Dạng 3. Ứng dụng tích phân để tính diện tích, thể tích của hàm ẩn, hàm hợp

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -6 và 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{2f(x)-8}{g(x)+8}$ và $y=2$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $4\ln 3$. **C.** $3\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=2x^3+(6+a)x^2+(b+2a+12)x+2a+b+c$.

Suy ra: $g'(x)=6x^2+2(6+a)x+b+2a+12$.

Xét phương trình

$$\frac{2f(x)-8}{g(x)+8}=2\Leftrightarrow 2g(x)=2f(x)-24$$

$$\Leftrightarrow 12x^2+2(2a+6)x+4a+2b+24=0\Leftrightarrow 2g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$$

Ta có diện tích bằng

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{2f(x)-8}{g(x)+8}-2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{2f(x)-2g(x)-24}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{2g'(x)}{g(x)+8}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|2\ln|g(x)+8|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$$

$$=2\big|\ln|g(x_2)+8|-\ln|g(x_1)+8|\big|=2|\ln 9|=4\ln 3.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ với a,b,c,d là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)$ có hai giá trị cực trị là -1 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{44-2f'(x)}{g(x)+2}$ và $y=-2$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $4\ln 3$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $3\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)$.

Suy ra: $g'(x)=f''(x)+f'''(x)+24$.

Xét phương trình

$$\frac{44-2f'(x)}{g(x)+2}=-2\Leftrightarrow 2g(x)-2f'(x)+48=0$$

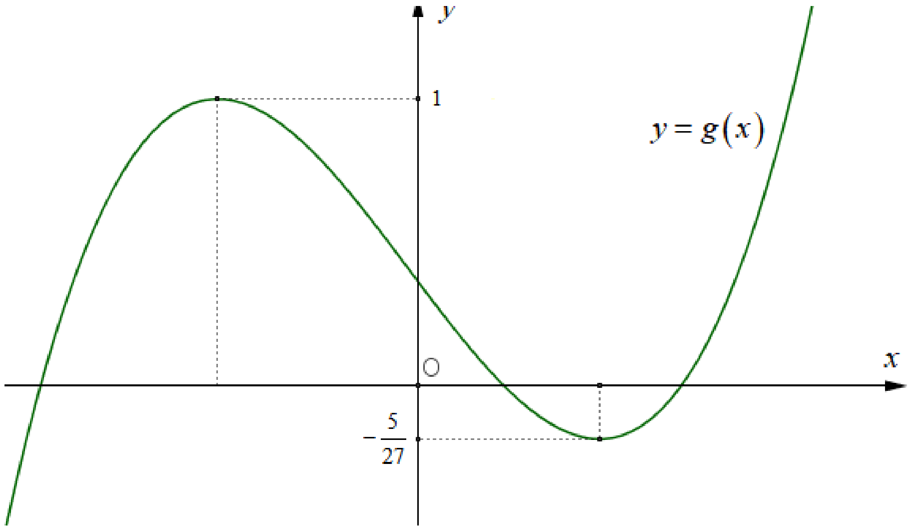
$$\Leftrightarrow 2g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$$

Ta có diện tích bằng

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{44-2f'(x)}{g(x)+2}+2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{2g(x)-2f'(x)+48}{g(x)+2}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{2g'(x)}{g(x)+2}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|2\ln\left|g(x)+2\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$$

$$=2\left|\ln\left|g(x_2)+2\right|-\ln\left|g(x_1)+2\right|\right|=2\left|\ln 8\right|=6\ln 2.$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=x^3+f(x)+f'(x)+f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)+x^3-3x^2+1}{g(x)+1}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $\ln\dfrac{22}{5}$. **C.** $\ln\dfrac{44}{27}$. **D.** $\ln\dfrac{27}{11}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)=x^3+f(x)+f'(x)+f''(x)$.

Suy ra: $g'(x)=3x^2+f'(x)+f''(x)=3x^2+\left(g(x)-f(x)-x^3\right)=g(x)-f(x)-x^3+3x^2$.

Xét phương trình

$$\frac{f(x)+x^3-3x^2+1}{g(x)+1}=1 \Leftrightarrow g(x)=f(x)+x^3-3x^2$$

$$\Leftrightarrow g(x)-f(x)-x^3+3x^2=0 \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$$

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)+x^3-3x^2+1}{g(x)+1}$ và $y=1$ là

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{f(x)+x^3-3x^2+1}{g(x)+1}-1\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)+x^3-3x^2}{g(x)+1}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-g'(x)}{g(x)+1}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\ln|g(x)+1|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln|g(x_2)+1|-\ln|g(x_1)+1|\right|$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta có $g(x_1)=1$ và $g(x_2)=-\dfrac{5}{27}$.

Do đó ta có: $S=\left|\ln|1+1|-\ln\left|-\dfrac{5}{27}+1\right|\right|=\ln\dfrac{27}{11}$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2021 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $\ln 10$. **D.** $\ln 7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'''(x)=6$.

Khi đó $g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Giả sử $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$ là hai điểm cực trị của hàm số $g(x)$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ và -5 và 2 là hai giá trị cực trị của hàm số $g(x)$ nên $\begin{cases}g(x_1)=2\\ g(x_2)=-5\end{cases}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là:

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow g(x)+6=f(x)\Leftrightarrow f(x)+f'(x)+f''(x)+6=f(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\ x=x_2\end{array}\right..$$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)+f''(x)+6}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln\left|g(x_2)+6\right|-\ln\left|g(x_1)+6\right|\right|=\ln 8=3\ln 2.$$

Câu 5. **(Mã 102 - 2021 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\ln 6$. **C.** $3\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$; $f''(x)=6x+2a$ và $f'''(x)=6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là:

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow f(x)=g(x)+6$$

$$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=\left(x^3+ax^2+bx+c\right)+\left(3x^2+2ax+b\right)+\left(6x+2a\right)+6$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+(2a+6)x+2a+b+6=0(*).$$

Gọi 2 nghiệm của phương trình $(*)$ là x_1 và x_2.

Nhận xét: $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$

$$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=\left(3x^2+2ax+b\right)+\left(6x+2a\right)+6=3x^2+(2a+6)x+2a+b+6.$$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$$

$$=\left|\ln\left|g(x_2)+6\right|-\ln\left|g(x_1)+6\right|\right|=\ln 8-\ln 2=2\ln 2.$$

Câu 6. **(Mã 101-2021-Lần 1)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(3+a)x^2+(b+2a+6)x+2a+b+c$.

Suy ra: $g'(x)=3x^2+2(3+a)x+b+2a+6$.

Xét phương trình

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow g(x)=f(x)-6\Leftrightarrow 3x^2+2(a+3)x+2a+b+6=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$$

Ta có diện tích bằng

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=$$

$$\left|\ln\left|g(x_2)+6\right|-\ln\left|g(x_1)+6\right|\right|=\left|\ln 4\right|=2\ln 2.$$

Câu 7. **(Mã 103 - 2021 - Lần 1)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 2$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(3+a)x^2+(b+2a+6)x+2a+b+c$.

Suy ra: $g'(x)=3x^2+2(3+a)x+b+2a+6$.

Xét phương trình

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow g(x)=f(x)-6\Leftrightarrow 3x^2+2(a+3)x+2a+b+6=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$$

Ta có diện tích bằng

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\ln|g(x)+6|\right|\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

$$=\left|\ln|g(x_2)+6|-\ln|g(x_1)+6|\right|=|\ln 9|=2\ln 3$$

Câu 8. **(Mã 101-2021-Lần 2)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có 3 điểm cực trị là – 1, 2, 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{71}{6}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{71}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f(x)-g(x)=ax^4+(b-m)x^3+(c-n)x^2+3x$

$\Rightarrow h'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+3\ (1)$.

Vì hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị là – 1, 2, 3 nên phương trình $h'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là – 1, 2, 3.

Suy ra $h'(x)$ có dạng $h'(x)=A(x+1)(x-2)(x-3)\ (2)$.

Từ (1) ta có $x=0\Rightarrow h'(0)=3$.

Thế vào $(2)\Rightarrow h'(0)=A(1)(-2)(-3)=3\Rightarrow A=\frac{1}{2}\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f'(x)$ và $g'(x)$ là

$$S=\int_{-1}^{3}|f'(x)-g'(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}|h'(x)|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}|(x+1)(x-2)(x-3)|\mathrm{d}x=\frac{71}{12}.$$

Câu 9. **(Mã 120-2021-Lần 2)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$, với a, b, c, m, $n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{64}{9}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Lời giải

Chọn B

$f(x)-g(x)=ax^4+(b-m)x^3+(c-m)x^2+4x$

$\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-m)x+4$

Theo giả thiết $f'(x)-g'(x)=4a(x+1)(x-2)(x-3)$

Ta có: $4=4a.1.(-2).(-3)\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$$

$$S=\int_{-1}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{9}.$$

Câu 10. **(Mã 111-2021-Lần 2)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{71}{6}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{32}{3}$. **D.** $\dfrac{71}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Vì hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3 nên phương trình $y'=f'(x)-g'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt -1, 2 và 3.

Ta có $y=f(x)-g(x)=ax^4+(b-m)x^3+(c-n)x^2+3x.$

Suy ra $y'=f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+3=k(x+1)(x-2)(x-3).$

Mà $y'(0)=f'(0)-g'(0)=3$ nên suy ra $k(0+1)(0-2)(0-3)=3\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2}.$

Khi đó $f'(x)-g'(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3).$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là

$$S=\int_{-1}^{3}\left|f'(x)-g'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}\left|\frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{12}.$$

Câu 11. **(Mã 102-2021-Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g(x)=mx^3+mx^2-x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1;2;3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{71}{9}$. **C.** $\dfrac{71}{6}$. **D.** $\dfrac{64}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+3; g'(x)=3mx^2+2nx-1$

Khi đó: $f'(x)-g'(x)=4ax^3+(3b-3m)x^2+(2c-2n)x+4$

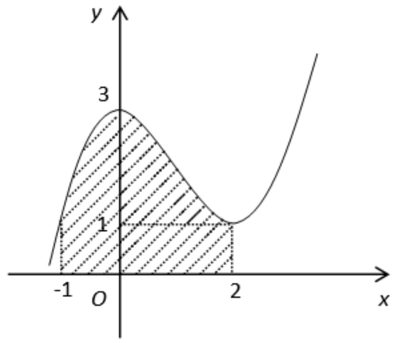
Do hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1;2;3$ nên ta suy ra $a\neq 0$ và $f'(x)-g'(x)=4a(x+1)(x-2)(x-3)$

Ta có: $f'(0)-g'(0)=24a=4\Rightarrow a=\frac{1}{6}$. Suy ra $f'(x)-g'(x)=\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

$$S=\int_{-1}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx=\frac{71}{9}.$$

Câu 12. (THPT Trần Quốc Tuấn - 2018) Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



A. $S=\frac{51}{8}$. **B.** $S=\frac{52}{8}$. **C.** $S=\frac{50}{8}$. **D.** $S=\frac{53}{8}$.

Lời giải

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=-1$, $x=2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

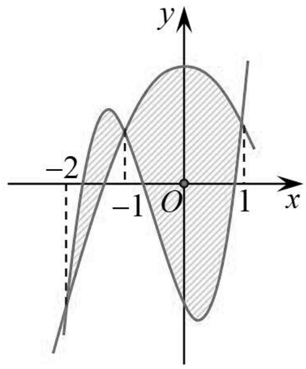
- Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và $3\Rightarrow S_1=3$.
- Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+c \\ y=1 \\ x=-1; x=2 \end{cases}$.

