# CHUYÊN ĐỀ 35.

**SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC**

# PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

1. **Đường trung trực của tam giác:**

Định nghĩa: Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh được gọi là đường trung trực của tam giác đó.

Định lí 1: Ba đường trung trực của tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó cách đều ba đỉnh của tam giác.

Nhận xét: Vì giao điểm của ba đường trung trực của tam giác cách đều ba đỉnh của tam giác nên là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh tam giác đó.

Tính chất: *ΔABC* cân tại *A* , *AM* là đường trung tuyến thì nó cũng là đường trung trực của *BC*

# Cụ thể:

1. Cho

*ABC* , *d*  là đường trung trực của cạnh *BC* thì *d*  gọi là đường trung trực của

*ABC*

ứng với cạnh *BC* .

*B C*

*A*

*d*

1. Trong hình sau, điểm *O* là giao điểm các đường trung trực của *ABC*. Ta có *OA*  *OB*  *OC*.

Điểm *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp *ABC*.

*A*



*O*

*B C*

1. *ΔABC* cân tại *A* , *AM* là đường trung tuyến thì cũng là đường trung trực của *BC*

*A*

*C M B*

# Đường cao của tam giác:

Định nghĩa: Đoạn thẳng kẻ từ một đỉnh tam giác và vuông góc với cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.

Định lí 2: Ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó được gọi là trực tâm của tam giác.

# Cụ thể:

1. *AH* là một đường cao của *ABC*  *AH*  *BC*

***A***

***B H C***

1. Trong hình vẽ *AD*, *BE*,*CF* là các đường cao, *H* là trực tâm của *ABC* .

***A***

***B D C***

***E***

***F***

***H***

# Chú ý:

1. *ABC* là tam giác nhọn thì *H* nằm trong tam giác.

*A*

*B H C*



*K*

*L*

*H*

1. *ABC* là tam giác vuông tại *A* thì điểm *H* trùng với điểm *A* .

*B*



|  |  |
| --- | --- |
| *I* | |
|  |  |

*A≡H C*

1. *ABC* là tam giác tù thì điểm *H* nằm ngoài tam giác.

*H*

*B I C*



*K*

*L*

*A*

# Bổ sung:

Tính chất trong tam giác cân: *ΔABC* cân tại A, *AM* là đường cao thì nó cũng là đường trung trực, đường trung tuyến, đường phân giác.

*A*

*B M C*



# PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

**BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC**

# Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

1. **Phương pháp giải:**

* Dựa vào định nghĩa và sự đồng quy của ba đường trung trực trong tam giác.
* Sử dụng tính chất giao điểm các đường trung trực trong tam giác thì cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

1. Cho

*ABC* , *d*  là đường trung trực của cạnh *BC* thì *d*  gọi là đường trung trực của

*ABC*

ứng với cạnh *BC* .

*B C*

*A*

*d*

1. Điểm *O* là giao điểm các đường trung trực của *ABC*. Ta có *OA*  *OB*  *OC*. Điểm *O* là tâm

đường tròn ngoại tiếp *ABC*.

*A*



*O*

*B C*

# Bài toán.

**Bài 1.** Chọn đáp án đúng. Điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác là giao điểm của:

1. 3 đường trung tuyến.
2. 3 đường phân giác.
3. 3 đường trung trực.
4. 3 đường cao.

# Lời giải:

**Bài 2.** Chọn đáp án đúng.

1. Cho

*ABC*

tù, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

1. trong *ABC* .
2. ngoài *ABC* .
3. trên 1 cạnh của *ABC* .
4. trùng với 1 đỉnh của *ABC* .
5. Cho

*ABC* có

*A*  90 thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

1. nằm trong
2. nằm ngoài

*ABC*

*ABC*

1. là trung điểm của cạnh *BC*
2. trùng với đỉnh *A* của *ABC*
3. Cho

*ABC*

nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

1. trong
2. ngoài

*ABC*

*ABC*

1. trên một cạnh của *ABC*
2. trùng với một đỉnh của *ABC*

# Lời giải:

**Bài 3.** Cho *ΔABC* . Vẽ điểm *O* cách đều ba đỉnh *A*, *B*, *C* và vẽ đường tròn đi qua 3 đỉnh của tam giác trong mỗi trường hợp sau:

a, *ΔABC* là tam giác nhọn. b, *ΔABC* vuông tại *A* .

c, *ΔABC* là tam giác tù.

