1. Cho 100 số tự nhiên không lớn hơn 100 có tổng bằng 200. Chứng minh rằng từ các số đó có thể chọn được một số số có tổng bằng 100.

**Hướng dẫn giải**

Nếu tất cả các số bằng nhau thì tất cả các số là 2. Khi đó ta lấy 50 số 2 sẽ có tổng là 100.

Giả sử  ta xét 100 số có dạng

.

Nếu có một số chia hết cho 100 thì số đó bằng 100 vì số đó bé hơn 200.

Nếu không có số nào chia hết cho 100 thì trong 100 số phải có hai số đồng dư trong phép chia cho 100 (vì các số dư nhận giá trị từ 1 đến 99) suy ra hiệu của chúng chia hết cho 100 và hiệu hai số đó chính là tổng cần tìm.

1. Cho hình vuông có cạnh 6cm và 2014 đường tròn bán kínhcm. Đặt tất cả các đường tròn vào trong hình vuông. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng cắt 18 đường tròn đã cho.

**Hướng dẫn giải**

+) Chia hình vuông bởi 117 đường thẳng song song cách đều nhau và song song với một cạnh của hình vuông, cách nhau một khoảng cm. Khi đó hình vuông được chia thành 118 dải hình chữ nhật có chiều rộng bằng cm, chiều dài bằng chiều dài hình vuông.

+) Hình tròn có đường kính cm, > nên mỗi đường tròn đều bị cắt bởi ít nhất một đường thẳng trên.

+) Vì 2014 = 118. 17 + 8 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một đường thẳng cắt 18 đường tròn.

1. Chứng minh: 
2. Cho đa giác đều , (, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm  nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm . Tìm n.
3. Tính .

**Hướng dẫn giải**







.

1. a) Tìm hệ số của số hạng chứa  trong khai triển: .

b) Tính tổng: S =  (với n).

1. Cho khai triển . Tính .
2. Chọn ngẫu nhiên ba số đôi một khác nhau từ tập hợp. Tính xác suất để trong ba số được chọn không có hai số tự nhiên liên tiếp.
3. 1. Cho  chữ số. Hỏi có bao nhiêu cách viết số có  chữ số khác nhau và không nhỏ hơn.

**2.** Hai hộp có chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất  quả cầu đỏ và  quả cầu xanh, hộp thứ hai chứa  quả cầu đỏ và  quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả. Tính xác suất sao cho:

**a.** Cả  quả đều đỏ.

**b.** Hai quả cùng màu.

**c.** Hai quả khác màu.

1. Cho các số .

1) Hỏi lập được bao nhiêu số có  chữ số trong đó có hai chữ số  và ba chữ số còn lại khác nhau và khác số .

2) Tính tổng các số lập được ở câu 1).

**Hướng dẫn giải**

1) Mỗi số có  chữ số gồm  số  và  số khác là hoán vị  phần tử ; do  chữ số  khi hoán vị vẫn được  số. Vậy các số cần lập là .

2) Số có  chữ số dạng .



Mỗi số  có  cách chọn   Mỗi số  xuất hiện 4! lần.



Tương tự 

Vậy .

1. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên đó về 3 tỉnh công tác sao cho mỗi tỉnh có 5 người và có ít nhất một nữ.
2. Cho khai triển .

Hãy xác định a5.

1. Cho tập A = {0;1;2;3;4;5;6;7}.

1. Có bao nhiêu cách chia tập A thành hai tập con khác rỗng.

2. Lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từ tập A. Lấy ngẫu nhiên

 một số trong các số vừa lập, tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 4.

1. Tìm số hạng không chứa x của khai triển nhị thức . Biết rằng:

 .

1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau trong đó có 3 số chẵn và 3 số lẻ ?
2. Cho k là số tự nhiên thỏa mãn 

Chứng minh rằng: 

1. Giả sử có 20 người, xếp ngồi vào 4 bàn riêng biệt. Cách xếp tốt là những người ngồi cùng bàn đều quen nhau. Giả sử tồn tại cách xếp tốt, đồng thời đối với mọi cách xếp tốt, ta đều có đúng 5 người ngồi mỗi bàn. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu cặp quen nhau ?

Hướng dẫn giải

Xét nhân vật A thuộc bàn 1, suy ra trong mỗi bàn 2, 3, 4 đều có ít nhất một người không quen A. Vì nếu quen hết 5 người trong 1 trong các bàn 2, 3, 4 thì A phải sang bàn đó, nhưng lại là 6 người (trái với giả thiết là 5 người).