Dễ thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3$.

$$\Rightarrow S_2=\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3-1\right)dx=\frac{27}{8}.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S = S_1 + S_2 = \frac{51}{8}$.

Câu 13. **(Mã 102 2018)** Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ (a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{37}{6}$ **C.** $\frac{13}{2}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow a^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0.$ $(*)$

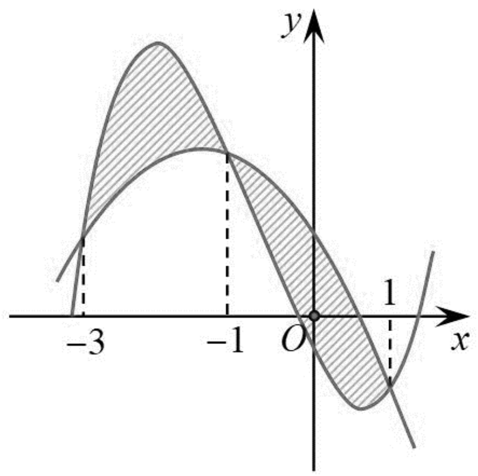
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$. Ta được

$ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = k(x+2)(x+1)(x-1)$.

Khi đó $-4 = -2k \Rightarrow k = 2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^{1} \left|2(x+2)(x+1)(x-1)\right| dx = \frac{37}{6}$.

Câu 14. **(Mã 101 2018)** Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5 **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1$ Û $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ có 3 nghiệm lần lượt là -3; -1; 1 nên suy ra $\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ -a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b-d=\frac{3}{2}\\ a=\frac{1}{2}\\ c-e=\frac{-1}{2}\end{cases}$

Vậy $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$$S=\int_{-3}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$\Leftrightarrow S=\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=2+2=4.$$

Cách 2:

Ta có: $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\frac{3}{2}$

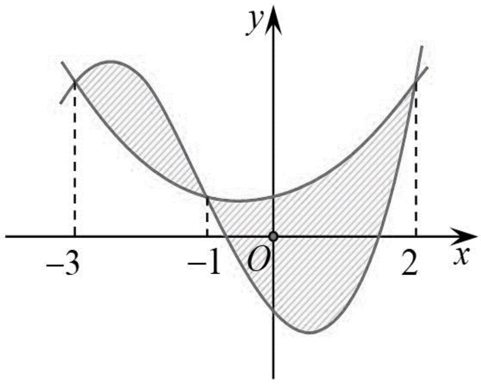
Xét hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Do đó: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng: $S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x=4$.

Câu 15. **(Mã 103 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$ **B.** $\frac{125}{12}$ **C.** $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

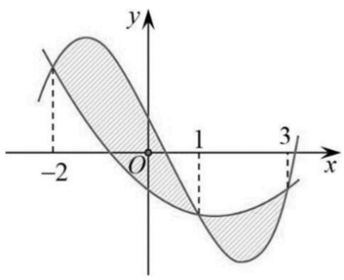
Lời giải

Chọn C

Vì phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm $-3;-1;2$ nên $f(x)-g(x)=a(x+3)(x-2)(x+1)$.

So sánh hệ số tự do ta được $-6a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$. Do đó $S=\int_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}$.

Câu 16. **(Mã 104 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$ **B.** $\frac{125}{24}$ **C.** $\frac{125}{48}$ **D.** $\frac{253}{24}$

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$ax^3+bx^2+cx+\dfrac{3}{4}=dx^2+ex-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\dfrac{3}{2}=0$.

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\dfrac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\dfrac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x=-2$; $x=1;x=3$.

Với $x=-2$ ta có $-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\dfrac{3}{2}$, (1).

Với $x=1$ ta có $a+(b-d)+(c-e)=-\dfrac{3}{2}$, (2).

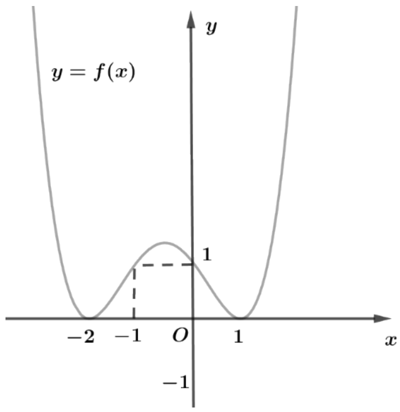
Với $x=3$ ta có $27a+9(b-d)+3(c-e)=-\dfrac{3}{2}$, (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\dfrac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\dfrac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b-d=-\dfrac{1}{2}\\ c-e=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$.

Hay ta có

$$S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}.$$

Câu 17. **(Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x); y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{127}{40}$. **B.** $\dfrac{127}{10}$. **C.** $\dfrac{107}{5}$. **D.** $\dfrac{13}{5}$.

Lời giải

Hàm số đã cho có dạng $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Từ giả thiết đồ thị hàm số đã cho ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;0)$, $(-1;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$ và có hai điểm cực tiểu là $(1;0)$, $(-2;0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(-2) &= 0 \\ f(1) &= 0 \\ f'(-2) &= 0 \\ f'(1) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e &= 1 \\ a+b+c+d &= -1 \\ 16a-8b+4c-2d &= -1 \\ -32a+12b-4c+d &= 0 \\ 4a+3b+2c+d &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e &= 1 \\ a &= \dfrac{1}{4} \\ b &= \dfrac{1}{2} \\ c &= \dfrac{-3}{4} \\ d &= -1 \end{cases}.$$

Do đó $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1.$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)$.

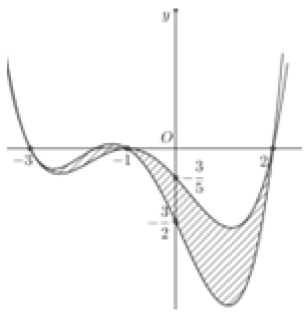
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x &= -2 \\ x &= -1 \\ x &= 1 \\ x &= 4 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x); y=f'(x)$ là $S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|dx$

Vì biểu thức $f(x)-f'(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;4)$ nên ta có

$$S=\left|\int_{-2}^{-1}[f(x)-f'(x)]dx\right|+\left|\int_{-1}^{1}[f(x)-f'(x)]dx\right|+\left|\int_{1}^{4}[f(x)-f'(x)]dx\right|=\frac{107}{5}(dvdt).$$

Câu 18. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;-1;2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?



A. $3{,}11$ **B.** $2{,}45$ **C.** $3{,}21$ **D.** $2{,}95$

Lời giải

Chọn A

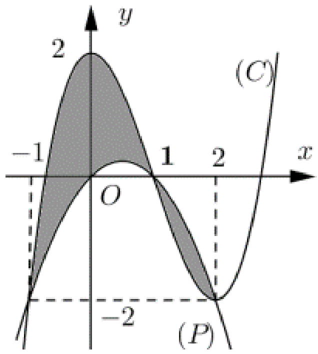
$f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-2)=(ax+3a)(x^2-x-2)=ax^3-ax^2-2ax+3ax^2-3ax-6a$

$=ax^3+2ax^2-5ax-6a$

$f(0)-g(0)=-6a$, quan sát hình vẽ ta có $f(0)-g(0)=-\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{9}{10}$

Nên $-6a=\frac{9}{10}\Rightarrow a=\frac{-3}{20}$ $S=\int_{-3}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-3}^{2}\left|\frac{-3}{20}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{80}=3.1625$

Câu 19. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$.   B. $\frac{7}{12}$.   C. $\frac{11}{12}$.   D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Cách 1:

Gọi hàm số bậc ba là $y=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị (C) đi qua các điểm $(1;0),(2;-2)$ và đạt cực trị tại $x=0;x=2$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases}0=a+b+c+d\\-2=8a+4b+2c+d\\0=c\\0=12a+4b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=0\\d=2\end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc ba là $y=x^3-3x^2+2$.

Gọi hàm bậc hai là $y=mx^2+nx+p$. Đồ thị (P) đi qua các điểm $(1;0)$, $(2;-2)$, $(-1;-2)$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases}0=m+n+p\\-2=4m+2n+p\\-2=m-n+p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\n=1\\p=0\end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc hai là $y=-x^2+x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là :

$$x^3-3x^2+2=-x^2+x\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Vậy diện tích phần tô đậm là : $S = \int_{-1}^{2} \left|\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)\right| dx$.

$$S = \left|\int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) dx\right| + \left|\int_{1}^{2} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) dx\right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$

<u>Cách</u> <u>2</u>:

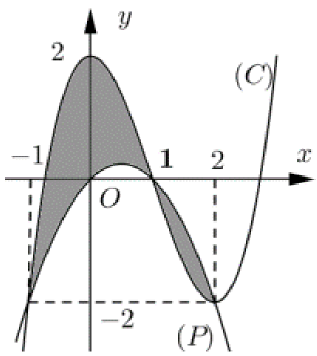
Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2, y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $y = mx^2 + nx$.

* Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1; x = 1; x = 2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2) = 0$. Với $x = 0$ ta được $2a = 2 \rightarrow a = 1$.

*Vậy diện tích phần tô đậm là: $S = \int_{-1}^{2} \left|(x+1)(x-1)(x-2)\right| dx = \frac{37}{12}$.

Câu 20. Hình phẳng (*H*) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba và parabol (*P*) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** như hình vẽ có diện tích bằng



<u>A</u>. $\frac{37}{12}$.   **B.** $\frac{7}{12}$.   **C.** $\frac{11}{12}$.   **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải

<u>Chọn</u> <u>A</u>

+) Gọi $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d \, (a \neq 0)$

Do (C) cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 2 nên $d = 2$

(C) đi qua 3 điểm $A(-1;-2)$, $B(1;0)$ và $C(2;-2)$ nên ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -a + b - c = -4 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{cases}. \text{ Do đó } (C): y = x^3 - 3x^2 + 2$$

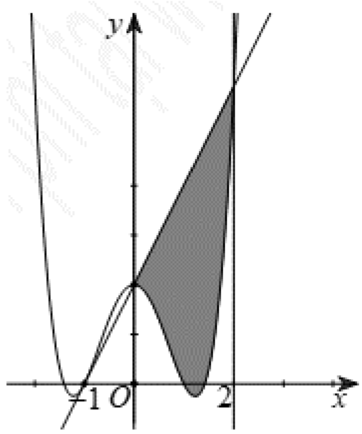
+) Gọi $(P): y = mx^2 + nx + r \, (m \neq 0)$

Do (P) đi qua 3 điểm $a(-1;-2)$, $O(0;0)$ và $C(2;-2)$ nên ta được $\begin{cases} m-n+r=-2 \\ r=0 \\ 4m+2n+r=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ r=0 \\ n=1 \end{cases}$

. Do đó $(P): y=-x^2+x$

Vậy $S_{(H)}=\int_{-1}^{2}\left|x^3-2x^2-x+2\right|dx \overset{MTCT}{=} \dfrac{37}{12}$

Câu 21. **(Chuyên KHTN - 2018)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\dfrac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $y'=4ax^3+2bx \Rightarrow d: y=(-4a-2b)(x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $(-4a-2b)(x+1)=ax^4+bx^2+c\,(1)$.

Phương trình (1) phải cho 2 nghiệm là $x=0$, $x=2$.

$\Rightarrow \begin{cases} -4a-2b=c \\ -12a-6b=16a+4b+c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a-2b-c=0\,(2) \\ 28a+10b+c=0\,(3) \end{cases}$.