# Lời giải:

**Bài 4.** Cho đó.

*A*, *B*, *C* là ba điểm phân biệt không thẳng hàng. Xác định đường tròn đi qua ba điểm

# Lời giải:

**Bài 5.** Cho

*ABC* có

*A*  90 . Các đường trung trực của *AB* và của *AC* cắt nhau ở *O* và cắt

*BC* theo thứ tự ở *D* và *E* . Nối

*AD*, *AE*,*OB*,*OC* . Tìm tam giác bằng

# Lời giải:

*OAD* , bằng

*OAE*.

**Bài 6.** Cho

*ABC*

vuông tại *A* , đường cao *AH* . Tia phân giác của các góc *BAH* và *CAH* cắt

*BC* lần lượt ở *D* và *E* . Gọi *O* là giao điểm các đường phân giác của tam giác *ABC* .

1. Chứng minh rằng đường tròn tâm *O* , bán kính *OA* đi qua ba điểm
2. Tính số đo góc *DOE* .

*A*, *D*, *E* .

# Lời giải:

**Bài 7.** Tam giác *ABC* có *A* là góc tù. Các đường trung trực của các cạnh *AB* và *AC* cắt nhau ở *O*. Các điểm *B* và *C* có thuộc đường tròn tâm *O* bán kính *OA* hay không? Vì sao?

# Lời giải

**Bài 8.** Cho

*ABC*

có ba góc nhọn, *O* là giao điểm hai đường trung trực của *AB* và *AC* . Trên

tia đối của tia *OB* lấy điểm *D* sao cho *OB*  *OD* .

1. Chứng minh *O* thuộc đường trung trực của *AD* và *CD* .
2. Chứng minh các

*ABD* ,

*CBD* vuông.

1. Biết

*ABC*  70 . Hãy tính số đo *ADC* .

# Lời giải

**Bài 9.** Tam giác *ABC* có ba đường trung tuyến cắt nhau tại *O* . Biết rằng điểm *O* cũng là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác *ABC* . Chứng minh tam giác *ABC* đều.

*A*



*F*

*E*

*O*

*B C*

*D*

# Lời giải:

**Bài 10.** Cho

*ABC*

đều. Trên cạnh

*AB*, *BC*,*CA* lấy theo thứ tự ba điểm

*M* , *N*, *P* sao cho

*AM*  *BN*  *CP*

1. Chứng minh

*MNP*

là tam giác đều

1. Gọi *O* là giao điểm các đường trung trực của *ABC* .

Chứng minh rằng điểm *O* cũng là giao điểm các đường trung trực của

# Lời giải:

*MNP*

**Bài 11.** Trong một buổi tổng vệ sinh sân trường, 3 tổ cần dọn cỏ và rác của 3 bồn cây *A*, *B*, *C*

ở 3 góc sân trường. Em hãy giúp 3 tổ chọn một vị trí *O* để đặt chiếc xe đẩy rác sao cho vị trí chiếc xe cách đều 3 bồn cây đó.

# Lời giải:

**Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng**

# Phương pháp giải:

Dựa vào định lí, tính chất về đường trung trực và sự đồng quy của ba đường trung trực trong tam giác.

# Bài toán.

**Bài 1.** Cho

*ABC*

cân tại *A* . Dựng tam giác *BCD* cân tại *D* biết *D* khác phía với *A* đối với

đường đường thẳng *BC* . Gọi O là giao điểm của *AB* và *AC* . Chứng minh rằng hàng.

*A*,*O*, *D* thẳng

# Lời giải:

**Bài 2.** Cho

*ABC*

cân tại *A* . Gọi *M* là trung điểm của *BC* . Các đường trung trực của *AB* và

*AC* cắt nhau ở *E* . Chứng minh ba điểm

*A*, *E*, *M* thẳng hàng.

# Lời giải:

**Bài 3.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . Gọi *G* là trọng tâm, *O* là giao điểm ba đường trung trực của tam giác *ABC* .

1. Tam giác *BOC* là tam giác gì?
2. Chứng minh ba điểm

*A*,*O*,*G* thẳng hàng?

# Lời giải:

**Bài 4.** Cho tam giác *ABC* cân ở *A* . Gọi *M* là trung điểm của *BC* . Các đường trung trực của

*AB*, *AC* cắt nhau ở *E* . Chứng minh ba điểm *A*, *E*, *M* thẳng hàng.

