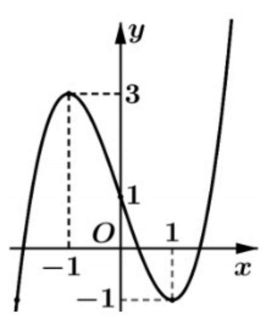


Dựa vào đồ thị ta có để phương trình $f\left(t\right) = 2023 - m$ có hai nghiệm $t \in \left(-1;1\right]$ thì $-1 < 2023 - m \le 1 \Leftrightarrow 2022 \le m < 2024$

Vì m nguyên nên $m \in \left\{2022;2023\right\}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết $f\left(-1\right) = 1; f\left(-\frac{1}{e}\right) = 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f\left(x\right) < \ln\left(-x\right) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1;\frac{-1}{e}\right)$.



A. $m \ge 2$. **<u>B.</u>** $m \ge 3$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right) < \ln\left(-x\right) + m \Leftrightarrow m > f\left(x\right) - \ln\left(-x\right)$.

Xét hàm số $g\left(x\right) = f\left(x\right) - \ln\left(-x\right)$ trên $\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$.

Có $g'\left(x\right) = f'\left(x\right) - \dfrac{1}{x}$.

Trên $\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$ có $f'\left(x\right) > 0$ và $\dfrac{1}{x} < 0$ nên $g'\left(x\right) > 0, \forall x \in \left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$

$\Rightarrow$ hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$.

Vậy nên $f\left(x\right) < \ln\left(-x\right) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \geq g\left(x\right), \forall x \in \left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \geq g\left(-\dfrac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(-1\right) = 5, f\left(-3\right) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f\left(2-x\right) + \sqrt{x^2+4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $\left(3;5\right)$ là

A. 16. **B.** 17. **C.** 0. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g\left(x\right) = 3f\left(2-x\right) + \sqrt{x^2+4} - x$ với $x \in \left(3;5\right)$.

Ta có: $g'\left(x\right) = -3f'\left(2-x\right) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1$.

Với $x \in \left(3;5\right)$:

Ta có: $2 - x \in \left(-3;-1\right)$ nên $f'\left(2-x\right) > 0$ suy ra $-3f'\left(2-x\right) < 0$.

Ta có: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} < \dfrac{x}{x} = 1$

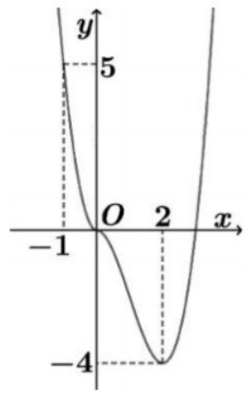
Suy ra $g'\left(x\right) = -3f'\left(2-x\right) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1 < 0, \forall x \in \left(3;5\right)$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(3;5\right)$.

Suy ra $\min\limits_{\left(3;5\right)} g\left(x\right) = g\left(5\right) = 3f\left(-3\right) + \sqrt{5^2+4} - 5 = \sqrt{29} - 5$;

$\max\limits_{\left(3;5\right)} g\left(x\right) = g\left(3\right) = 3f\left(-1\right) + \sqrt{3^2+4} - 3 = 12 + \sqrt{13}$.

Để phương trình $3f\left(2-x\right)+\sqrt{x^2+4}-x=m$ có nghiệm thì $\sqrt{29}-5\le m\le 12+\sqrt{13}$ mà m nguyên dương nên $m\in\left\{1,2,...,15\right\}$ tức là có 15 giá trị

Câu 24. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-1\right)=1,\ f\left(-\dfrac{1}{e}\right)=2$. Hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f\left(x\right)<\ln\left(-x\right)+x^2+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi



A. $m>0$. **B.** $m>3-\dfrac{1}{e^2}$. **C.** $m\ge 3-\dfrac{1}{e^2}$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $-x>0\Leftrightarrow x<0$

Bất phương trình đã cho tương đương với $f\left(x\right)-\ln\left(-x\right)-x^2<m$ (*).

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\ln\left(-x\right)-x^2$ trên $\left[-1;-\dfrac{1}{e}\right]$.

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-\dfrac{1}{x}-2x$. Với $x\in\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$ thì $f'\left(x\right)>0;-\dfrac{1}{x}-2x>0$ nên $g'\left(x\right)>0$.

Do đó hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[-1;-\dfrac{1}{e}\right]$.

Suy ra (*) nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi

$m\ge g\left(-\dfrac{1}{e}\right)=f\left(-\dfrac{1}{e}\right)-\ln\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^2}=3-\dfrac{1}{e^2}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1}{4\,|\,x-m\,|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt bằng

A. 14. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x\ln 3}+3^x\cdot\ln 3+\dfrac{1}{x^2}\cdot 3^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 3>0,\forall x>0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)\left(1\right)$.

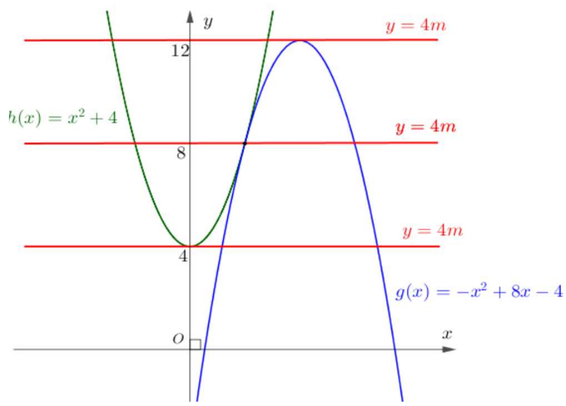
Mặt khác $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \log_3 \dfrac{1}{x} + 3^{\frac{1}{x}} - 3^x = -\left(\log_3 x - 3^{\frac{1}{x}} + 3^x\right) = -f\left(x\right)$, khi đó

$$f\left(\frac{1}{4\,|\,x-m\,|+3}\right) + f\left(x^2 - 4x + 7\right) = 0 \Leftrightarrow -f(4\,|\,x-m\,|+3) + f\left(x^2 - 4x + 7\right) = 0$$

$\Leftrightarrow f\left(4\,|\,x-m\,|+3\right) = f\left(x^2 - 4x + 7\right)\ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right),\left(2\right) \Rightarrow 4\left|x-m\right| + 3 = x^2 - 4x + 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m = -x^2 + 8x - 4 \\ 4m = x^2 + 4 \end{array}\right.$.

Ta có đồ thị sau:



Theo yêu cầu bài toán tương đương $\left[\begin{array}{l} 4m = 4 \\ 4m = 8 \\ 4m = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3 \end{array}\right.$. Vậy $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.