SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
VĨNH PHÚC

ĐỀ ĐỀ XUẤT

ĐỀ THI HSG CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
KHU VỰC DH&ĐBBB NĂM 2023
ĐỀ THI MÔN: TOÁN LỚP 11
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề
Đề thi gồm 01 trang

Câu 1 (4,0 điểm)
Cho dãy số (a_n) được xác định như sau: $a_1 = 0, a_{n+1}^3 + 8 = a_n^2,\ n = 1, 2, ...$
Xét hai dãy số (b_n), (c_n) được xác định như sau:

$$b_n = \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2},\ c_n = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + ... + |a_n - a_{n+1}|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (b_n) có giới hạn hữu hạn.
b) Chứng minh rằng dãy số (c_n) có giới hạn hữu hạn.

Câu 2 (4,0 điểm)
Xét các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x^2 - g(y)) = g(x)^2 - y$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.
a) Chứng minh rằng nếu $\{g(x) | x \in \mathbb{R}\}$ không bị chặn thì f và g là một song ánh.
b) Tìm tất cả các hàm f và g thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 3 (4,0 điểm)
Cho tam giác ABC nhọn, không cân, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và K là trung điểm của đoạn thẳng AH. Đường thẳng qua K vuông góc với OK cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F. Các đường thẳng BK và CK cắt lại đường tròn (O) lần lượt tại X và Y.
a) Chứng minh rằng $KE = KF$.
b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KEY và KFX cắt nhau tại điểm $Z\,(Z \neq K)$ thuộc đường tròn (O).

Câu 4 (4,0 điểm)
Xét số nguyên dương $n > 1$, kí hiệu $\sigma(n)$, $d(n)$ lần lượt là tổng tất cả các ước nguyên dương của n, số ước nguyên dương của n.
a) Chứng minh rằng $\sigma(n) \geq n + 1 - (d(n) - 2)\sqrt{n}$.
b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\sigma(n) = d(n)\lceil\sqrt{n}\rceil$, trong đó kí hiệu $\lceil\sqrt{n}\rceil$ là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn $\sqrt{n}$.

Câu 5 (4,0 điểm)
Cho m, n là hai số nguyên dương. Mỗi số nguyên $1, 2, 3, ..., m$ được tô bởi một trong n màu sao cho hai số phân biệt có tổng chia hết cho 4 được tô bằng màu khác nhau.
a) Chứng minh rằng nếu $m = 2006$ thì $n \geq 502$.
b) Giả sử $m = 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của n.

——— **HẾT** ———

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... ; *Số báo danh:* ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC **ĐÁP ÁN ĐỀ XUẤT**	HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HSG CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DH&ĐBBB NĂM 2023 MÔN: TOÁN LỚP 11 HDC gồm 05 trang

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải. Nếu thí sinh có cách giải khác và đúng thì giám khảo cho điểm theo thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Trong một bài, thí sinh giải đúng đến đâu cho điểm đến đó.
- Câu 3 nếu không vẽ hình thì không cho điểm, nếu vẽ hình sai phần nào thì không cho điểm ứng với phần vẽ hình sai đó.
- Điểm toàn bài tính đến 0,5 và không làm tròn.

Câu 1 (4,0 điểm)

Cho dãy số (a_n) được xác định như sau: $a_1 = 0, a_{n+1}^3 + 8 = a_n^2,\ n = 1, 2, ...$
Xét hai dãy số $(b_n)\,,\ (c_n)$ được xác định như sau:

$$b_n = \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2},\ c_n = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + ... + |a_n - a_{n+1}|\,, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (b_n) có giới hạn hữu hạn.
b) Chứng minh rằng dãy số (c_n) có giới hạn hữu hạn.