# Lời giải:

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . Lấy điểm *D* sao cho tam giác *BCD* cân tại *D* ( *D* và *A* nằm khác phía đối với đường thẳng *BC* ). Chứng minh các đường trung trực của *AB* và *AC* đồng quy với đường thẳng *AD*

# Lời giải:

**Bài 6.** Cho *ABC* vuông ở *A* , *D* là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh *AB* và *AC* .

Chứng minh

*B*, *D*,*C* thẳng hàng.

# Lời giải:

**Bài 7.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . *M* là trung điểm của *BC* . Kẻ *ME* vuông góc *AB* tại

*E*, *MF* vuông góc với *AC* tại *F* .

1. Chứng minh rằng *AM* là đường trung trực của *EF* ?
2. Kẻ đường thẳng *d* vuông góc *AB* tại *B* , kẻ đường thẳng *d* / vuông góc với *AC* tại *C* , hai

đường thẳng *d* và *d* /

giao nhau giao tại *D* . Chứng minh rằng ba điểm

# Lời giải:

*A*, *M* , *D* thẳng hàng?

**Bài 8.** Cho tam giác nhọn *ABC* . Gọi *H* ,*G*,*O* theo thứ tự là trực tâm, trọng tâm, giao điểm ba

đường trung trực của tam giác. Tia *AG* cắt *BC* ở *M* . Gọi *I* là trung điểm của điểm của *GH* . Chứng minh:

1. *OM*  1 *AH*

2

*GA*, *K* là trung

1. *IGK*  *MGO*
2. Ba điểm *H* ,*G*,*O* thẳng hàng
3. *GH*  2*GO*

# Lời giải:

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* cân ở *A* , đường phân giác *AK* . Các đường trung trực của *AB* và

*AC* cắt nhau tại *O* . Kéo dài *CO* cắt *AB* ở *D* , kéo dài *BO* cắt *AC* ở *E* .

1. Chứng minh ba điểm *A*, *K* ,*O* thẳng hàng.
2. Chúng minh *AK* và các đường trung trực của *AD* và *AE* đồng quy.

# Lời giải:

**Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác**

# Phương pháp giải:

Dựa vào tính chất về đường trung trực và sự đồng quy của ba đường trung trực trong tam giác.

* 1. Điểm M nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó:

*d*

*M*

*A*

*I*

*B*

* 1. *ΔABC* cân tại A, *AM* là đường trung tuyến thì cũng là đường trung trực của *BC*

*A*

*C M B*

# Bài toán.

**Bài 1.** Cho

*ABC*

cân tại *A* , đường trung tuyến *AM* . Đường trung trực của *AC* cắt đường

thẳng *AM* tại *D* . Chứng minh rằng *DA*  *DB* .

# Lời giải:

**Bài 2.** Cho tam giác cân *ABC* có *AB*  *AC* . Hai đường trung trực của hai cạnh nhau tại *O* . Chứng minh: *AOB*  *AOC* .

*AB*; *AC* cắt

# Lời giải:

**Bài 3.** Cho

*ABC* , *M* là trung điểm của

*BC*. Các đường trung trực của *AB* và *AC* cắt nhau

tại *O*. Tính số đo góc *OMB*.

# Lời giải:

**Bài 4.** Cho

*ABC*

có góc

*A*  110. Đường trung trực của các cạnh *AB* và *AC* cắt nhau tại *I*.

1. Chứng minh

*BIC*

cân.

1. Chứng minh

*BIC*  2180 *BAC* và tính số đo góc

# Lời giải:

*BIC*.

**Bài 5.** Cho

*ABC* có

*A*ˆ  60. Các đường trung trực của cạnh *AB* và *AC* lần lượt cắt *BC* ở *E*

và *F* . Tính *EAF* .

# Lời giải:

**Bài 6.** Cho

*ABC*

cân tại *A* . Đường trung tuyến *AM* cắt đường trung trực của *AC* tại *K* .

Chứng minh rằng

*KA*  *KB*  *KC*.

# Lời giải

**Bài 7.** Cho

*ABC*

cân tại *A* ,

*A*  900 . Các đường trung trực của *AB* và của *AC* cắt nhau tại *O*

và cắt *BC* tại *D* và *E* . Chứng minh rằng:

1. *OA* là đường trung trực của *BC* .
2. *BC*  *CE* .
3. *ODE*

là tam giác cân.