Suy ra số người mà A không quen lớn hơn hoặc bằng 3 người.

Do đó mỗi người quen nhiều nhất là 16 người.

Mà số cặp quen nhau nhỏ hơn hoặc bằng .

Giả sử có đúng 160 cặp quen nhau thì có đúng  cặp không quen nhau.

Suy ra có thể xếp thành 5 nhóm, mỗi nhóm 4 người không quen nhau. Mỗi người đều quen với những người thuộc 4 nhóm còn lại. Ghép người đó với mỗi nhóm 1 người vào một bàn, ta được cách xếp tốt.

1. Cho trước số nguyên dương  . Trong một giải đấu cờ vua có 2n vận động viên tham gia, mỗi người đấu với người khác đúng một ván. Tại một thời điểm trong giải, người ta thấy có n2+1 ván đấu đã diễn ra. Chứng minh rằng khi đó có thể chọn ra ba vận động viên sao cho hai người bất kỳ đều đã thi đấu với nhau.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Với n = 2: Giả sử có bốn vận động viên theo dự là A, B, C, D và có 5 ván đấu đã diến ra.

Nếu hai trong ba người B, C, D đều đã đấu với nhau một ván thì ta có điều phải chứng minh.

Nếu có hai trong ba người B, C, D chưa đấu với nhau thì mỗi người B, C, D đều đã đấu với A một ván. (Nếu không thì số ván sẽ ít hơn 5).

Khi đó ba người A, B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử bài toán đúng với n = k 

Ta chứng minh bài toán đúng với n = k + 1.

Giả sử E và F là hai vận động viên đã đấu với nhau.

Nếu tổng ván đấu giữa 2k vận động viên còn lại không ít hơn k2+1 thì theo giả thiết quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Nếu tổng số ván đấu giữa 2k vận động viên không vượt quá k2 tổng số ván mà E và F đã đấu không ít hơn 2k+1(không kể ván đấu giữa E và F).

Do đó trong số 2k vận động viên còn lại, phải có một người G đã đấu với cả E và F.

Khi đó ta có ba vận động viên E, F, G thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy bài toán được chứng minh.

1. Tìm số hạng không chứa x của khai triển: 

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát thứ k+1 trong khai triển của A có dạng:



Số hạng Tk+1 không chứa x thì 10-2k=0k=5

Vậy số hạng không chứa x của khai triển là:  .

1. Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 2013 chữ số sao cho mỗi chữ số 1, 2, 3 xuất hiện đúng lẻ lần.
2. Trong mặt phẳng cho  đường thẳng phân biệt sao cho không có hai đường nào song song hoặc vuông góc và không có ba đường nào đồng quy. Chúng cắt nhau tạo thành các tam giác. Chứng minh rằng số các tam giác nhọn tạo thành không vượt quá .

Hướng dẫn giải

Gọi số tam giác tạo thành là . Ta phải chứng minh 

Với ba đường thẳng bất kỳ trong số các đường thẳng đã cho luôn cắt nhau tạo thành một tam giác hoặc nhọn hoặc tù.

Gọi  là số các tam giác tù. Ta gọi một tam giác tạo bởi ba đường thẳng  nào đó là: "giả nhọn cạnh " nếu các góc chung cạnh  của tam giác đó là các góc nhọn. Chọn một đường thẳng  nào đó và coi nó là trục hoành, các đường thẳng còn lại được chia làm hai tập: Tập  là các đường thẳng với hệ số góc dương, Tập  là tập các đường thẳng với hệ số góc âm. Hai đường thẳng tạo với d một tam giác "giả nhọn" nếu một đường thẳng thuộc tập  và một đường thẳng thuộc tập .

Gọi  là số đường thẳng thuộc  và  là số các đường thẳng thuộc tập . Khi đó  và số tam giác "giả nhọn cạnh " là . Ta có 

Nhưng do  có thể là đường thẳng bất kỳ trong số  đường thẳng đã cho nên ta có số cặp (đường thẳng  ; tam giác "giả nhọn cạnh d") sẽ nhỏ hơn hoặc bằng .

Trong cách tính trên mỗi tam giác nhọn được tính 3 lần (theo 3 cạnh) còn mỗi tam giác tù được tính 1 lần nên



Thế nhưng tổng số các tam giác là:



Từ (1) và (2) suy ra



  hay .