Mặt khác, diện tích phần tô màu là $\dfrac{28}{5}=\int\limits_0^2\left[(-4a-2b)(x+1)-ax^4-bx^2-c\right]\mathrm{d}x$

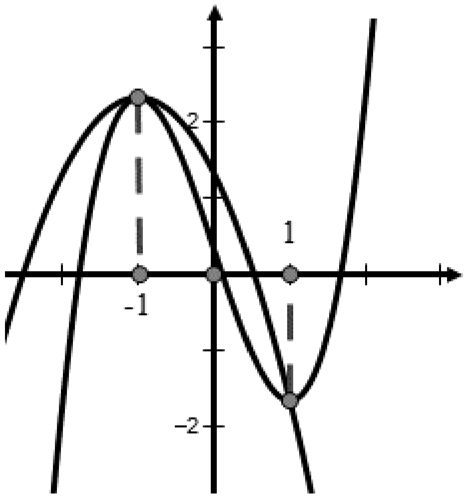
$\Leftrightarrow \dfrac{28}{5}=4(-4a-2b)-\dfrac{32}{5}a-\dfrac{8}{3}b-2c \Leftrightarrow \dfrac{112}{5}a+\dfrac{32}{3}b+2c=-\dfrac{28}{5}\,(4)$.

Giải hệ 3 phương trình (2), (3) và (4) ta được $a=1$, $b=-3$, $c=2$.

Khi đó, $(C): y=x^4-3x^2+2$, $d: y=2(x+1)$.

Diện tích cần tìm là $S=\int\limits_{-1}^{0}\left[x^4-3x^2+2-2(x+1)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^4-3x^2-2x\right)dx=\dfrac{1}{5}$.

Câu 22. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p\ (m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Căn cứ đồ thị ta thấy

+ Hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại $x=\pm1$ nên ta có

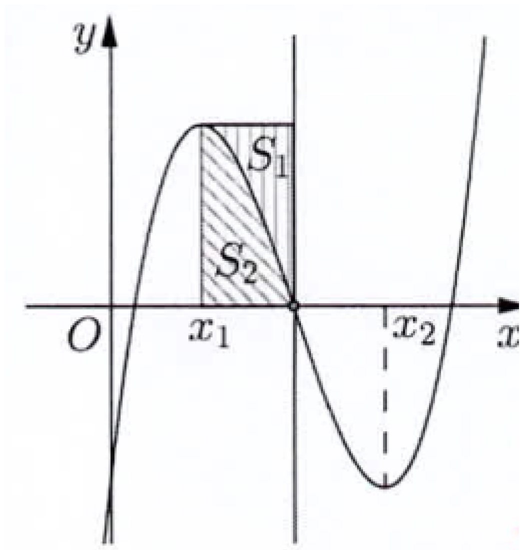
$$\begin{cases}y'(1)=0\\ y'(-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b+3=0\\ -2a+b+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-3\end{cases}.$$

+ Hàm số $y=mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại $x=-1$ và (P) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ $x=\pm1$ nên ta có

$$\begin{cases}-2m+n=0\\ 1+a+b+c=m+n+p\\ -1+a-b+c=m-n+p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-2\\ m=-1\\ p-c=1\end{cases}$$

Suy ra $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(mx^2+nx+p-x^3-ax^2-bx-x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3-x^2+x+1\right)dx=\dfrac{4}{3}\in(1;2)$

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2021)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$.　　**B.** $\frac{5}{8}$.　　**C.** $\frac{3}{8}$.　　**D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a>0 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo giả thiết ta có $f'(x_1)=f'(x_2)=0 \Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$.

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

Ta có $f(x_1)+f(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)+f(x_1+2)=0 \Rightarrow C+8a-12a+C=0 \Rightarrow C=2a$.

Do đó $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a=a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]$.

$$f(x)=0 \Rightarrow a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1+1-\sqrt{3} \\ x=x_1+1 \\ x=x_1+1+\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Suy ra $S_2=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}x$

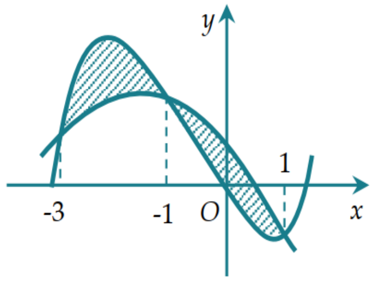
$$=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}(x-x_1)$$

$$=a\left[\frac{(x-x_1)^4}{4}-(x-x_1)^3+2(x-x_1)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_1+1}=\frac{5a}{4}.$$

Mặt khác ta có $S_1+S_2=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x_1)\mathrm{d}x = f(x_1)\int\limits_{x_1}^{x_1+1}\mathrm{d}x = f(x_1)=2a \Rightarrow S_1=2a-S_2=\frac{3a}{4}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$.

Câu 24. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

- Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$$ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1 \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0.(*)$$

- Do đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 nên phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x=-3$; $x=-1$; $x=1$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ -a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b-d=\frac{3}{2}\\ a=\frac{1}{2}\\ c-e=\frac{-1}{2}\end{cases}.$$

Suy ra $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

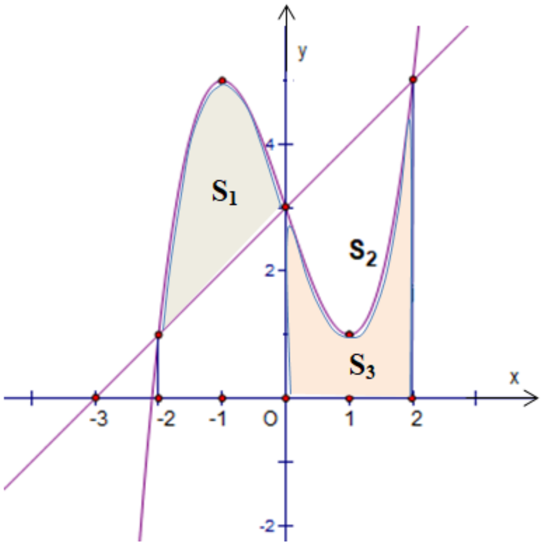
- Vậy hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho có diện tích là:

$$S=\int\limits_{-3}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$= 2 + 2 = 4$.

Câu 25. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các phần giới hạn như hình bên. Nếu $S_1 = 4$ thì tỷ số $\frac{S_2}{S_3}$ bằng.



A. $\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn B

• Dựa vào đồ thị như hình vẽ, ta có: $f(x) - g(x) = k.x(x+2)(x-2)$.

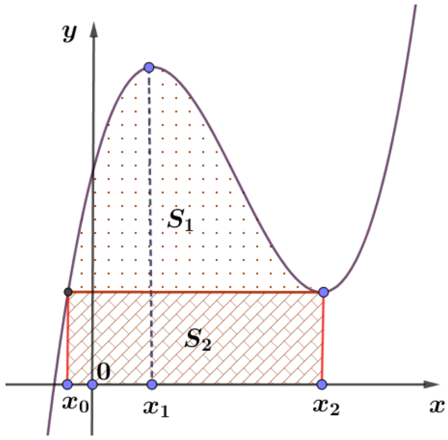
$g(x) = x + 3$

$S_1 = S_2 = \int_{-2}^{0} kx(x+2)(x-2)\,dx = 4k$

$S_2 + S_3 = \frac{(|g(0)| + |g(2)|).2}{2} = \frac{(3+5).2}{2} = 8$

Vì $S_1 = 4 \Rightarrow S_2 = 4 \Rightarrow S_3 = 8 - 4 = 4$. Vậy $\frac{S_2}{S_3} = 1$.

Câu 26. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{27}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

+) Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a>0 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

+) Theo giả thiết ta có $f'(x_1)=f'(x_2)=0 \Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

+) Ta có $f(x_1)-3f(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)-3f(x_1+2)=0$

$\Leftrightarrow C-3(8a-12a+C)=0 \Leftrightarrow -2C+12a=0 \Leftrightarrow C=6a$.

Do đó $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+6a$.

+) S_2 là diện tích hình chữ nhật có cạnh bằng 3 và và $f(x_2)=8a-12a+6a=2a$

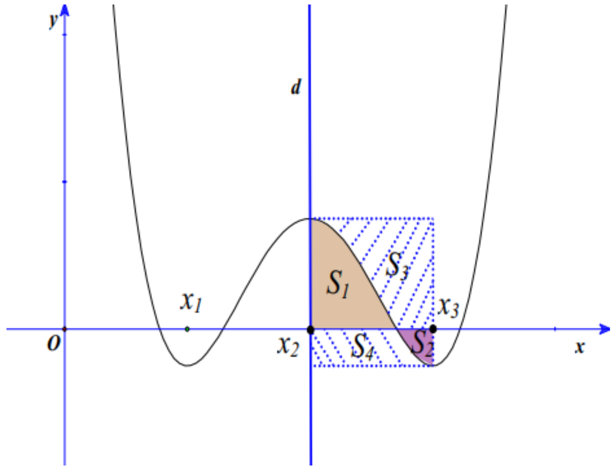
+) S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=x_0=x_1-1, x=x_2=x_1+2$, $y=f(x_2)=2a$ và $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+6a$ nên suy ra

$$S_1=\int_{x_1-1}^{x_1+2}\left[f(x)-2a\right]\mathrm{d}x=\int_{x_1-1}^{x_1+2}\left[a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+4a\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{a(x-x_1)^4}{4}-3a\frac{(x-x_1)^3}{3}+4ax\right]\Bigg|_{x_1-1}^{x_1+2}=\frac{27a}{4}.$$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{27}{8}$.

Câu 27. **(Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi - 2021)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3=x_1+2$, $f(x_1)+f(x_3)+\frac{2}{3}f(x_2)=0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x=x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên.



Tỉ số $\dfrac{S_3+S_4}{S_1+S_2}$ gần kết quả nào nhất?

A. 1.62. **B.** 1.64. **C.** 1.68. **D.** 1.66.

Lời giải

Chọn D

◆ Kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị hàm số sang bên trái sao cho đường thẳng $d: x = x_2$ trùng với trục tung, khi đó đồ thị (C) là đồ thị của hàm số trùng phương $y = g(x)$ có ba điểm cực trị $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Suy ra $y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + c$ với $k > 0$.

Mặt khác $f(x_1) + f(x_3) + \dfrac{2}{3} f(x_2) = 0 \Rightarrow -2k + 2c + \dfrac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow c = \dfrac{3}{4}k$.

Suy ra $y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + \dfrac{3}{4}k$.

Khi đó $S_1 + S_2 = k\int_0^1 \left|x^4 - 2x^2 + \dfrac{3}{4}\right| \mathrm{d}x = \dfrac{28\sqrt{2}-17}{60}k$.

Ta lại có $g(0) - g(1) = k \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = k.1 = k$.

Suy ra $S_3 + S_4 = k - \dfrac{28\sqrt{2}-17}{60}k = \dfrac{77-28\sqrt{2}}{60}k \Rightarrow \dfrac{S_3+S_4}{S_1+S_2} = \dfrac{77-28\sqrt{2}}{28\sqrt{2}-17} \approx 1.66$

Câu 28. **(Chuyên Thái Bình - 2021)** Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2,\ g(x) = dx^2 + ex + 2\ (a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-2;-1;1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị.

A. $\dfrac{37}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{37}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2,\ g(x) = dx^2 + ex + 2\ (a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow f(x) - g(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4$ (1)

Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là

$-2;-1;1 \Rightarrow f(x) - g(x) = a(x+2)(x+1)(x-1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $-2a=-4 \Rightarrow a=2$.

Do đó $f(x)-g(x)=2(x+2)(x+1)(x-1)$

Vậy $S=\int\limits_{-2}^{1}\left|2(x+2)(x+1)(x-1)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{37}{6}$.