# Lời giải:

**Bài 8.** Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

# Lời giải:

**Bài 9.** Cho tam giác đều *ABC* . Gọi *D* và *E* là hai điểm lần lượt trên hai cạnh *AB* và *AC* sao cho *BD*  *AE* . Chứng minh rằng các đường trung trực của đoạn thẳng *DE* luôn đi qua một điểm cố định khi *D* và *E* di chuyển trên các cạnh *AB* và *AC* .

# Lời giải:

**Bài 10.** Cho *ABC* , *AC*  *AB* . Hai điểm *D* và *E* theo thứ tự di chuyển trên các cạnh *AB* và

*AC* sao cho *BD*  *CE* . Chứng minh rằng các đường trung trực của *DE* luôn đi qua một điểm cố định.

# Lời giải:

**BA ĐƯỜNG CAO**

# Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

1. **Phương pháp giải:**

* Để xác định trực tâm của một tam giác, ta cần tìm giao điểm hai đường cao của tam giác đó
* Dựa vào định nghĩa, định lí và nhận xét, tính chất về đường cao và sự đồng quy của ba đường cao trong tam giác.
  1. *AH* là một đường cao của *ABC*  *AH*  *BC*

***A***

***B H C***

* 1. Trong hình vẽ *AD*, *BE*,*CF* là các đường cao, *H* là trực tâm của *ABC* .

***A***

***B D C***

***E***

***F***

***H***

# Chú ý:

1. *ABC* là tam giác nhọn thì *H* nằm trong tam giác.

*A*

*B H C*



*K*

*L*

*H*

1. *ABC* là tam giác vuông tại *A* thì điểm *H* trùng với điểm *A* .

*B*



|  |  |
| --- | --- |
| *I* | |
|  |  |

*A≡H C*

1. *ABC* là tam giác tù thì điểm *H* nằm ngoài tam giác.

*H*

*B I C*



*K*

*L*

*A*

# Bài toán.

**Bài 1.** Cho

*ABC* có

*ABC*  90, *AH*  *BC* . Em chọn phát biểu đúng:

1. *H* là trực tâm của
2. *A* là trực tâm của
3. *B* là trực tâm của
4. *C* là trực tâm của

*ABC*

*ABC*

*ABC*

*ABC*

# Lời giải:

**Bài 2.** Cho *ABC* , hai đường cao *AM* và *BN* cắt nhau tại *H* . Em chọn phát biểu đúng:

1. *H* là trọng tâm của *ABC* .
2. *HA*  2 *AM*

3

và *HB*  2 *BN*

3

1. *H* là trực tâm của

*ABC* ; *CH* là đường cao của

*ABC* .

1. *CH* là đường trung trực của

*ABC* .

# Lời giải:

**Bài 3.** Cho

*ABC*

cân tại *A* có *AM*  *BC*

tại *M* . Chọn phát biểu đúng:

1. *AM* là đường trung tuyến của *ABC*
2. *AM* là đường trung trực của *BC* .
3. *AM* là đường phân giác của *BAC* .
4. Cả A, B, C đều đúng.

# Lời giải:



**Bài 4.** Cho

*D* . Khi đó

*ABC*

vuông tại *A* . Lấy *H* thuộc *AB* , vẽ *HE*  *BC* ở *E* . Tia *EH* cắt tia *CA* tại

1. *H* là trọng tâm của *BCD* .
2. *H* là trực tâm của *BCD* .
3. *H* là giao ba đường trung trực của
4. *H* là giao ba đường phân giác của

*BCD* .

*BCD* .

# Lời giải:



**Bài 5.** Cho tam giác

*AHB*, *AHC* .

*ABC*

vuông tại

*A*, đường cao *AH* . Tìm trực tâm của các giác

*ABC*,

# Lời giải:

**Bài 6.** Cho *H* là trực tâm của tam giác *ABC* không vuông. Tìm trực tâm của các tam giác

*HBC*, *HAB*, *HAC*

# Lời giải

**Bài 7.** Cho

*ABC* có

*A*  700 , *AB*  *AC* , đường phân giác góc *A* cắt *BC* tại *D* , *BF*  *AC*

tại

*F* , *H* là giao điểm của *BF* và *AD* , *E* thuộc *AC* sao cho *AE*  *AB* .