1. Cho đa giác đều 2n cạnh (n≥4) nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi x là số tứ giác lồi có 4 cạnh là 4 đường chéo của đa giác đã cho và y là số hình chữ nhật có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho. Tìm n để: x – y = 3n. (Đường chéo của đa giác là đoạn thẳng nối hai đỉnh không liên tiếp)

Hướng dẫn giải

Gọi các đỉnh của đa giác đều 2n cạnh là: . Trước hết ta tìm x

Ta đếm số các tứ giác thoả mãn yêu cầu bài toán có 1 đỉnh là 

Khi đó ; không phải là đỉnh của tứ giác vì ; là các cạnh của đa giác. Ta cần chọn thêm các đỉnh: thoả mãn (Vì giữa 2 đỉnh của tứ giác phải có ít nhất 1 đỉnh của đa giác).

Mỗi cách chọn bộ 3 đỉnh trên là 1 cách chọn bộ 3 số phân biệt trong 2n-5 số tự nhiên từ 5 đến 2n-1.

Vậy có tứ giác có đỉnh  thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vì đa giác có 2n đỉnh và mỗi tứ giác được đếm lặp lại 4 lần theo 4 đỉnh nên số tứ giác cần tìm là: , do đó x=

Tìm y: do đa giác đều đã cho có 2n đỉnh nên nó có n đường chéo đi qua tâm O

Ta thấy cứ hai đường chéo bất kì qua O lập thành một hình chữ nhật, nên số hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác đều đã cho là , do đó y = .

Từ giả thiết ta có phương trình: - = 3n (1)



Vậy n=5 thỏa mãn điều kiện bài toán.

1. Cho n là số nguyên dương không nhỏ hơn 3. Các điểm  cùng thuộc một đường tròn. Có tối đa bao nhiêu tam giác nhọn có đỉnh là 3 trong số các đỉnh trên.

Hướng dẫn giải

Với hai điểm  ta kí hiệu  là cung bắt đầu từ  và kết thúc là  theo chiều kim đồng hồ và kí hiệu  là số đo của cung đó. Một cung được gọi là tù nếu .

Nhận thấy  nên có ít nhất 1 trong hai cung này tù.

Kí hiệu  là số cung tù mà giữa hai đầu mút có đúng s – 1 điểm

Nếu  thì mỗi i có ít nhất một cung  là tù, tổng theo i ta được



Đẳng thức trên xảy ra khi không có đường kính .

Nhận thấy số tam giác không nhọn (tù hoặc vuông) bằng số góc không nhọn.

Mỗi cung tù chứa s – 1 điểm thì có n – s – 1 tam giác không nhọn.

(Dùng hai điểm đầu mút của cung kết hợp với 1 điểm ngoài cung)

Số lượng các tam giác không nhọn là



Theo bất đẳng thức trên ta đánh giá được:

 nếu n lẻ



Nếu n chẵn.

Dấu bằng xảy ra ở các BĐT trên là không tồn tại 2 điểm đối xứng nhau qua tâm đường tròn.

Số lượng các tam giác có đỉnh là 3 trong các điểm trên là .

Vậy số tam giác nhọn là

 nếu n lẻ

Và  nếu n chẵn.

1. Cho 2015 điểm trên đường thẳng, tô các điểm bằng một trong 3 màu xanh, đỏ, vàng (mỗi điểm chỉ tô một màu). Có bao nhiêu cách tô khác nhau sao cho không có 3 điểm liên tiếp nào cùng màu.

Hướng dẫn giải

Gọi $S\_{n}$ là số cách tô màu thỏa mãn cho n ($(n\geq 3)$) điểm (bài toán của ta là ). Ta sẽ tính $S\_{n+1}$ theo $S\_{n}$, xét hai điểm cuối cùng của $S\_{n}$ có hai trường hợp xảy ra:

+Nếu hai điểm cuối cùng màu thế thì điểm thứ $n+1$khác màu 2 điểm cuối.

+Nếu hai điểm cuối khác màu thì điểm thứ  tô bất kì.

Từ đó sinh ra hai số đặc trưng $M\_{n}$ là số cách tô n điểm mà hai điểm cuối cùng màu, $P\_{n}$  là số cách tô màu n điểm mà hai điểm cuối khác màu và cả hai cùng thỏa mãn 3 điểm liên tiếp khác màu.

Ta có: $S\_{n+1}=2M\_{n}+3P\_{n}$, $P\_{n+1}=2S\_{n}; M\_{n+1}=P\_{n}$.