Nội dung	Điểm
Câu 1a (2,0 điểm). Chứng minh rằng dãy số (b_n) có giới hạn hữu hạn.	2,0
Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n: a_n \in [-2;0]\,, \forall n \in \mathbb{N}^* (1)$. Thật vậy, với $n = 1$ ta được $a_1^3 + 8 = a_0^2 \Leftrightarrow a_1 = -2 \in [-2;0] \Rightarrow n = 1$ đúng. Giả sử (1) đúng với $n = 1, 2, ..., k$, ta chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$ hay chứng minh $a_{k+1} \in [-2;0]$.	0,5
Thật vậy, ta có $a_{k+1} = \sqrt[3]{a_k^2 - 8}$, kết hợp với $a_k \in [-2;0] \Rightarrow 0 \le a_k^2 \le 4 \Rightarrow -2 = \sqrt[3]{-8} \le \sqrt[3]{a_k^2 - 8} \le \sqrt[3]{4-8} = -\sqrt[3]{4} \Rightarrow -2 \le a_{k+1} \le -\sqrt[3]{4} \Rightarrow a_{k+1} \in [-2;0]$ suy ra (1) đúng với $n = k+1 \Rightarrow$ (1) được chứng minh.	0,5
Ta có $b_{n+1} = b_n + \frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} \le b_n \le b_n \Rightarrow (b_n)$ là dãy số giảm, kết hợp với $\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} \ge -2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right) > -2\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + ... + \frac{1}{n(n-1)}\right) > -4 \Rightarrow b_n > -4,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra dãy số (b_n) có giới hạn hữu hạn. $\square$	1,0
Câu 1b (2,0 điểm). Chứng minh rằng dãy số (c_n) có giới hạn hữu hạn.	2,0
Đặt $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8},\ x \in [-2;0] \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-8)^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{9} \cdot \frac{-x^2-24}{\sqrt[3]{(x^2-8)^5}} > 0,\ \forall x \in (-2;0)$	0,5
$\Rightarrow f'(-2) \le f'(x) \le f'(0) \Rightarrow -\frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \le f'(x) \le 0,\ \forall x \in [-2;0]$.	0,5

Ta có $\left\|a_{n+1}-a_n\right\| = \left\|f(a_n)-f(a_{n-1})\right\| = \left\|f'(c)(a_n-a_{n-1})\right\| \le \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\left\|a_n-a_{n-1}\right\|,\ \forall n = 2,3,... \Rightarrow \left\|a_{n+1}-a_n\right\| \le \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\left\|a_n-a_{n-1}\right\| = q\left\|a_n-a_{n-1}\right\| \le q^2\left\|a_{n-1}-a_{n-2}\right\| \le ... \le q^{n-1}\left\|a_2-a_1\right\| \Rightarrow$	0,5
$c_n \le (1+q+q^2+...+q^{n-1})\left\|a_2-a_1\right\| = \frac{1-q^n}{1-q}\left\|a_2-a_1\right\| < \frac{1}{1-q}\left\|a_2-a_1\right\|,\ \forall n = 1,2,...,$ kết hợp với dãy số $c_{n+1} \ge c_n,\ \forall n = 1,2,... \Rightarrow (c_n)$ có giới hạn hữu hạn. □	0,5

Câu 2 (4,0 điểm)

Xét các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ và $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x^2-g(y)) = g(x)^2-y$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.
a) Chứng minh rằng nếu $\{g(x)\|\, x\in\mathbb{R}\}$ không bị chặn thì f và g là một song ánh.
b) Tìm tất cả các hàm f và g thỏa mãn điều kiện bài toán.