Câu 29. **(Đề minh họa 2022)** Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là -2, -1 và 1. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng

A. $\dfrac{500}{81}$. **B.** $\dfrac{36}{5}$. **C.** $\dfrac{2932}{405}$. **D.** $\dfrac{2948}{405}$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề ta có $f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Suy ra $f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c=12(x+2)(x+1)(x-1)=12x^3+24x^2-12x-24$.

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} 3a=24 \\ 2b=-12 \\ c=-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-6 \\ c=-24 \end{cases}$.

Suy ra $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2+24x+d$.

Theo đề, ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là $(-2;8+d)$, $(-1;13+d)$, $(1;-19+d)$.

Gọi (P) là Parabol đi qua ba điểm $(-2;8)$, $(-1;13)$, $(1;-19)$. Khi đó $(P): y=-7x^2-16x+4$.

Suy ra $g(x)=-7x^2-16x+4+d$.

Xét phương trình $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow 3x^4+8x^3+x^2-8x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=-\dfrac{2}{3} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$$S=\int\limits_{-2}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}\left|3x^4+8x^3+x^2-8x-4\right|\mathrm{d}x=\dfrac{2948}{405}.$$

Câu 30. **(Mã 101-2022)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\ln\dfrac{43}{8}$	↗	$\ln 6$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;6)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=e^{g(x)}$.

Từ bảng biến thiên suy ra: $g(x)\ge \ln 2 \Rightarrow e^{g(x)}\ge e^{\ln 2}=2$.

+) $f'(x)=g'(x)e^{g(x)}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $g'(x)$:

$$f'(x)-g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)e^{g(x)}-g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)\left(e^{g(x)}-1\right)=0 \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right..$$

Mặt khác từ bảng biến thiên ta cũng có: $g'(x)>0,\ \forall x\in(x_1;x_2)$; $g'(x)<0,\ \forall x\in(x_2;x_3)$.

Suy ra:

$$S=\int_{x_1}^{x_3}\left|f'(x)-g'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_3}\left|g'(x)e^{g(x)}-g'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_3}\left|g'(x)\left(e^{g(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}g'(x)\left(e^{g(x)}-1\right)\mathrm{d}x-\int_{x_2}^{x_3}g'(x)\left(e^{g(x)}-1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{g(x)}-1\right)\mathrm{d}\left(g(x)\right)-\int_{x_2}^{x_3}\left(e^{g(x)}-1\right)\mathrm{d}\left(g(x)\right)$$

$$=\left(e^{g(x)}-g(x)\right)\Big|_{x_1}^{x_2}-\left(e^{g(x)}-g(x)\right)\Big|_{x_2}^{x_3}$$

$$=\left[e^{g(x_2)}-g(x_2)-e^{g(x_1)}+g(x_1)\right]-\left[e^{g(x_3)}-g(x_3)-e^{g(x_2)}+g(x_2)\right]$$

$$=2e^{g(x_2)}-e^{g(x_1)}-e^{g(x_3)}-2g(x_2)+g(x_1)+g(x_3)$$

$$=2.6-\frac{43}{8}-2-2\ln 6+\ln\frac{43}{8}+\ln 2=\frac{37}{8}+\ln\frac{43}{144}\approx 3{,}416.$$

Câu 31. **(Mã 102 - 2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 10$	$\nearrow$	$\ln 42$	$\searrow$	$\ln 37$	$\nearrow$	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(38;39)$. **B.** $(25;26)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(35;36)$.

Lời giải

Chọn D

+ Ta có: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

+ Từ bảng biến thiên ta thấy $g(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ suy ra $f(x)=e^{g(x)}>1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

+ Phương trình $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow g'(x).f(x)=g'(x)\Leftrightarrow g'(x).\left[f(x)-1\right]=0\Leftrightarrow g'(x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\\x=x_3\end{array}\right..$$

+ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là

$$S=\int_{x_1}^{x_3}\left|f'(x)-g'(x)\right|dx=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[f'(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}\left[f'(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx\right|$$

$$\overset{t=f(x)}{=}\left|\int_{10}^{42}\left(1-\frac{1}{t}\right)dt\right|+\left|\int_{42}^{37}\left(1-\frac{1}{t}\right)dt\right|\approx 35,438\in(35;36).$$

Câu 32. **(Mã 103 - 2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 30$	$\nearrow$	$\ln 35$	$\searrow$	$\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(33;35)$. **B.** $(37;40)$. **C.** $(29;32)$. **D.** $(24;26)$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên hàm số $g(x)=\ln f(x)$ ta có $\ln f(x)\ge\ln 3$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)\ge 3$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị là $A(x_1;\ln 30)$, $B(x_2;\ln 35)$, $C(x_3;\ln 3)$ nên $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$ và $f(x_1)=30$, $f(x_2)=35$, $f(x_3)=3$.

Do $y=f'(x)$ là hàm số bậc 3 nên phương trình $f'(x)=0$ chỉ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $g'(x)$ ta có

$$f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x)=0\\ f(x)=1\ (\text{VN})\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\ x=x_2\\ x=x_3\end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là:

$$S=\int_{x_1}^{x_3}\left|g'(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_3}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}-f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_3}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_3}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x$$

+ Tính $I_1=\int_{x_1}^{x_2}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}f'(x).\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x$ (do $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(x_1;x_2)$)

Đặt $t=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

$x=x_1\Rightarrow t=f(x_1)=30$.

$x=x_2\Rightarrow t=f(x_2)=35$.

Suy ra $I_1=\int_{30}^{35}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_{30}^{35}=35-\ln 35-30+\ln 30=5+\ln\frac{6}{7}$.

+ Tính $I_2=\int_{x_2}^{x_3}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x=-\int_{x_2}^{x_3}f'(x).\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x$ (do $f'(x)\le 0,\ \forall x\in(x_2;x_3)$).

Đặt $t=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

$x=x_2\Rightarrow t=f(x_2)=35$.

$x=x_3\Rightarrow t=f(x_3)=3$.

Suy ra $I_2=-\int_{35}^{3}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=-\left(t-\ln|t|\right)\Big|_{35}^{3}=-(3-\ln 3-35+\ln 35)=32-\ln\frac{35}{3}$.

Vậy $S=5+\ln\frac{6}{7}+\left(32-\ln\frac{35}{3}\right)=37+\ln\frac{18}{245}\approx 34,39\in(33;35)$.

Câu 33. **(Mã 104-2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 12$	$\nearrow$	$\ln\dfrac{199}{16}$	$\searrow$	$\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(6;7)$. **C.** $(8;9)$. **D.** $(10;11)$.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT của $g(x)$ ta có $\ln f(x) \geq \ln 4 \Leftrightarrow f(x) \geq 4; \forall x \in R$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét phương trình $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ (*) \\ f(x) = 1 \ \ (**) \end{array}\right.$

Do $f(x) \geq 4; \forall x \in R$ suy ra phương trình $(**)$ vô nghiệm.

Từ đó suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{array}\right.$.

Mặt khác $f'(x) - g'(x) = f'(x).\left[1 - \dfrac{1}{f(x)}\right]$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)-g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $S = \int\limits_{x_1}^{x_3} \left|f'(x) - g'(x)\right| \mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[f'(x) - g'(x)\right] \mathrm{d}x - \int\limits_{x_2}^{x_3} \left[f'(x) - g'(x)\right] \mathrm{d}x$

$= \left[f(x) - g(x)\right]\Big|_{x_1}^{x_2} - \left[f(x) - g(x)\right]\Big|_{x_2}^{x_3}$

$= 2f(x_2) - f(x_1) - f(x_3) - 2\ln f(x_2) + \ln f(x_1) + \ln f(x_3)$

$= 2\frac{199}{16} - 12 - 4 - 2\ln\frac{199}{16} + \ln 12 + \ln 4 \approx 7,704 \in (7;8)$.

Câu 34. **(Chuyên Vinh – 2022)** Cho hàm số $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e(b,c,d,e \in \mathbb{R})$ có các giá trị cực trị là 1,4 và 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ với trục hoành bằng

A. 4.

B. 6.

C. 2.

D. 8.

Lời giải

Chon B

Gọi $m, n, p(m < n < p)$ lần lượt là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

Khi đó hàm số đạt cực tiểu m, p và đạt cực đại tại $x = n \Rightarrow f(n) = 9$.

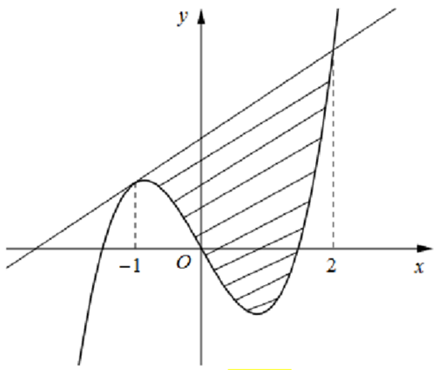
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ với trục hoành là

$$S = \int_m^p |g(x)|\,dx = \left|\int_m^n g(x)dx\right| + \left|\int_n^p g(x)dx\right| = \int_m^n g(x)dx - \int_n^p g(x)dx$$

$$= 2[\sqrt{f(x)}]\Big|_m^n - 2[\sqrt{f(x)}]_n^p$$

$$= 2[\sqrt{f(n)} - \sqrt{f(m)}] - 2[\sqrt{f(p)} - \sqrt{f(n)}] = 4\sqrt{f(n)} - 2(\sqrt{f(m)} + \sqrt{f(p)}) = 4.3 - 2\cdot(1+2) = 6.$$

Câu 35. **(THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021)** Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C). Biết rằng tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ -1 cắt (C) tại điểm B có hoành độ bằng 2 (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (C) (phần gạch chéo trong hình) bằng



A. $\frac{25}{4}$.   **B.** $\frac{13}{2}$.   **C.** $\frac{27}{4}$.   **D.** $\frac{11}{2}$.

Lời giải

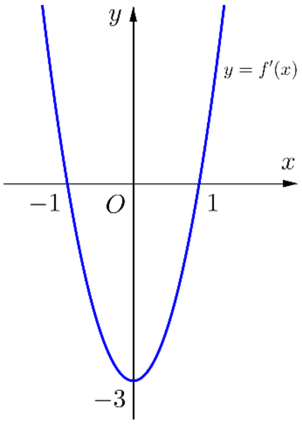
Chọn C

◆ Giả sử $(C): y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $d: y = g(x)$

Khi đó phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$

- Dễ thấy đa thức $f(x)-g(x)$ là đa thức bậc ba có hệ số lũy thừa lớn nhất bằng 1 và có nghiệm kép $x=-1$ và nghiệm đơn $x=2$. Do đó $f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-2)$.
- Diện tích hình phẳng là $S=\int_{-1}^{2}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{2}(g(x)-f(x))dx=\int_{-1}^{2}-(x+1)^2(x-2)dx=\frac{27}{4}$.

Câu 36. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2022)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a,b,c,d\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



A. $\frac{725}{35}\pi$. **B.** $\frac{729}{35}\pi$. **C.** 6π. **D.** $\frac{1}{35}\pi$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt là: $-1;1$

$\Rightarrow f'(x)=k(x+1)(x-1)$

Mà $f'(0)=-3 \Leftrightarrow k.1.(-1)=-3 \Leftrightarrow k=3$. Do đó: $f'(x)=3(x+1)(x-1) \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$.

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(3x^2-3)\mathrm{d}x=x^3-3x+C$.

Đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm, nghĩa là đường thẳng $(d): y=4$ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 âm.