Thế thì $S\_{n+1}=2P\_{n-1}+6S\_{n}=4S\_{n-2}+6S\_{n-1}$. Vậy ta có hệ thức truy hồi: $S\_{n+1}-6S\_{n-1}-4S\_{n-2}=0$. Bây giờ ta tính $S\_{3}, S\_{4}$thấy ngay $S\_{3}=27-3=24$, $S\_{4}=4!-3-12=49$. Phương trình đặc trưng $x^{2}-6x-4=0$ có nghiệm là: $x\_{1}=3+\sqrt{13}, x\_{2}=3-\sqrt{13}$. Công thức xác định $S\_{n}=ax\_{1}^{n}+bx\_{2}^{n}$ với $a, b$thỏa mãn: 

Sau đó cho ta được kết quả bài toán.

1. Một khu rừng có dạng hình vuông với chiều dài là 1km. Trong khu rừng có 4000 cây thông, cây to nhất có đường kính 0,5 m. Chứng minh rằng trong khu rừng đó có ít nhât 560 mảnh đất , diện tích mỗi mảnh 200m2 không có cây thông nào.

Hướng dẫn giải

+) Vì 1km = 1000m = 48.20 + 47.0,6 + 2 . 5,9

1000m = 95.10 + 94.0,52 + 2.0,56

+) Chia một cạnh hình vuông thành 48 đoạn, mỗi đoạn dài 20m , khoảng cách giữa các đoạn là 0,6m, ở hai đầu là hai đoạn mỗi đoạn dài 5,9m. Chia cạnh còn lại thành 95 đoạn, mỗi đoạn dài 10m, khoảng cách giữa các đoạn là 0,52m, ở hai đầu là hai đoạn mỗi đoạn dài 0,56m. Như vậy có tất cả 48.95 = 4560 mảnh có diện tích 200m2. Vì chỉ có 4000 cây và do đường kính của cây không quá 0,5m nên còn ít nhất 560 mảnh (mỗi mảnh có diện tích 200m2).

1. Sắp xếp chín học sinh lớp 11 (hoặc giới Nam hoặc giới Nữ) đứng cách đều nhau trên một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại sáu học sinh cùng giới đứng tại sáu đỉnh của hai tam giác bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi 9 học sinh là H1, H2, ...H9 đứng tại chín đỉnh của đa giác đều chín cạnh.

Vì có 9 học sinh đứng tại 9 đỉnh nên có ít nhất 5 đỉnh có học sinh cùng giới (hoặc là Nam hoặc là Nữ). Để cho tiện, ta giả sử 5 đỉnh này có 5 học sinh Nam đứng (tương tự nếu là 5 học sinh Nữ).

Gọi một tam giác có 3 đỉnh mà 3 học sinh Nam đứng là tam giác Nam, như vậy có ít nhất  tam giác Nam.

Bây giờ ta sẽ chứng minh có hai tam giác Nam bằng nhau:

Chín đỉnh của đa giác chia đường tròn ngoại tiếp nó thành 9 cung bằng nhau  và cung , ta gọi mỗi cung này là một “mảnh”.

Không mất tính tổng quát, gọi  là tam giác có . Hơn nữa sốlà số mảnh của cung  không chứa điểm (); tương tự ta định nghĩa như thế cho số .

Tương ứng với mỗi tam giác  với một bộ ba . Ta nhận thấy rằng:  và . Chẳng hạn với tam giác với 3 đỉnh  ta gọi là tam giác  tương ứng với một bộ ba (2;3;4) theo thứ tự đó.

Như vậy, các tam giác bằng nhau ứng với cùng một bộ ba số như định nghĩa, trong khi các tam giác không bằng nhau ứng với các bộ ba khác nhau. Từ đó, ta xây dựng một song ánh giữa các lớp tam giác bằng nhau với tập hợp các bộ ba số nguyên dương có thứ tự  với .

Có tất thảy bẩy bộ ba số thỏa mãn là: và (3,3,3). Tức là có 7 lớp tam giác bằng nhau. Vì có ít nhất 10 tam giác Nam (Ba đỉnh tam giác là 3 học sinh Nam), nên có một lớp có ít nhất hai tam giác Nam; do đó có ít nhất sáu học sinh cùng giới, đứng tại sáu đỉnh của hai tam giác bằng nhau.

1. Một cửa hàng có 4 loại kem: Kem sữa, kem xoài, kem dứa, kem sô cô la. Một nhóm có 9 người vào ăn kem và gọi 9 cốc kem. Hỏi có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn ?

Hướng dẫn giải

Gọi số cốc kem Kem sữa, kem xoài, kem dứa, kem sô cola lần lượt là a, b, c, d (), theo đầu bài ta có a + b + c + d = 9.

Như vậy mỗi sự lựa chọn là một bộ (a;b;c;d) các số nguyên không âm sao cho a + b + c + d = 9; với mỗi bộ số này ta đặt tương ứng với một dãy nhị phân theo quy tắc sau: Viết từ trái sang phải a chữ số 1 liên tiếp, 1 chữ số 0, b chữ số 1 liên tiếp, chữ số 0, c chữ số 1 liên tiếp, chữ số 0, rồi d chữ số 1 liên tiếp:

 

Như vậy mỗi bộ (a;b;c;d) được tương ứng với một dãy nhị phân có dộ dài 12 ký tự trong đó có 9 ký tự 1 và 3 ký tự 0. hiển nhiên tương ứng này là một song ánh vậy số cách chọn bằng số cách chọn 3 vị trí trong 12 vị trí cho 3 chữ số 0.Thành thử có tất cả là  sự lựa chọn.

1. Có bao nhiêu cách phân tích $6^{9}$ thành tích của 3 số nguyên dương, biêt các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính 1 lần?

Hướng dẫn giải

 Xét phân tích $6^{9}=(2^{a\_{1}}.3^{b\_{1}})(2^{a\_{2}}.3^{b\_{2}})(2^{a\_{3}}.3^{b\_{3}})$ với $\left\{\begin{array}{c}a\_{i }, b\_{i} \in N\\a\_{1}+a\_{2}+a\_{3}=9\\b\_{1}+b\_{2}+b\_{3}=9\end{array}\right.$

 Với mỗi $a\_{1}\in N, 0\leq a\_{1}\leq 9$, có $10-a\_{1}$ cách chọn số $a\_{2}$, để $a\_{1}+a\_{2}\leq 9$

từ đó chọn $a\_{3}=9-a\_{1}-a\_{2}$.

 Vậy số cách chọn các bộ $(a\_{1}, a\_{2}, a\_{3})$ là 10+9+....+1 = 55 cách

$⇒$số cách chọn các bộ $(a\_{1}, a\_{2}, a\_{3})$ và $(b\_{1}, b\_{2}, b\_{3})$ là 55.55 cách.

 Bây giờ, ta sẽ tính số các cách phân tích bị trùng nhau.

 +) TH1: 3 thừa số bằng nhau:

$6^{9}=(2^{3}.3^{3})(2^{3}.3^{3})(2^{3}.3^{3})$

 +) TH2: 2 thừa số bằng nhau:

$6^{9}=(2^{a}.3^{b})(2^{a}.3^{b})(2^{9-2a}.3^{9-2b})$ và (a ; b) # (3 ; 3).

 Khi đó a $\in $ {0; 1; 2; 3; 4} ; b$\in $ {0; 1; 2; 3; 4 } và (a ; b) # (3 ; 3)

 → số cặp (a; b) là 5.5 – 1 =24, và 24 cặp này cho ta 24 cách phân tích thỏa mãn yêu cầu. Tuy nhiên, mỗi cặp sẽ cho 3 lần đếm trong quá trình đếm mà ta vừa nêu ở trên. (1 điểm)

 +) TH3: nếu cả 3 thừa số khác nhau, thì mỗi phân tích bị đếm trùng 3!=6 lần.

 Vậy số cách phân tích là: $1+24+\left(55×55-24×3-1\right):6=517$ cách

1. **Trên tờ giấy có kẻ một lưới các ô vuông, người ta vẽ một đường gấp khúc khép kín với các đỉnh tại các mút của lưới và tất cả các đoạn của nó có độ dài bằng nhau. Chứng minh rằng, số các đoạn của đường gấp khúc khép kín như vậy là một số chẵn.**

Hướng dẫn giải

Giả sử  là đường gấp khúc đã cho . Ta lấy hệ trục tọa độ vuông góc là các đường biên của lưới và chiều rộng của một ô làm đơn vị. Khi đó tọa độ  của đỉnh  là nguyên với 

Đặt 

Ta có

 

Để ý là  chia cho 4 dư 0 nếu  đều chẵn, dư 1 nếu có một số lẻ và dư 2 nếu hai số đều lẻ. Có thể giả thiết rằng trong  có ít nhất một số lẻ, nói cách khác là ta chia tất cả các số này cho ước chung của chúng và xét bộ số nhận được.