Nội dung	**Điểm**
Câu 2a. a) Chứng minh rằng nếu $\{g(x)\|\, x\in\mathbb{R}\}$ không bị chặn thì f và g là một song ánh.	1,0
Kí hiệu $P(x,y)$ là phép thế biến vào phương trình hàm đã cho, ta lần lượt xét các phép thế sau $P(0,y) \Rightarrow f(-g(y)) = g(0)^2 - y,\ \forall y\in\mathbb{R}$, từ đẳng thức này suy ra f, g lần lượt là toàn anh, đơn ánh. Xét phép thế $P(-x,y) \Rightarrow f(x^2-g(y)) = (g(-x))^2 - y = (g(x))^2 - y \Rightarrow g(-x) = -g(x),\ \forall x\ne 0$.	0,5
Giả sử $a,b\in\mathbb{R}$ sao cho $f(a)=f(b)$, chọn y sao cho $g(y)+a>0,\ g(y)+b \Rightarrow \exists x_1>0,\ x_2>0 : x_1^2-g(y)=a,\ x_2^2-g(y)=b$ và xét các phép thế $P(x_1,y),\ P(x_2,y)$ ta được $g(x_1)^2-y = g(x_2)^2-y \Rightarrow g(x_1) = \pm g(x_2)$, kết hợp với g là hàm số lẻ và $x_1,x_2>0 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow a=b \Rightarrow f$ là đơn ánh, kết hợp với f là toàn ánh suy ra f là song ánh. Xét phép thế $P(0,y) \Rightarrow f(-g(y)) = g(0)^2-y,\ \forall y\in\mathbb{R}$. Với mọi $z\in\mathbb{R} \Rightarrow$ tồn tại $y\in\mathbb{R}$ sao cho $f(-z) = g(0)^2-y \Rightarrow f(-g(y)) = f(-z) \Rightarrow g(y)=z \Rightarrow g$ là toàn ánh, kết hợp với g là đơn ánh suy ra g là song ánh. □	0,5
Câu 2b. Tìm tất cả các hàm f và g thỏa mãn điều kiện bài toán.	3,0
Trước hết ta chứng minh $\{g(x)\|\, x\in\mathbb{R}\}$ không bị chặn. Thật vậy, giả $\{g(x)\|\, x\in\mathbb{R}\}$ bị chặn, tức là tồn tại số thực dương M sao cho $\left\|g(x)\right\|\le M,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Với mọi $y_1,y_2\in\mathbb{R}, y_1-y_2>2M^2$, tồn tại các số thực x_1,x_2 sao cho $x_1^2-g(y_1) = x_2^2-g(y_2) \Rightarrow g(x_1)^2-y_1 = g(x_2)^2-y_2 \Rightarrow y_1-y_2 = g(x_1)^2-g(x_2)^2 > 2M^2$ vô lí vì $g(x_1)^2-g(x_2)^2 \le M^2$. Do đó $\{g(x)\|\, x\in\mathbb{R}\}$ không bị chặn.	1,0
Do g là toàn ánh nên tồn tại số thực a sao cho $g(a)=0$, kết hợp với phép thế $P(-a,y)$ cũng suy ra $g(-a)=0 \Rightarrow g(-a)=g(a) \Rightarrow a=0$. Tương tự ta có $f(0)=0$.	0,5

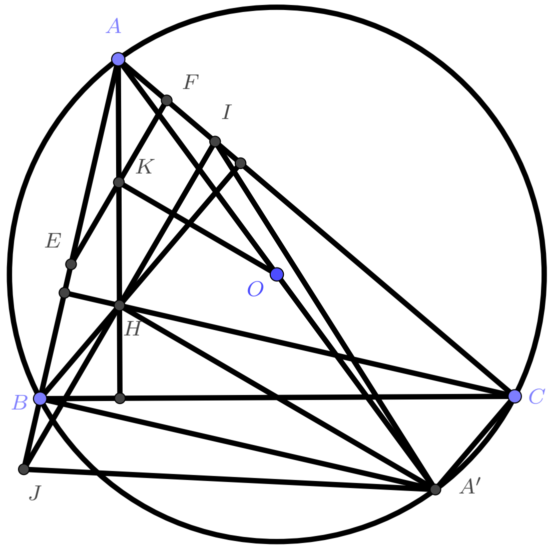
$f(-g(y)) = g(0)^2 - y \Rightarrow f(g(-y)) = -y \Rightarrow f(g(y)) = y,\ \forall y \in \mathbb{R}$. Cho $y = 0$ vào phương trình ban đầu ta được $f(x^2) = g(x)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$ Từ hai đẳng thức trên cùng với phép thế $P(x, f(y))$ ta được $f(x^2 - g(f(y))) = f(x^2) - f(y) \Rightarrow f(x^2 - y) = f(x^2) - f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đẳng thức này suy ra $f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.	1,0
Do $f(x^2) = g(x)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ theo kết quả của phương trình hàm Cauchy ta được $f(x) = kx$, trong đó k là hằng số thực. Cũng từ đẳng thức trên, kết hợp với g là hàm số lẻ và đơn ánh ta được $g(x) = cx$. Thử lại ta được $f(x) = x,\ g(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. □	0,5

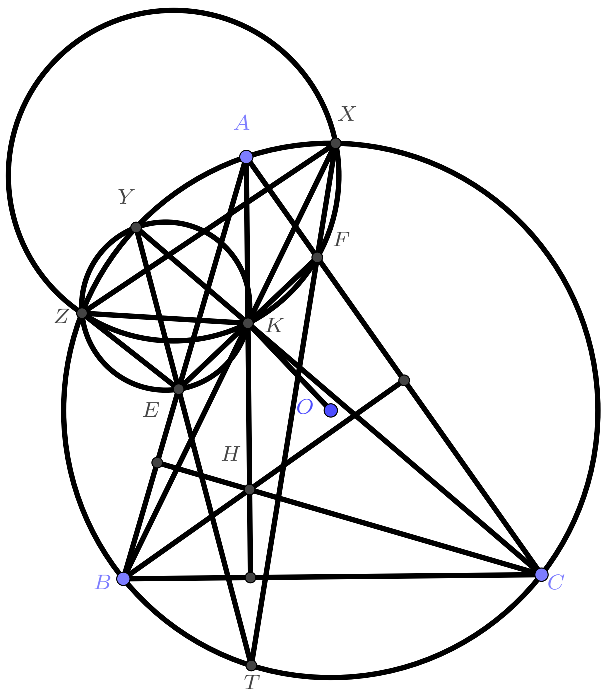
Câu 3 (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và K là trung điểm của đoạn thẳng AH. Đường thẳng qua K vuông góc với OK cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F. Các đường thẳng BK và CK cắt lại đường tròn (O) lần lượt tại X và Y.

a) Chứng minh rằng $KE = KF$.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KEY và KFX cắt nhau tại điểm $Z\,(Z \neq K)$ thuộc đường tròn (O).

Nội dung	**Điểm**
Câu 3a. Chứng minh rằng $KE = KF$. 	1,5

Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O). Khi đó tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{HCA'} = \widehat{HBA'}$.	0,5
Đường thẳng qua H vuông góc với HA' cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại J, I. Từ các tứ giác $HICA', HBJA'$ nội tiếp suy ra $\widehat{HIA'} = \widehat{HCA'}, \widehat{HJA'} = \widehat{HBA'}$	0,5
Từ các đẳng thức trên ta được $\widehat{HIA'} = \widehat{HJA'} \Rightarrow A'IJ$ là tam giác cân tại $A' \Rightarrow H$ là trung điểm của IJ. Theo định lí Talet ta có $\frac{KE}{HJ} = \frac{AK}{AH} = \frac{KF}{HI} \Rightarrow KE = KF$. $\square$	0,5
Câu 3b. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KEY và KFX cắt nhau tại điểm $Z\,(Z \neq K)$ thuộc đường tròn (O).  	2,5
Gọi T là giao điểm thứ hai của XF với đường tròn (O). Áp dụng định lí Pascal đảo cho lục giác $AXCTBY$ ta được Y, E, T thẳng hàng.	1,0
Ta có các tứ giác $ZYKE, ZXFK$ nội tiếp đường tròn suy ra $\widehat{ZYT} = \widehat{ZYE} = \widehat{ZKE} = \widehat{ZXF} = \widehat{ZXT} \Rightarrow$ tứ giác $XYZT$ nội tiếp đường tròn hay Z thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác XYT hay $Z \in (O)$. $\square$	1,5

Câu 4 (4,0 điểm)

Xét số nguyên dương $n > 1$, kí hiệu $\sigma(n)$, $d(n)$ lần lượt là tổng tất cả các ước nguyên dương của n, số ước nguyên dương của n.
a) Chứng minh rằng $\sigma(n) \geq n + 1 - (d(n) - 2)\sqrt{n}$.
b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\sigma(n) = d(n)\lceil\sqrt{n}\rceil$, trong đó kí hiệu $\lceil\sqrt{n}\rceil$ là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn $\sqrt{n}$.