$\Rightarrow f'(x_0)=k_d \Leftrightarrow 3x_0^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-1 \end{array}\right.$. Vì x_0 âm, nên $x_0=-1$.

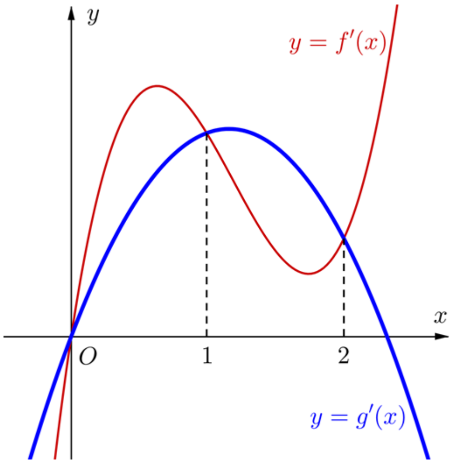
Ta có: $f(x_0)=4 \Leftrightarrow (-1)^3-3(-1)+C=4 \Leftrightarrow C=2$.

Do đó: $f(x)=x^3-3x+2$. Xét: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Hình phẳng (H) được giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f(x);\ y=0 \\ x=1;\ x=-2 \end{cases}$.

Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H quanh trục Ox là: $V=\pi\int\limits_{-2}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{729}{35}\pi$.

Câu 37. **(Cụm Trường Nghệ An - 2022)** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $g'(x)=qx^2+nx+p$ với $a,q\neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng 10 và $f(2)=g(2)$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng $\dfrac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{N}$ và a,b nguyên tố cùng nhau). Tính $a-b$.



A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $f'(x)=g'(x)$ có ba nghiệm bội lẻ phân biệt là: $0;1;2$.

$\Rightarrow f'(x)-g'(x)=kx(x-1)(x-2)$

Với (H_1) giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f'(x) \\ y=g'(x) \\ x=0;\ x=2 \end{cases}$, ta có: $S_{(H_1)}=\int\limits_0^2\left|f'(x)-g'(x)\right|\mathrm{d}x$

$\Rightarrow k\int\limits_0^2\left|x(x-1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow k=20$

Do đó: $f'(x)-g'(x)=20x(x-1)(x-2)$

$\Rightarrow f'(x)-g'(x)=20x(x^2-3x+2)$

$\Rightarrow f'(x)-g'(x)=20x^3-60x^2+40x\ (1)$.

Lấy tích phân hai vế của (1), ta được: $\int\left[f'(x)-g'(x)\right]\mathrm{d}x=\int\left(20x^3-60x^2+40x\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow f(x)-g(x)=5x^4-20x^3+20x^2+C\ (2)$

Thay $x=2$ vào (2), ta được: $f(2)-g(2)=C\Rightarrow C=0$.

Do đó: $f(x)-g(x)=5x^4-20x^3+20x^2$.

Xét: $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 5x^4-20x^3+20x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Với $\left(H_2\right)$ giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f\left(x\right)-g\left(x\right) \\ y=0 \\ x=0;\ x=2 \end{cases}$, ta có: $S_{\left(H_2\right)}=\int\limits_0^2\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$.

Do đó: $a=16,\ b=3$. Vậy $a-b=13$.

Câu 38. **(Đại học Hồng Đức – 2022)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbb{R})$ có hai điểm cực trị là -1 và 1. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ trùng với các điểm cực trị của $f(x)$, đồng thời có đỉnh nằm trên đồ thị của $f(x)$ với tung độ bằng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ gần với giá trị nào nhất dưới đây?

A. 10.

B. 12.

C. 13.

D. 11.

Lời giải.

Gọi I là toạ độ đỉnh của đồ thị hàm số $g(x)$, dễ thấy $I(0;2)$ và $g(x)=-2(x-1)(x+1)$ hay $g(x)=-2x^2+2$

Ta có: $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases} 3-2a+b=0 \\ 3+2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3-3x+c$.

Vi I thuộc đồ thị của $f(x)$, nên $c=2 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$.

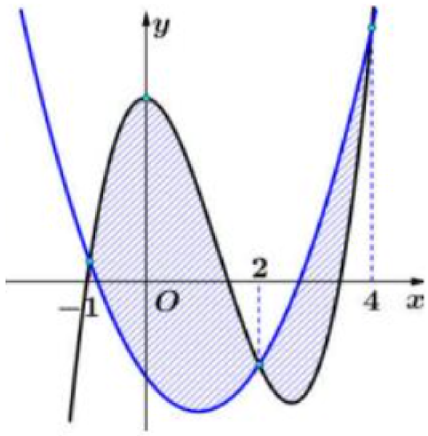
Xét $f(x)-g(x)=x^3+2x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-3}^0\left|x^3+2x^2-3x\right|dx+\int_0^1\left|x^3+2x^2-3x\right|dx=\frac{7}{6}\approx 11,8$$

Câu 39. **(THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022)** Cho hai hàm đa thức $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ và $g\left(x\right)=mx^2+nx+p$. Biết rằng đồ thị hai

hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-1;2;4$ đồng thời cắt trục tung lần lượt tại M,N sao cho $MN=6$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đã cho (phần gạch sọc) có diện tích bằng

A. $\frac{125}{8}$. **B.** $\frac{253}{24}$. **C.** $\frac{253}{16}$. **D.** $\frac{253}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ là:

$ax^3+bx^2+cx+d=mx^2+nx+p \Leftrightarrow ax^3+\left(b-m\right)x^2+\left(c-n\right)x+d-p=0$

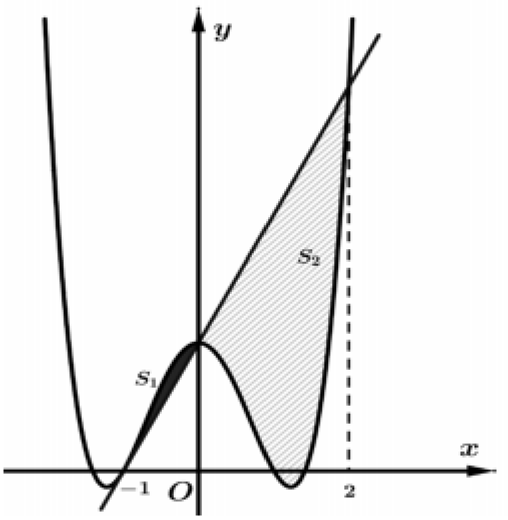
Do đồ thị hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-1;2;4$ nên ta được $a\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-4\right)=ax^3+\left(b-m\right)x^2+\left(c-n\right)x+d-p$.

Mà $f\left(0\right)-g\left(0\right)=y_M-y_n=MN=6$. Suy ra $a=\frac{3}{4}$.

Do đó: $f\left(x\right)-g\left(x\right)=\frac{3}{4}\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-4\right)$.

Khi đó: $S=\int\limits_{-1}^{4}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{4}\left|\frac{3}{4}\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-4\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{16}$.

Câu 40. **(THPT Nho Quan A – Ninh Bình – 2022)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), Biết $f(-1)=0$. Tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x=-1$ của (C) cắt (C) tại 2 điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2, Gọi $S_1;S_2$ là diện tích hình phẳng (phần gạch chéo trong hình vẽ). Tính S_2, biết $S_1=\frac{401}{2022}$.



A. $\dfrac{12431}{2022}$.

B. $-\dfrac{5614}{1011}$.

C. $\dfrac{2005}{2022}$.

D. $\dfrac{2807}{1011}$.

Lời giải

Từ đồ thị (C) nhận thấy $a>0;b<0;c>0$.

Ta có: $f(-1)=0$ suy ra: $a+b+c=0$ (1); gọi $A(-1;0)$

Phương trình tiếp tuyến tại $A(-1;0)$ là $(d): y=y'(1)(x+1)=(-4a-2b)(x+1)$

Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến (d) và đồ thị (C): $(-4a-2b)(x+1)=ax^4+bx^2+c(*)$

Mà $x=0, x=2$ là nghiệm của (*) suy ra $\begin{cases}-4a-2b=c\\-12a-6b=16a+4b+c\end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases}c=-a-b\\-4a-2b=-a-b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-a-b\\b=-3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=2a\\b=-3a\end{cases}$

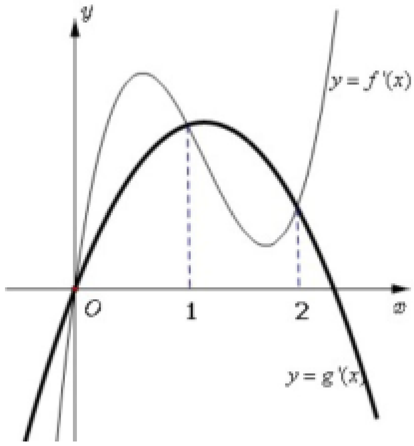
Ta có: $S_1=\int_{-1}^{0}\left(ax^4+bx^2+c-(-4a-2b)(x+1)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(ax^4-3ax^2+2a-2a(x+1)\right)dx$

$\Rightarrow S_1=a\int_{-1}^{0}\left(x^4-3x^2-2x\right)dx=\dfrac{a}{5}=\dfrac{401}{2022}\Rightarrow a=\dfrac{2005}{2022}$.

$\Rightarrow S_2=\int_{0}^{2}\left[(-4a-2b)(x+1)-\left(ax^4+bx^2+c\right)\right]dx=a\int_{0}^{2}\left(-x^4+3x^2+2x\right)dx=\dfrac{28a}{5}=\dfrac{5614}{1011}$.

Vậy $S_2=\dfrac{5614}{1011}$.

Câu 41. **(THPT Phù Cừ - Hưng Yên - 2022)** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $g'(x)=qx^2+nx+p$ với $a,q\neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng $\frac{5}{2}$ và $f(2)=g(2)$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng $\frac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{N}$ và a,b nguyên tố cùng nhau). Tính $T=a^2-b^2$.



A. 7. **B.** 55. **C.** -5. **D.** 16.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ suy ra $f'(x)-g'(x)=ax(x-1)(x-2)$.

Mà $\int_0^2 |f'(x)-g'(x)|dx=\frac{5}{2}\Leftrightarrow \int_0^2 |ax(x-1)(x-2)|\,dx=\frac{5}{2}\Leftrightarrow |a|\int_0^2 |x(x-1)(x-2)|\,dx=\frac{5}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{2}|a|=\frac{5}{2}\Leftrightarrow$

Dựa vào đồ thị hàm $y=f'(x)$ suy ra $a>0$. Do đó $|a|=5\Rightarrow a=5$.

Mặt khác, lại có $f'(x)-g'(x)=5x(x-1)(x-2)=5\left(x^3-3x^2+2x\right)$

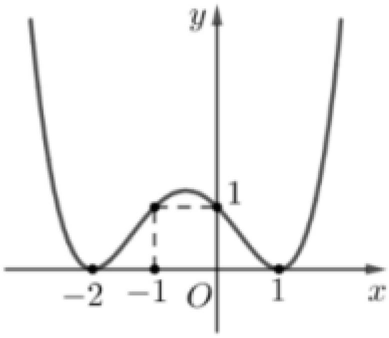
$\Rightarrow \int\left(f'(x)-g'(x)\right)dx=\int\left(5\left(x^3-3x^2+2x\right)\right)\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{5}{4}\left(x^4-4x^3+4x^2\right)+C$

Với $x=2\Rightarrow f(2)-g(2)=C\Rightarrow C=0$.

Suy ra $f(x)-g(x)=\frac{5}{4}\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\Rightarrow f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là $S=\int_0^2\left(\frac{5}{4}\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\right)dx=\frac{4}{3}\Rightarrow \begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$. Vậy $T=a^2-b^2=7$.

Câu 42. **(Sở Hà Tĩnh 2022)** Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$; $y=f'(x)$ có diện tích bằng



A. $\dfrac{127}{40}$.

B. $\dfrac{107}{5}$.

C. $\dfrac{87}{40}$.

D. $\dfrac{127}{10}$.

Lời giải

Ta có $f(x)=k(x+2)^2(x-1)^2; f(-1)=1 \Leftrightarrow 4k=1 \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{4} \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2$.

Do đó $f'(x)=\dfrac{1}{4}\left[2(x+2)(x-1)^2+2(x-1)(x+2)^2\right]$.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2=\dfrac{1}{4}\left[2(x+2)(x-1)^2+2(x-1)(x+2)^2\right]$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}(x+2)(x-1)[(x+2)(x-1)-2(x-1)-2(x+2)]=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}(x+2)(x-1)\left(x^2-3x-4\right)=0$

$\Leftrightarrow x=-2; x=-1; x=1; x=4.$

Vì vậy $S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|dx=\int_{-2}^{4}\left|\dfrac{1}{4}(x+2)(x-1)\left(x^2-3x-4\right)\right|dx=\dfrac{107}{5}$.

Câu 43. **(Sở Ninh Bình 2022)** Cho hàm số $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+36$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x), y=f'(x)$ và Ox giao nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 2,3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và Ox bằng $\dfrac{m}{n}$ là một phân số tối giản với $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tổng $m+n$ bằng

A. 846.

B. 845.

C. 848.

D. 847.

Lời giải.

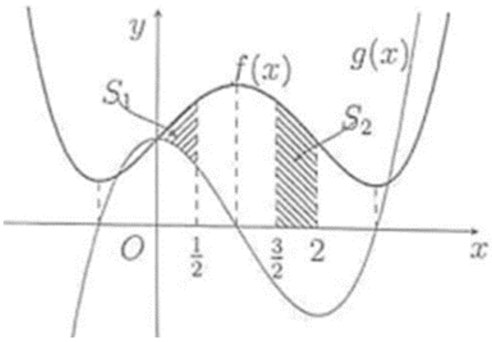
Từ giả thiết ta có $x=2, x=3$ là nghiệm của $f(x)$ và $f'(x)$ nên $f(x)$ có dạng

$f(x)=(x-2)^2(x-3)^2(x-k)$.

Mà $f(0)=36$ nên $k=-1$. Suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-1}^{3}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{3}\left|(x-2)^2(x-3)^2(x+1)\right|dx=\frac{832}{15}$$

Câu 44. **(Sở Hà Tĩnh 2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4-x^3+2x+2$ và hàm số $g(x)=bx^3-cx^2+2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S_1;S_2$ là diện tích các hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ, biết $S_1=\dfrac{221}{640}$. Khi đó S_2 bằng



A. $\dfrac{791}{640}$. **B.** $\dfrac{571}{640}$. **C.** $\dfrac{271}{320}$. **D.** $\dfrac{1361}{640}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$S_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(ax^4-(b+1)x^3+cx^2+2x\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{160}-\frac{b+1}{64}+\frac{c}{24}+\frac{1}{4}=\frac{221}{640}$$

$$\Leftrightarrow 4a-10b+\frac{80}{3}c=71$$

Dựa vào đồ thị ta thấy, các giao điểm của $g(x)$ và trục hoành chính là điểm cực trị của $f(x)$ nên $f'(x)$ và $g(x)$ có ba nghiệm chung. Mặt khác $f'(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số bậc ba có hệ số tự do bằng 2 nên: $g(x)=f'(x)\Rightarrow 4ax^3-3x^2+2=bx^3-cx^2+2, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=4a\\c=3\end{cases}.$$

Từ đó ta được $4a-40a+80=71\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{4}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+2x+2$.

Vậy $S_2=\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(\frac{1}{4}x^4-x^3+2x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{791}{640}$.

Câu 45. **(THPT Bùi Thị Xuân – Huế - 2022)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-3,1$ và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{935}{36}$.

B. $\frac{941}{36}$.

C. $\frac{937}{36}$.

D. $\frac{939}{36}$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x\Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+3$.

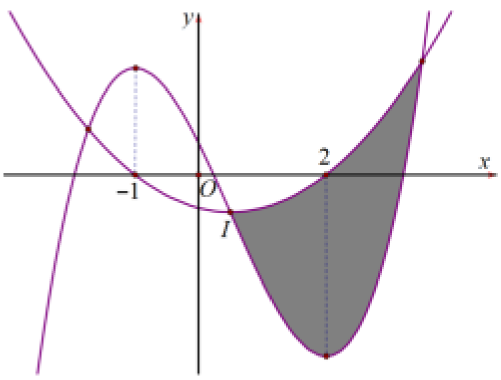
Ta có: $g(x)=mx^3+nx^2-x\Rightarrow g'(x)=3mx^2+2mx-1$.

$y=f(x)-g(x)\Rightarrow y'=f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+4$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=4\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}4a(-3)^3+3(b-m)(-3)^2+2(c-n)(-3)+4=0\\4a\cdot1^3+3(b-m)\cdot1^2+2(c-n)\cdot1+4=0\\4a\cdot4^3+3(b-m)\cdot4^2+2(c-n)\cdot4+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{12}\\b-m=\frac{-2}{9}\\c-n=\frac{-11}{6}\end{cases}$$

$$S=\int_{-3}^{4}\left|f'(x)-g'(x)\right|dx=\int_{-3}^{4}\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{11}{3}x+4\right|dx=\frac{937}{36}.$$

Câu 46. **(Chuyên Lam Sơn 2022)** Cho hàm số $f(x)$ với đồ thị là Parabol đỉnh I có tung độ bằng $-\frac{7}{12}$ và hàm số bậc ba $g(x)$. Đồ thị hai hàm số đó cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thoả mãn $18x_1x_2x_3=-55$ (hình vẽ).



Diện tích miền tô đậm gần số nào nhất trong các số sau đây?

A. 5,7.

B. 5,9.

C. 6,1.

D. 6,3.

Lời giải

Dễ thấy $I\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{7}{12}\right)$ và $f(x)=\dfrac{7}{27}(x+1)(x-2)$.

Hàm số $g(x)$ đạt cực trị tại $x=-1,x=2$ nên

$g'(x)=a(x+1)(x-2)\Rightarrow g(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x\right)+b$

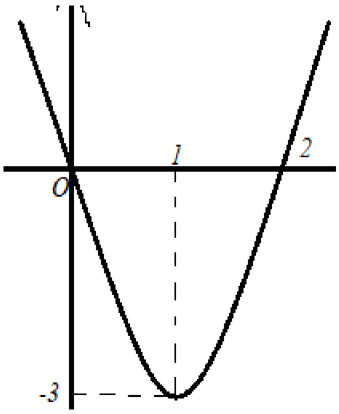
Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua I nên $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{12}\Leftrightarrow -\dfrac{7}{12}=-\dfrac{13}{12}a+b$, (1).

Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow a\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x\right)+b=\dfrac{7}{27}(x+1)(x-2)$

Theo định lý viet ta có: $18x_1x_2x_3=-55\Leftrightarrow 18\cdot\dfrac{b+\dfrac{14}{27}}{\dfrac{a}{3}}=-55\Rightarrow 18b+\dfrac{28}{3}=-\dfrac{55a}{3}$, (2)

Từ (1), (2) ta được $a=1,b=\dfrac{1}{2}\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{1}{2}$. Từ đó suy ra diện tich miền tô đậm sấp sỉ 5,7.

Câu 47. **(THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2022)** Cho $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq 0\right)$ là hàm số nhận giá trị không âm trên đoạn $\left[2;3\right]$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Biết diện tích hình giới hạn bởi các đồ thị của các hàm $g\left(x\right)=xf^2\left(x\right)$; $h\left(x\right)=-x^2f\left(x\right)f'\left(x\right)$ và các đường $x=2;x=3$ bằng 72. Tính $f\left(1\right)$?

A. $f\left(1\right)=2$ **B.** $f\left(1\right)=-1$ **C.** $f\left(1\right)=1$ **D.** $f\left(1\right)=-\dfrac{62}{5}$

Lời giải

Chọn A

+) Ta có $f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c\left(a\neq 0\right)$

+) Từ đồ thị có $\begin{cases} f'(0)=0 \Rightarrow c=0 \\ f'(2)=0 \Rightarrow 12a+4b=0 \\ f'(1)=-3 \Rightarrow 3a+2b+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=1 \\ b=-3 \end{cases}$. Suy ra $f(x)=x^3-3x^2+d$.

+) Diện tích

$$\int_2^3 g(x)-h(x)dx=\int_2^3 xf^2(x)+x^2f(x)f'(x)dx=\int_2^3 xf(x)\left[f(x)+xf'(x)\right]dx$$

$$=\int_2^3 xf(x)d\left[xf(x)\right]=\frac{1}{2}\left[xf(x)\right]^2\Big|_2^3=72$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.\left[9f^2(3)-4.f^2(2)\right]=\frac{1}{2}\left[9(27-3.9+d)^2-4(8-3.4+d)^2\right]=72$$

$$\Leftrightarrow 5d^2+32d-208=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=4 \\ d=-\dfrac{52}{5} \end{array}\right.$$

Vì $f(x)$ là hàm số nhận giá trị không âm trên đoạn $[2;3]$ nên $f(x)=x^3-3x^2+4$

Vậy $f(1)=2$

Câu 48. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh - 2022) Cho hàm số $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ với b,c,d là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+2f'(x)+3f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -6 và 42. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)+f'(x)+f''(x)}{g(x)+18}$ và $y=1$.

A. $\ln 5$.　　**B.** $\ln 7$.　　**C.** $2\ln 6$.　　**D.** $2\ln 5$.

Lời giải

Chọn A

Hàm $f(x)$ là hàm số bậc ba nên $g(x)$ là hàm số bậc $3 \Rightarrow g'(x)$ là hàm số bậc 2.

Ta có: $f'''(x)=6$

$g'(x)=f'(x)+2f''(x)+18$ có hai nghiệm là $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$ và $g(x_1)=42, g(x_2)=-6$

Xét phương trình tìm cận của tích phân để tính diện tích: $\dfrac{f(x)+f'(x)+f''(x)}{g(x)+18}=1 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)+2f''(x)+18}{g(x)+18}=0$

$$\Rightarrow f'(x)+2f''(x)+18=0 \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng $S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\dfrac{f(x)+f'(x)+f''(x)}{g(x)+18}-1\right|dx=\int_{x_1}^{x_2}\left|\dfrac{g'(x)}{g(x)+18}\right|dx=\left|\int_{x_1}^{x_2}\dfrac{g'(x)}{g(x)+18}dx\right|$

$$=\left|ln\left|g(x)+18\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|ln12-ln60\right|=ln5.$$

Câu 49. **(THPT Võ Nguyên Giáp - Quảng Bình - 2022)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên $\left[-1;2\right]$ và thoả mãn $f\left(x\right)=f\left(1-x\right),\forall x\in\left[-1;2\right]$. Đặt $S_1=\int\limits_{-1}^{2}xf\left(x\right)\mathrm{d}x$, S_2 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=-1;x=2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $S_1=2S_2$. **B.** $S_1=3S_2$. **C.** $2S_1=S_2$. **D.** $3S_1=S_2$.

Lời giải

Chọn C

Có S_2 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=-1;x=2\Rightarrow S_2=\int\limits_{-1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Xét $S_1=\int\limits_{-1}^{2}xf\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $x=1-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=-1\Rightarrow t=2$; $x=2\Rightarrow t=-1$.