Như vậy ta chỉ có hai trường hợp xảy ra:

1) C chia cho 4 dư 2, khi đó với mỗi i thì Xi và Yi đều lẻ nên từ điều kiện (1) suy ra n chẵn.

2) C chia 4 dư 1, khi đó với mỗi i thì hoặc Xi hoặc Yi là số lẻ, còn số kia chẵn. Từ (1) suy ra số cặp (Xi;Yi) mà Xi lẻ là một số chẵn. Từ (2) suy ra số các cặp (Xi;Yi) mà i lẻ là một số chẵn nên số cặp (Xi;Yi) là chẵn.

Như vậy trong mọi trường hợp n đều chẵn.

1. Cho , với mỗi tập tập con khác rỗng , ta chọn một phần tử của nó làm **phần tử đại diện**. Tìm số cách ký hiệu **phần tử đại diện** cho mọi tập con khác rỗng của S thỏa mãn với mỗi tập khác rỗng  là hợp của các tập khác rỗng không giao nhau , thì **phần tử đại diện** của D cũng là **phần tử đại diện** của một trong ba tập A, B, C.

Hướng dẫn giải

+ Với mỗi tập , ký hiệu  là phần tử đại diện của X. Giả sử . Trước hết ta chứng minh khẳng định sau: Nếu  và  thì .

- Nếu , ta viết S thành hợp của ba tập không giao nhau gồm X và hai tập con khác nữa của S. Từ giải thiết suy ra .

- Nếu , xét phần tử . Coi S là giao của ba tập không giao nhau gồm  và hai tập khác nữa, áp dụng trường hợp , ta suy ra , nên  (vì theo giả thiết phần tử đại diện của một trong ba tập cũng là phần tử đại diện của X, mà  và hai tập còn lại đều không chứa y). Do y lấy tùy ý nên . Từ đó ta có .

- Chú ý rằng khẳng định trên vẫn còn đúng với mọi tập con của S có từ 5 phần tử trở lên.

+ Ta có 2014 cách chọn , với mọi  thì . Xét . Tương tự ta có 2013 cách chọn , với mọi  thì .

Lặp lại tương tự quá trình này ta có 2014.2013….5 cách chọn  với mỗi , , .

Bây giờ còn lại 4 phần tử của S ký hiệu là . Ta có 4 cách chọn , giả sử , chứng minh tương tự trên ta có



Còn 7 tập chưa có phần tử đại diện là  , phần tử đại diện của các tập này được chọn tùy ý nên có 34.23 cách chọn.

+ Vậy tổng cộng có 2014.2013….4.34.23 = 2014!.108 cách xếp phần tử đại diện cho các tập con.

1. Trên một mặt phẳng có tất cả các điểm được tô bởi 3 màu đỏ, trắng, vàng.

 Chứng minh rằng tồn tại một tam giác cân có 3 đỉnh cùng màu.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Trong một ngũ giác đều, tam giác có 3 đỉnh thuôc 6 điểm gồm 5 đỉnh của ngũ giác và tâm ngũ giác đều là tam giác cân.

Trở lại bài toán: Xét ngũ giác đều ABCDE có tâm O khi đó :

TH1: nếu tồn tại 3 trong 6 điểm A,B,C,D,E,O cùng màu ví dụ như A,B,C thì ta được tam giác A,B,C có 3 đỉnh cùng màuđpcm.

TH2:không có 3 điểm trong 6 điểm A,B,C,D,E,O cùng màu. Khi đó một màu được tô cho 2 điểm. Giả sử A và O cùng màu khi đó xét đường tròn (O;OA) :

+ nếu tồn tại một điểm F thuộc (O) mà F cùng màu với O và A thì ta có tam giác AOF cân đpcm.

+không tồn tại điểm nào trên (O) cùng màu với A và O, khi đó xét ngũ giác đều A’B’C’D’E’ (AA’,B’,C’,D’,E’) khi đó 5 đỉnh của ngũ giác trên chỉ được tô bởi 2 màu nên theo nguyên lí Đirich lê tồn tại 3 đỉnh cùng một màu, ví dụ A’,B’,C’ khi đó ta được tam giác cân có 3 đỉnh cùng màuđpcm.

Vậy luôn tồn tại 1 tam giác cân trong mặt phẳng có 3 đỉnh cùng màu(đpcm).

1. Cho bộ số .

**1)** Chúng ta thực hiện phép biến đổi trên các bộ 3 số như sau: thay hai số trong chúng, ví dụ a và b, bởi  và . Hỏi có thể nhận được bộ số sau:  thỏa mãn  sau khi thực hiện hữu hạn phép biến đổi từ bộ số ban đầu  ?

**2)** Nếu chúng ta thực hiện phép biến đổi trên các bộ 3 số như sau: thay hai số trong chúng, ví dụ a và b, bởi  và . Hỏi có thể nhận được bộ số sau khi thực hiện hữu hạn phép biến đổi từ bộ số ban đầu 

Hướng dẫn giải

Ta thực hiện theo cấu hình sau 

Dễ thấy:.

1. Tồn tại hay không một tập hợp gồm 2014 số nguyên dương với tính chất: loại bất cứ số nào ra khỏi tập hợp đó thì tập hợp 2013 số còn lại có thể chia thành hai tập con với tổng các số (thuộc mỗi tập con đó) là bằng nhau?

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại một tập F với tính chất đã cho.

Nếu mọi số a ∈F đều chẵn, ta xét tập F’ = .

Hiển nhiên tập F’ cũng có tính chất nêu trong bài toán. Do đó ta có thể coi rằng tồn tại một tập F thoả mãn bài toán và F chứa ít nhất một số lẻ a.

Gọi a1, a2, …a2014 là các phần tử của tập F.

Đặt S = a1 + a2 + … + a2014

Theo giả thiết, ∀i (1 ≤ i ≤ 2014) tập F\{ai} được chia thành hai tập con với tổng các số là bằng nhau nên tổng S – ai của tập F\{ai} là một số chẵn với ∀i = 1,…,2014.

Từ đó suy ra:  là một số chẵn ⇒ S là số chẵn.

Khi đó S – a là một số lẻ mâu thuẫn với S – ai là một số chẵn với ∀i = 1,…,2014.

Vậy không tồn tại tập hợp với tính chất đã nêu.

1. Một lớp học có 17 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 37 học sinh đó thành một hàng dọc sao cho xuất hiện đúng một cặp nam - nữ thỏa mãn nam đứng trước nữ?

Hướng dẫn giải

Xét dãy nhị phân sau:  trong đó: có duy nhất một cặp (0;1), 17 chữ số 1 và 20 chữ số 0.Số các dãy nhị phân thỏa mãn là số nghiệm nguyên của hệ phương trình:

 

Số nghiệm nguyên không âm của hệ phương trình là: .

Trở lại bài toán:

Coi mỗi chữ số 0 là một học sinh nam, mỗi chữ số 1 là một học sinh nữ.

Do vậy: số cách xếp 37 học sinh thành một hàng dọc sao cho xuất hiện đúng một cặp nam - nữ thỏa mãn nam đứng trước nữ là .

1. Lấy ngẫu nhiên 498 số nguyên dương không vượt quá 1000. Chứng minh rằng trong đó có 2 số có tổng chia hết cho 111.

Hướng dẫn giải

Xét tập S={1,2,…,1000} ta phân hoạch S như sau:

A={1000}, B={111;222;…;999}

Và chia tập T=S\(AUB) thành các tập con có 2 phần tử mà tổng bằng 999 như sau:

T1={1;998}, T2={2;997}, T3={3;996},…, T495={499;500}.

Như vậy S được chia thành 497 tập con, vậy 498 số được chọn ngẫu nhiên phải có 2 số rơi vào cùng một tập hợp.

Hai số đó hoặc cùng chia hết cho 111 hoặc có tổng bằng 999 nên tổng của chúng chia hết cho 111

1. Cho tập hợp$ S=\{1,2,…,2016\}$.
a) Hỏi có bao nhiêu tập con 3 phần tử của $S$ mà chúng là độ dài 3 cạnh của một tam giác có cạnh lớn nhất có độ dài bằng 1000?
b) Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của $S$, tính xác suất để 3 số được chọn là độ dài 3 cạnh của một tam giác có cạnh lớn nhất có độ dài là một số chẵn.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $1000=2k$ và gọi $T$ là tập chứa các tập con thỏa mãn đề bài, theo BĐT tam giác và không mất tính tổng quát, ta có

$$T=\left\{\left\{x,y,2k\right\}⊂S| x<y<2k,x+y>2k\right\}.$$

Rõ ràng $T=\left\{\left\{x,y\right\}⊂S| x<y<2k,x+y>2k\right\}.$

Từ điều kiện của $x$ và $y$ ta có $x+y>2k$ và $x+y>2x$. Ta xét hai trường hợp, đó là trường hợp $2x<2k$ và trường hợp $2x\geq 2k$.