Nội dung	**Điểm**
Câu 4a. Chứng minh rằng $\sigma(n) \geq n + 1 - (d(n) - 2)\sqrt{n}$.	1,5
Ta có $\sigma(n) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k\mid n}\left(k + \frac{n}{k}\right)$	0,5
$= \frac{1}{2}\sum\limits_{k\mid n}\left(k + \frac{n}{k} + 2\sqrt{k\cdot\frac{n}{k}}\right) - \sum\limits_{k\mid n}\sqrt{n} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k\mid n}\left(\sqrt{k} + \sqrt{\frac{n}{k}}\right)^2 - d(n)\sqrt{n}$	0,5
$\geq \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{1} + \sqrt{\frac{n}{1}}\right)^2 + \left(\sqrt{n} + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)^2\right) - d(n)\sqrt{n} = (\sqrt{n} + 1)^2 - d(n)\sqrt{n} = n + 1 - (d(n) - 2)\sqrt{n}$. $\square$	0,5
Câu 4b. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\sigma(n) = d(n)\lceil\sqrt{n}\rceil$, trong đó kí hiệu $\lceil\sqrt{n}\rceil$ là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn $\sqrt{n}$.	2,5
Ta có $\sigma(n) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k\mid n}\left(k + \frac{n}{k}\right) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k\mid n}\left(k + \frac{n}{k} - 2\sqrt{k\cdot\frac{n}{k}}\right) + \sum\limits_{k\mid n}\sqrt{n} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k\mid n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{\frac{n}{k}}\right)^2 + d(n)\sqrt{n}$	1,0
$\geq \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{1} - \sqrt{\frac{n}{1}}\right)^2 + \left(\sqrt{n} - \sqrt{\frac{n}{n}}\right)^2\right) + d(n)\sqrt{n} = (\sqrt{n} - 1)^2 + d(n)\sqrt{n} \Rightarrow d(n)\lceil\sqrt{n}\rceil \geq (\sqrt{n} - 1)^2 + d(n)\sqrt{n} \Rightarrow d(n) > d(n)(\lceil\sqrt{n}\rceil - \sqrt{n}) \geq (\sqrt{n} - 1)^2$.	0,5
Ta có kết quả quen thuộc $d(n) < 2\sqrt{n}$	0,5
Từ các kết quả trên ta được $2\sqrt{n} > (\sqrt{n} - 1)^2 \Leftrightarrow n - 4\sqrt{n} + 1 < 0 \Rightarrow 1 < n < (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow n \in \{2; 3; ...; 13\}$. Thử trực tiếp ta được $n \in \{3; 5; 6\}$.$\square$	0,5

Câu 5 (4,0 điểm)
Cho m, n là hai số nguyên dương. Mỗi số nguyên $1, 2, 3, ..., m$ được tô bởi một trong n màu sao cho hai số phân biệt có tổng chia hết cho 4 được tô bằng màu khác nhau.
a) Chứng minh rằng nếu $m = 2006$ thì $n \geq 502$.
b) Giả sử $m = 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của n.

Nội dung	**Điểm**

Câu 5a. Chứng minh rằng nếu $m = 2006$ thì $n \geq 502$.	2,0
Xét các 502 số chia 4 dư 2 không vượt quá 2006 là $2, 6, 10, ..., 2006$.	1,0
Ta nhận thấy tổng hai số bất kì trong các số trên đều chia hết cho 4 suy ra cần dùng ít nhất 502 màu để tô 502 số này suy ra $n \geq 502$. $\square$	1,0
Câu 5b. Giả sử $m = 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của n.	2,0
Xét 506 số chia 4 dư 2 không vượt quá 2023 là $2, 6, 10, ..., 2022$. Ta nhận thấy hai số bất kì trong các số trên đều có tổng chia hết cho 4 suy ra cần ít nhất 506 màu để tô 506 số này suy ra $n \geq 506$. Giả sử ta có 506 màu khác nhau kí hiệu là màu 1, màu 2, ..., màu 506.	1,0
Ta sẽ thực hiện tô màu các số như sau: Các số $2, 4$ tô màu 1 Các số $6, 8$ tô màu 2 Các số $10, 12$ tô màu 3 ... Các số $2018, 2020$ tô màu 505 Số 2022 tô màu 506 Các số $1, 5, 9, ..., 2021$ tô màu 1 Các số $3, 7, 11, ..., 2019$ tô màu 2 .$\square$	1,0

——————**Hết**——————

TRẦN NGỌC THẮNG, GV THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC, TỈNH VĨNH PHÚC
SĐT: 0986261141
Mail: thangtoancvp@vinhphuc.edu.vn