Ta có: $S_1=\int\limits_{-1}^{2}\left(1-t\right)f\left(1-t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{2}\left(1-t\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{-1}^{2}t.f\left(t\right)\mathrm{d}t=S_2-S_1$.

Do đó, $2S_1=S_2$.

Câu 50. **(Sở Ninh Bình 2022)** Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{6}x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. Biết hàm số $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f''(x)f(x)+\left[f'''(x)\right]^2$ có 3 điểm cực trị $x_1<x_2<x_3$ và $g\left(x_1\right)=2,g\left(x_2\right)=5,g\left(x_3\right)=1$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)+1}$ và trục Ox bằng

A. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

B. $\frac{\ln 6}{2}$.

C. $\ln 6$.

D. $2\ln 6$.

Lời giải

Ta có: $f'''(x)=1$ nên

$$g'(x)=2f'(x)f''(x)-2f'''(x)f(x)-2f'(x)f''(x)=-2f(x)\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}g'(x)$$

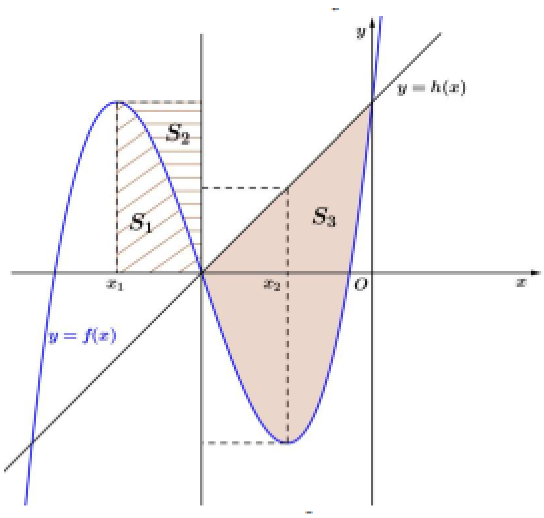
Tiếp đến ta có: $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)+1}=0\Leftrightarrow f(x)=0$ nên phương trình cũng có 3 nghiệm $x_1<x_2<x_3$, và cũng là các điểm cực trị của hàm số $g(x)$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{x_1}^{x_3}\left|\frac{f(x)}{g(x)+1}\right|dx=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)}{g(x)+1}dx\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}\frac{f(x)}{g(x)+1}dx\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+1}dx\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}\frac{g'(x)}{g(x)+1}dx\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left|\int_{g(x_1)}^{g(x_2)}\frac{d(g(x))}{g(x)+1}\right|+\left|\int_{g(x_2)}^{g(x_3)}\frac{d(g(x))}{g(x)+1}\right|\right)\left(g\left(x_1\right)=2, g\left(x_2\right)=5, g\left(x_3\right)=1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left|\int_2^5\frac{dx}{x+1}\right|+\left|\int_5^1\frac{dx}{x+1}\right|\right)=\frac{1}{2}(|\ln 6-\ln 3|+|\ln 2-\ln 6|)=\frac{\ln 6}{2}.$$ Vậy $S=\frac{\ln 6}{2}$.

Câu 51. **(Chuyên Sơn La 2022)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được gạch như hình bên và S_3 là diện tích phần tô đậm. Tính tỉ số $\frac{S_2}{S_3}$?



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{2}{16}$

D. $\frac{3}{16}$

Lời giải

Ta thực hiện tịnh tiến điểm gốc tọa độ vào trùng với tọa độ trung điểm hai hoành độ x_1, x_2. Khi đó diện tích của các phần cần tính không thay đổi và hàm số $\begin{cases} y=f(x) \\ y=h(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=g(x) \\ y=h_1(x) \end{cases}$

- Ta thấy S_1 và S_2 trở thành S_1' và S_2' tương ứng không thay đổi giá trị.

- Ta thấy $y=g(x)$ là hàm lẻ $\Rightarrow y=g(x)=ax^3+bx(a>0)$ có hai điểm cực trị x_1' và x_2' thỏa mãn $x_2'=-x_1'$.

Mặt khác $x_2' = x_1' + 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1' = -1 \\ x_2' = 1 \end{cases}$.

- Ta có $g'(x) = 3ax^2 + b$ có nghiệm $x_1' = -1$ và $x_2' = 1$.

$\Rightarrow g'(\pm 1) = 0 \Rightarrow b = -3a. \Rightarrow g(x) = ax^3 - 3ax \Rightarrow$ Tại $x_1' = -1$ thì $g(-1) = 2a$.

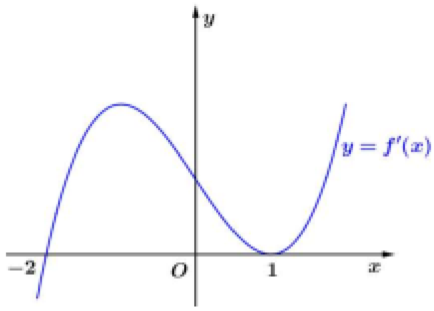
$\Rightarrow S_1' = \int_{-1}^{0} g(x)dx = \int_{-1}^{0}\left(ax^3 - 3ax\right)dx = -\dfrac{a}{4} + \dfrac{3a}{2} = \dfrac{5a}{2} \Rightarrow S_2' = \int_{-1}^{0}[2a - g(x)]dx = \int_{-1}^{0}\left[2a - \left(ax^3 - 3ax\right)\right]dx$

Do đường thẳng $h_1(x)$ cắt $g(x)$ tại ba điểm trong đó có điểm uốn nên suy ra hai hoành độ còn lại lần lượt là $2x_1' = -2$ và $2x_2' = 2$ vói $g(-1) = g(2) - 2a$, suy ra $h_1(x) = ax(a > 0)$

Suy ra: $\Rightarrow S_3' = \int_0^2 \left(h_1(x) - g(x)\right)dx = \int_0^2 \left(ax - \left(ax^3 - 3ax\right)\right)dx = \int_0^2 \left(-ax^3 + 4ax\right)dx = 4a$

Vậy tỉ số $\dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{S_2'}{S_3'} = \dfrac{3a}{4} \cdot \dfrac{1}{4a} = \dfrac{3}{16}$.

Câu 52. **(Chuyên KHTN 2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành bằng 9. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 2]$. Khi đó, giá trị $M - m$ bằng



A. $\dfrac{16}{3}$

B. $\dfrac{32}{3}$

C. $\dfrac{27}{3}$

D. $\dfrac{5}{3}$

Lời giải

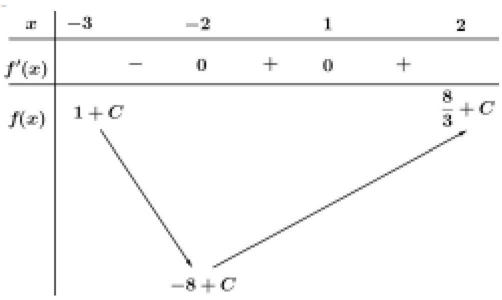
Đầu tiên, từ đồ thị trên ta dễ dàng suy ra: $f'(x) = a(x+1)^2(x-2) = ax^3 - 3ax + 2a$ vói $a \neq 0$

Khi đó, ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int\left(ax^3 - 3ax + 2a\right)dx = \dfrac{ax^4}{4} - \dfrac{3ax^2}{2} + 2ax + C$

Mà diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành bằng 9 nên ta suy ra:

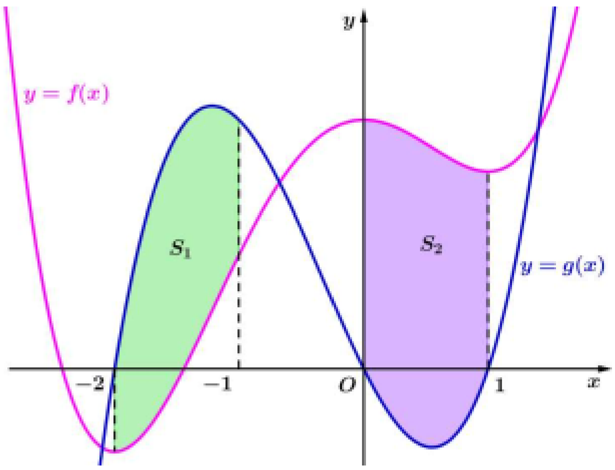
$\int_{-2}^{1} f'(x)dx = 9 \Leftrightarrow f(1) - f(-2) = 9 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{4} - \dfrac{3a}{2} + 2a + C\right) - (4a - 6a - 4a + C) = 9 \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{3}$.

Khi đó ta suy ra: $f(x)=\frac{x^4}{3}-2x^2+\frac{8}{3}x+C$, ta có bảng biến thiên trên đoạn $[-3;2]$ như sau:



Với $M=\frac{8}{3}+C, m=-8+C$ ta suy ra $M-m=\left(\frac{8}{3}+C\right)-(-8+C)=\frac{32}{3}$.

Câu 53. **(Chuyên Biên Hòa – Hà Nam 2022)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+bx+2$ và hàm số $y=g(x)=cx^3+dx^2-2x$ (với $a,b,c,d\in R$) là các hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1,S_2 là diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ, biết $S_1=\frac{97}{60}$. Tính S_2



A. $\frac{143}{60}$

B. $\frac{133}{60}$

C. $\frac{153}{60}$

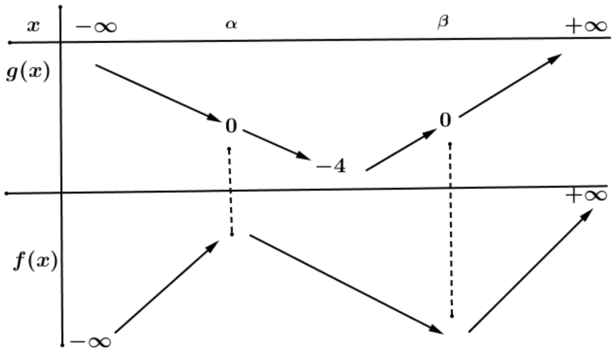
D. $\frac{163}{60}$.

Lời giải

Ta nhận thấy $\begin{cases} g(-2)=g(1)=0 \\ f'(-2)=f'(1)=0 \end{cases}$, Giải 2 hệ ta lần lượt ra được: $\begin{cases} f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2+2 \\ g(x)=x^3+x^2-2x \end{cases}$

Suy ra: $S_2=\int_0^1 (f(x)-g(x))dx=\int_0^1\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x+2\right)dx=\frac{133}{60}$.