Trường hợp 1, $2x<2k$. Ta cũng có $x\geq 2$ (do $y\leq 2k-1$), suy ra $x\in \left\{2,3,…,k-1\right\}$. Lúc này, với mỗi giá trị của $x$, ta có thể chọn $y$ tùy ý thuộc tập $\left\{2k-x+1,2k-x+2,…,2k-1\right\}$ (tập này có $x-1$ phần tử). Dẫn đến số cách chọn các tập $\{x,y\}$ thỏa mãn là

$$\sum\_{x=2}^{k-1}\left(x-1\right)=\sum\_{x=1}^{k-2}x$$

Trường hợp 2, $2x\geq 2k$. Hiển nhiên ta cũng phải có $x\leq 2k-2$, suy ra $k\leq x\leq 2k-2$. Khi đó, với mỗi $x$ thuộc tập $\{k,k+1,…,2k-2\}$, ta có thể chọn $y$ tùy ý thuộc tập $\left\{x+1,x+2,…,2k-1\right\}$ (tập này có $2k-1-x$ phần tử). Do đó, số cách chọn các tập $\{x,y\}$ thỏa mãn là

$$\sum\_{x=k}^{2k-2}\left(2k-1-x\right)=\sum\_{x=1}^{k-1}x$$

Vậy

$$\left|T\right|=\sum\_{x=1}^{k-2}x+\sum\_{x=1}^{k-1}x=(k-1)^{2}=499^{2}=249001.$$

b) Với mỗi số nguyên dương chẵn $z=2k$, kí hiệu $T\_{k}=\left\{\left\{x,y,z\right\}⊂S| x<y<z,x+y>z\right\}$. Khi đó, số cách chọn 3 phần tử thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$\sum\_{k=1}^{1008}\left|T\_{2k}\right|.$$

Theo câu a), ta có $\left|T\_{2k}\right|=\left(k-1\right)^{2}.$ Suy ra

$$\sum\_{k=1}^{1008}\left|T\_{2k}\right|=\sum\_{z=1}^{1008}\left(k-1\right)^{2}=\sum\_{k=0}^{1007}k^{2}=\frac{1007⋅1008⋅(2⋅1007+1)}{6}.$$

Và do số cách chọn 3 phần tử bất kì thuộc $S$ là $C\_{2016}^{3}$, suy ra xác suất cần tính là

$$\frac{1007⋅1008⋅(2⋅1007+1)}{6C\_{2016}^{3}}=\frac{1}{4}=0,25.$$

1. Cho 10 người ngồi thành một hàng ngang. Có bao nhiêu cách chia những người này thành 3 nhóm sao cho không có 2 người ngồi cạnh nhau thuộc cùng một nhóm.

Hướng dẫn giải

Đặt  là số cách chia nhóm n người thành k nhóm mà trong mỗi nhóm không có 2 người liên tiếp.

Sử dụng truy hồi ta được: .

(Xét nhóm có n – 1 người trước đó, với  và  tương ứng là số cách phân chia thành k và k – 1 nhóm thỏa mãn, ta thêm 1 người, sẽ được nhóm n người.

Xét cách chia nhóm này thành k nhóm thỏa mãn.

Người này có thể đứng 1 mình 1 nhóm, số cách là 

Người này có thể thêm vào nhóm không có người thứ n – 1, có k – 1 nhóm như vậy, trong trường hợp này có  cách)

Áp dụng (\*) với  ,vào bài toán ta được:



=



(Chú ý rằng:  , do chỉ có 1 cách chia 2 nhóm xen kẽ nhau)

1. Cho  là các số nguyên dương thoả mãn . Xét tập hợp . Gọi  là tập hợp tất cả các tập con  của  thoả mãn đồng thời hai tính chất sau:

;

.

Hãy xác định số phần tử của tập hợp .

Hướng dẫn giải

Giả sử  với .

Đặt .

Vì  nên 

Suy ra tập  là một tập con có  phần tử của tập . Gọi  là tập tất cả các tập con có  phần tử của tập hợp .

Khi đó ánh xạ

 

Khi đó  là một song ánh. Thật vậy

●  là đơn ánh: Vì với 

●  là toàn ánh: Giả sử .

Đặt . Ta có  nên và .

 Vì vậy ta có .

1. Cho tập hợp . Một tập con  của  được gọi là tập con “ ngoan ngoãn” nếu với bất kì  (có thể  ) thì .

Tìm tập con “ ngoan ngoãn” lớn nhất và khác .

Tìm tập con “ ngoan ngoãn” bé nhất rằng  và .