1. Xác định trực tâm của
2. Tính số đo *DHF* .

*ABE* .

# Lời giải

**Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy**

# Phương pháp giải:

Nếu *H* là giao điểm hai đường cao kẻ từ *B* và *C* của tam giác *ABC* thì *AH*  *BC* . Nếu ba đường thẳng là ba đường cao của một tam giác thì chúng cùng đi qua một điểm.

# Bài toán.

**Bài 1.** Cho

*ABC*

cân tại *A* , đường cao *BE* cắt đường trung tuyến *AD* ở *H* . Chứng minh *CH*

tạo với *AB* một góc 90.

# Lời giải

**Bài 2.** Cho tam giác

*ABC*

cân tại *A* . đường cao *CH* cắt tia phân giác của góc *A* tại *D* .

Chứng minh rằng *BD*  *AC* .

# Lời giải

**Bài 3.** Cho

*MNP*

vuông tại *M* . Trên cạnh *MN* lấy điểm *Q* , kẻ *QR*  *NP*  *R* *NP* . Gọi *O* là

giao điểm của các đường thẳng *PM* và *RQ* . Chứng minh *PQ*  *ON* .

# Lời giải:

**Bài 4.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . Lấy điểm *D* sao cho *A* là trung điểm của *BD*. Kẻ đường

cao *AE* của tam giác *ABC* , đường cao *AF* của tam giác *ACD* . Chứng minh rằng *AE*  *AF*.

# Lời giải:

**Bài 5.** Cho tam giác *MNP* có ba góc nhọn, các đường cao

1. Chứng minh *MS*  *NP* .
2. Cho *MNP* = 65°. Tính *SMR* .

*NQ*, *PR* cắt nhau tại *S* .

# Lời giải:

**Bài 6.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* . Lấy điểm *K* thuộc đoạn thẳng

*HC* . Qua *K* kẻ đường thẳng song song với *AB* , cắt *AH* tại *D* . Chứng minh *AK*  *CD* .

# Lời giải:

**Bài 7.** Cho tam giác *ABC* vuông cân tại

*B*. Trên cạnh *AB* lấy điểm

*H*.Trên tia đối của tia *BC*

lấy điểm *D* sao cho *BH*  *BD* . Chứng minh

a) *DH*  *AC*. b) *CH*  *AD*.



**Lời giải:**

**Bài 8.** Cho tam giác *MNP* vuông tại *M* *MP*  *MN*  . Trên cạnh *MN* lấy điểm *Q* sao cho

*MQ*  *MP* , trên tia đối của tia *MP* lấy điểm *R* sao cho *MR*  *MN* . Chứng minh:

1. *PQ*  *NR* .
2. *RQ*  *NP* .

# Lời giải:

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* , kẻ đường phân giác *BM* . Trên cạnh *BC* lấy điểm *D*

sao cho *BD*  *BA* .

1. Chứng minh *BM*  *AD* .
2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của *D* trên *AC*, *K* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *DM* .

Chứng minh ba đường thẳng

*AK*, *BM* , *DH* đồng quy.

# Lời giải:



31

**Bài 10.** Đoạn thẳng *AB* và điểm *M* nằm giữa *A* và *B* (*MA*  *MB*). Vẽ tia đó lấy hai điểm *C* và

*D* sao cho

1. *AE*  *BD*

*MA*  *MC* , *MD*  *MB*. Tia *AC* vuông cắt *BD* tại *E* . Chứng minh:

1. *C* là trực tâm của tam giác *ABD*

# Lời giải:

**Bài 11.** Cho góc nhọn *xOy* . Trên tia *Ox* lấy điểm *A* , trên tia *Oy* lấy điểm *B* sao cho

*OA*  *OB*. Kẻ *AC*  *Oy*, *BD*  *Ox* (*C* *Ox*, *D* *Oy*) . Đường thẳng vuông góc với *Ox* tại *A* và

đường thẳng vuông góc với *Oy* tại *B* cắt nhau tại *M* . Chứng minh: *OM* , *AC*, *BD* đồng quy.

# Lời giải:

**Bài 12.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có *BD* là đường phân giác. Trên cạnh *BC* lấy điểm *E*

sao cho

*BA*  *BE*. Vẽ *CH*  *DB*. Chứng minh rằng

*BA*, *DE*,*CH* đồng quy.

# Lời giải: