|  |  |
| --- | --- |
| UBND HUYỆN VĨNH LỘC | **ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9**  **Năm học: 2023-2024**  **Môn: Toán**  Ngày kiểm tra: 11/11/2023  *Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)*  *Đề gồm 01 trang, 5 câu* |

**Câu I**: (*4,0 điểm*).

**1.** Rút gọn biểu thức: M = với 



**2**. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: . Tính giá trị của biểu thức .

**Câu II**: (*4,0 điểm*).

**1**. Giải phương trình: 

**2.** Giải hệ phương trình: 

**Câu III**: (*4,0 điểm*).

**1.** Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: 

**2.** Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho  chia hết cho ab.

**Câu IV**: (*6,0 điểm*).

Cho ba điểm A, B, C cố định sao cho điểm C nằm giữa hai điểm A, B và BC = 2AC. Lần lượt vẽ đường tròn (I) đường kính AC và đường tròn (K) đường kính BC. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài DE của hai đường tròn ( với (). Gọi H là giao điểm của AD và BE.

**1.** Chứng minh HC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

**2.** Gọi F là trung điểm của AB. Tia HF lần lượt cắt các đường thẳng CE, CD tại M và N. Chứng minh tứ giác AMBN là hình bình hành.

**3.** Vẽ đường thẳng d qua K cắt MB, MN lần lượt tại hai điểm G, J. Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác MGJ có diện tích nhỏ nhất.

**Câu V**: (*2,0 điểm*).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện  Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**HẾT**

*Họ và tên thí sinh:…………………………………………SBD……………*

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **NỘI DUNG** | **Điểm** |
| **I**  **4,0 điểm** | **1.** Rút gọn biểu thức:  M = với | **2,0** |
| Với , ta có: | 0.75 |
|  | 0,75 |
| Do đó: M =  Vậy M = (với x 0; x1) | 0,5 |
| **2.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: .  Tính giá trị của biểu thức | **2,0** |
| Từ giả thiết ta có: | 0,5 |
| Nhân theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được: | 0,5 |
| Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:  Phân tích đa thức thành nhân tử được:  . | 0,5 |
| Do đó. Từ (4) và (5) suy ra: | 0,5 |
| **II**  **4,0 điểm** | **1**. **Giải phương trình:**  (1) | **2,0** |
| (1) | 0,5 |
| Nhận thấy phương trình trên có nghiệm là x = 1 | 0,25 |
| Nếu thì  và | 0,5 |
| Nếu  thì  và | 0,25 |
| Nếu x < 0 thì  và | 0,25 |
| Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 1. | 0,25 |
| **2. Giải hệ phương trình** | **2,0** |
| (1) | 0,5 |
| TH1: y = 1. Thay y = 1 vào (2) ta được:  Suy ra:  là ba nghiệm của hệ. (\*) | 0,5 |
| TH2:  Kết hợp với (2) ta có hệ:  Ta có:  Trường hợp: , thay vào (3) ta được: .  ( vô nghiệm) | 0,5 |
| Trường hợp: Thay vào (3) ta được:  . (do x = 0 không thỏa mãn hệ pt).  . Từ đó suy ra: y = 1.  Suy ra:  là một nghiệm của hệ.  Từ (\*) và (\*\*) suy ra hệ đã cho có ba nghiệm: | 0,5 |
| **III**  **4,0 điểm** | **1. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn:** | **2,0** |
| (1)  Lập luận để (\*) | 0,5 |
| (1)  (2)  (vì y nguyên dương) | 0,5 |
| Trường hợp:  ( vì y nguyên dương ) thì (1) có dạng: (vì có(\*))  Khi đó , x nguyên dương nên tìm được x = 6.  là một bộ ba giá trị cần tìm. | 0,5 |
| Trường hợp: (vì y nguyên dương) thì (1) có dạng:  (vì z nguyên dương)  Suy ra (vì x nguyên dương)  là một bộ ba giá trị cần tìm.  Vậy | 0,5 |
| **2. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho chia hết cho ab.** | **2,0** |
| Giả sử có hai số nguyên dương a, b để | 0,5 |
| Đặt thì  Mà  Vì nên. | 0,5 |
| *Trường hợp 1:*  hoặc k = 1.  Với b = 1, thay vào (1) thì  Với k = 1, thay vào (2) thì  *Trường hợp 2:* | 0,5 |
| *Trường hợp 3:*  Vậy | 0,5 |
| **IV**  **4,0 điểm** | Cho ba điểm A, B, C cố định sao cho điểm C nằm giữa hai điểm A, B và  BC = 2AC. Lần lượt vẽ đường tròn (I) đường kính AC và đường tròn (K) đường kính BC. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài DE của hai đường tròn ( với (). Gọi H là giao điểm của AD và BE.  **1.** Chứng minh HC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).  **2.** Gọi F là trung điểm của AB. Tia HF lần lượt cắt các đường thẳng CE, CD tại M và N. Chứng minh tứ giác AMBN là hình bình hành.  **3.** Vẽ đường thẳng d qua K cắt MB, MN lần lượt tại hai điểm G, J. Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác MGJ có diện tích nhỏ nhất. | |
| **1. Chứng minh HC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).** | 2,0 |
| Vì DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K) nên ID, KE cùng vuông góc với DE. Suy ra: | 0,25 |
| Vì ID = IC nên tam giác DIC cân tại I. Suy ra:  Tương tự: . Do đó, Từ (1), (2), (3) suy ra: | 0,25 |
|  | 0,25 |
|  | 0,25 |
| Vì I là trung điểm của AC nên DI là đường trung tuyến của tam giác ADC. Mà DI = IA = IC nên tam giác ADC vuông tại D. .  Tương tự: | 0,25 |
| Từ (4), (5), (6) ta được: . Tứ giác HDCE có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. | 0,25 |
| Gọi O là giao điểm hai đường chéo HC và DE. Từ tính chất của hình chữ nhật ta có: OD = OC. Suy ra:  (vì có OD = OC, ID = IC, IO là cạnh chung) | 0,25 |
| hay  Vậy HC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K). | 0,25 |
| **2. Chứng minh tứ giác AMBN là hình bình hành.** | **2,0** |
| Gọi P là giao điểm của MC và AN. Áp dụng hệ quả của định lí Ta – lét vào các tam giác AND và HND ta có: | 1,0 |
| Mặt khác, vì DC // HB nên  ( Định lí Ta-let trong tam giác AHB)  Do đó, từ (7) và (8) suy ra:  hay AN // BM. | 0,5 |
| Suy ra:  Tứ giác AMBN có AN//BN, AN = BM nên là hình bình hành. | 0,5 |
| **3.**  Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác MGJ có diện tích nhỏ nhất. | **2,0** |
| Ta sẽ chứng minh: Khi K là trung điểm của GJ thì diện tích tam giác MGJ nhỏ nhất.  Để dựng được vị trí của đường thẳng d trong trường hợp này, ta làm như sau: Lấy điểm Q đối xứng với M qua K. Qua Q lần lượt vẽ các đường thẳng song song với MN, MB. Các đường thẳng đó cắt MB, MN theo thứ tự tại G, J. Tứ giác MGQJ là hình bình hành nên K là trung điểm của GJ. | 0,5 |
| Do đường thẳng AB cũng là một vị trí của đường thẳng d nên ta chứng minh  Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Ta có: | 0,5 |
| Gọi P/ là giao điểm của GQ và FB. Khi đó, tứ giác P/GFJ là hình bình hành nên FJ = GP/.  Kết hợp với định lí Ta lét trong tam giác MBF suy ra:    Từ (9) và (10) suy ra: | 0,5 |
| Từ bất đẳng thức Co-si, suy ra:  . Dấu ‘=’ xảy ra . Kết quả này không xảy ra do . Do đó:  Vậy khi K là trung điểm của GJ thì diện tích tam giác MGJ nhỏ nhất. | 0,5 |
| V  2,0 điểm | **Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện  Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức** | **2,0** |
| Áp dụng bất đẳng thức  ta có:  . | 0,5 |
| Đặt  Suy ra: | 0,5 |
| Mặt khác: | 0,5 |
| Dấu ‘=’ xảy ra khi và chỉ khi  Từ (1) và (2) suy ra: . | 0,5 |

**----------- Hết -----------**