Câu 54. **(Chuyên Hà Tĩnh 2022)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3-3x^2+bx+1-2d$ và $g(x)=cx^2-2x+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=30$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x),y=g(x),x=-3,x=6$ bằng



A. $\frac{2113}{12}$. **B.** $\frac{1123}{12}$. **C.** $\frac{1231}{12}$. **D.** $\frac{1321}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=3ax^2-6x+b$

Từ BBT suy ra $f'(x)$ và $g(x)$ có chung hai nghiệm là α và β

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{2}{c}=\dfrac{6}{3a}\\ \alpha.\beta=\dfrac{d}{c}=\dfrac{b}{3a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=c\\ b=3d\end{cases}$$

Từ BBT suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có đỉnh $I\left(\frac{1}{c};-4\right)$ và $c>0$

$$\Rightarrow c.\frac{1}{c^2}-\frac{2}{c}+d=-4\Leftrightarrow d=\frac{1}{c}-4\Rightarrow b=\frac{3-12c}{c}$$

Xét $f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow ax^3-(3+c)x^2+(b+2)x+1-3d=0$ (*)

Từ giả thiết suy ra phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 thỏa mãn

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=30$

$\Leftrightarrow \left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=30$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{c+3}{a}\right)^2-2.\dfrac{b+2}{a}=30$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{c+3}{c}\right)^2-2.\dfrac{\dfrac{3-12c}{c}+2}{c}=30$

$\Leftrightarrow (c+3)^2-2(3-10c)-30c^2=0$

$\Leftrightarrow -29c^2+26c+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} c=1 & (tm) \\ c=-\dfrac{3}{29} & (loai) \end{array}\right.$

$\Rightarrow c=1; a=1; b=-9; d=-3$

$\Rightarrow f(x)-g(x)=x^3-4x^2-7x+10$

$\Rightarrow S=\int\limits_{-3}^{6}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{6}\left|x^3-4x^2-7x+10\right|\mathrm{d}x=\dfrac{1321}{12}$

Câu 55. **(Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội 2022)** Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị $-2,1$ và 2. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có giá trị thuộc khoảng

A. $(34;35)$. **B.** $(36;37)$. **C.** $(37;38)$. **D.** $(35;36)$.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra, ta có: $f'(x)=12(x+2)(x-1)(x-2)=12\left(x^3-x^2-4x+4\right)$

$\Rightarrow f(x)=3x^4-4x^3-24x^2+48x+d$.

Khi đó $f(-2)=d-112, f(1)=d+23, f(2)=d+16$.

Giả sử $g(x)=mx^2+nx+p$.

Theo bài ra, ta có:

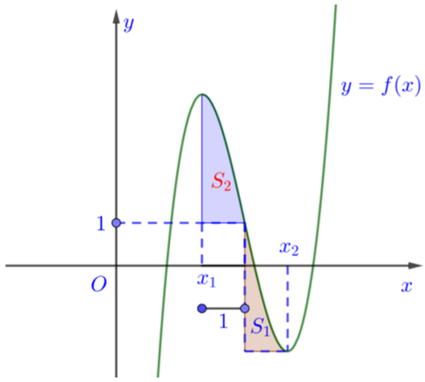
$$\begin{cases} g(-2)=4m-2n+p=d-112 \\ g(1)=m+n+p=d+23 \\ g(2)=4m+2n+p=d+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-2n+(p-d)=-112 \\ m+n+(p-d)=23 \\ 4m+2n+(p-d)=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-13 \\ n=32 \\ p-d=4 \end{cases}.$$

Do vậy, $f(x)-g(x)=3x^4-4x^3-24x^2+48x+d+13x^2-32x-p=3x^4-4x^3-11x^2+16x-4$.

Suy ra $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{1}{3} \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy $S=\int\limits_{-2}^{2}\left|3x^4-4x^3-11x^2+16x-4\right|dx \approx 37,31358 \in (37;38)$.

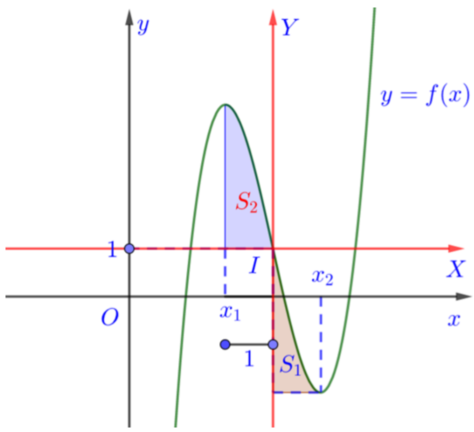
Câu 56. **(Chuyên Thái Bình 2022)** Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết của bài toán, ta có I là điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba $f(x)$.

Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ trong hệ trục Oxy là $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$.

Tịnh tiến hệ trục Oxy sang hệ trục IXY như hình vẽ. Khi đó $A(X_1;Y_1)$; $B(X_2;Y_2)$.

Ta có $\begin{cases} X_1=-X_2 \\ X_2=X_1+2 \end{cases} \Rightarrow X_2=1,\ X_1=-1$.

Gọi hàm số có đồ thị như hình vẽ trong hệ trục IXY là $g(\text{X})$, ta có $g(\text{X})$ là hàm số bậc ba, là hàm số lẻ và có hai điểm cực trị là $X_2 = 1,\ X_1 = -1$ nên $g(X) = a(X^3 - 3X)(a > 0)$.

Ta có: (S_1) giới hạn bởi $\begin{cases} Y = a(X^3 - 3X) \\ Y = -2a \\ X = 0; X = 1 \end{cases}$, diện tích của (S_1) là

$$S_1 = \int_0^1 \left|a(X^3 - 3X) + 2a\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[a(X^3 - 3X) + 2a\right] \mathrm{d}x = 2a - \frac{5}{4}a = \frac{3}{4}a$$

+ (S_2) giới hạn bởi $\begin{cases} Y = a(X^3 - 3X) \\ Y = 0 \\ X = -1; X = 0 \end{cases}$, diện tích của (S_2) là

$$S_2 = \int_{-1}^0 \left|a(X^3 - 3X)\right| \mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 a(X^3 - 3X) \mathrm{d}x = \frac{5}{4}a.$$

Suy ra $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\frac{3}{4}a}{\frac{5}{4}a} = \dfrac{3}{5}$.

Câu 57. (Liên trường Quảng Nam 2022) Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - x$; với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{71}{8}$. **B.** $\dfrac{32}{3}$. **C.** $\dfrac{71}{9}$. **D.** $\dfrac{71}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = f(x) - g(x) = ax^4 + (b - m)x^3 + (c - n)x^2 + 3x$.

$y' = 4ax^3 + 3(b - m)x^2 + 2(c - n)x + 3$.

Theo giả thiết, $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3 do đó

Với $x = -1$ thì $y' = -4a + 3(b - m) - 2(c - n) + 3$.

Với $x = 2$ thì $y' = 32a + 12(b - m) + 4(c - n) + 3$.

Với $x = 3$ thì $y' = 108a + 27(b - m) + 6(c - n) + 3$.

$y' = 0$ giải hệ ta được $a = \dfrac{1}{8}$, $b - m = -\dfrac{2}{3}$, $c - n = \dfrac{1}{4}$ thế vào $y' = \dfrac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \dfrac{1}{2}x + 3$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là $S=\int\limits_{-1}^{3}\left|\frac{1}{2}x^3-2x^2+\frac{1}{2}x+3\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{12}$.

Câu 58. **(Sở Hà Nam 2022)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-4$ và $g(x)=dx^2+ex+2,(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;2$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đã cho có diện tích bằng.

A. $\frac{316}{15}$. **B.** $\frac{191}{9}$. **C.** $\frac{253}{12}$. **D.** $\frac{97}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$:

$h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-6=0$.

Hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;2$ nên

$h(x)=a(x+3)(x+1)(x-2)=0$.

Xét $h(0)=-6\Leftrightarrow a.3.1.(-2)=-6\Leftrightarrow a=1$.

Vậy hàm số: $h(x)=(x+3)(x+1)(x-2)$

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đã cho có diện tích bằng:

$S=\int\limits_{-3}^{2}|h(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{2}|(x+3)(x+1)(x-2)|=\frac{253}{12}$. (Tính tích phân bằng máy tính).

Câu 59. **(Sở Hưng Yên 2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,c,b,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2;-1;3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{131}{4}$. **B.** $\frac{131}{6}$. **C.** $\frac{125}{12}$. **D.** $\frac{125}{6}$.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+4$. (1)

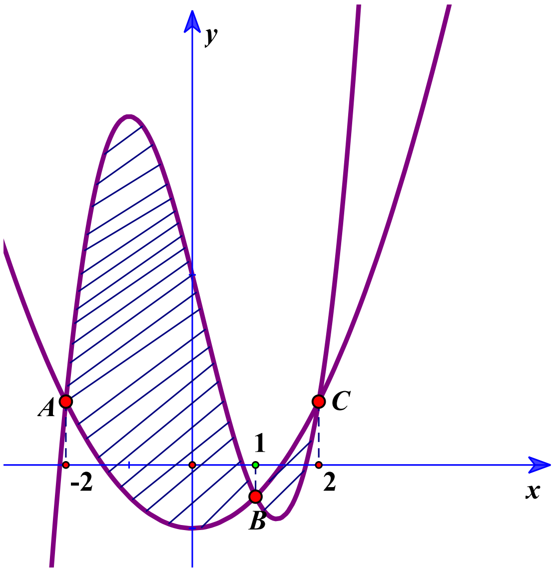
+ Mặt khác, vì hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2;-1;3$ nên

$f'(x)-g'(x)=a(x+2)(x+1)(x-3)$ (2)

+ Từ $(1),(2)$ suy ra: $4=-6a\Leftrightarrow a=-\frac{2}{3}$. Do đó: $f'(x)-g'(x)=\frac{-2}{3}(x+2)(x+1)(x-3)$

Vậy diện tích hình phẳng là $S=\int\limits_{-2}^{3}\left|f'(x)-g'(x)\right|dx=\int\limits_{-2}^{3}\left|\frac{-2}{3}(x+2)(x+1)(x-3)\right|dx=\frac{131}{6}$

Câu 60. **(Sở Nam Định 2022)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3-\frac{1}{2}x^2+cx+d$ và parabol $y=g(x)$ có đỉnh nằm trên trục tung. Biết đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C có hoành độ lần lượt là $-2;1;2$ và thỏa mãn $AB=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$.



A. $\frac{71}{3}$. **B.** $\frac{238}{3}$. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Lời giải

Chọn D

+ Tịnh tiến các đồ thị dọc theo trục tung sao cho A,B,O thẳng hàng. Lúc đó diện tích các hình không thay đổi.

+ Đường thẳng đi qua A,B,O có phương trình $y=kx$ với $k<0$. Ta có: $A(-2;-2k),B(1;k)$

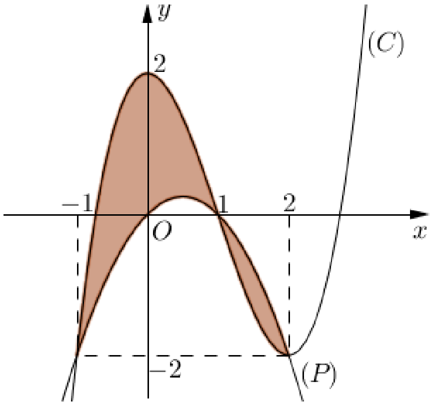
+ Vì $AB=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ nên $(1+2)^2+(k+2k)^2=\frac{45}{4}\Leftrightarrow 9k^2=\frac{9}{4}\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$. Do đó: $A(-2;1),B\left(1;-\frac{1}{2}\right)$

+ Hàm số $g(x)=a'x^2+b'$ có đồ thị đi qua $A(-2;1),B\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ nên $g(x)=\frac{1}{2}x^2-1$

+ Ta có: $C(2;1)$ nên $a=1$. Do đó: $f(x)-g(x)=(x+2)(x-1)(x-2)$

+ Vậy $S=\int\limits_{-2}^{2}\left|(x+2)(x-1)(x-2)\right|dx=\frac{71}{6}$.

Câu 61. **(Sở Vĩnh Phúc 2022)** Gọi (H) là phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba với đồ thị (P) của hàm số bậc hai (phần tô đậm) như hình vẽ bên. Diện tích của hình phẳng (H) bằng



A. $\dfrac{37}{12}$. **B.** $\dfrac{7}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào giả thiết và hình vẽ ta có:

+ (C) là đồ thị của hàm số có dạng $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2\ \ (a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$.

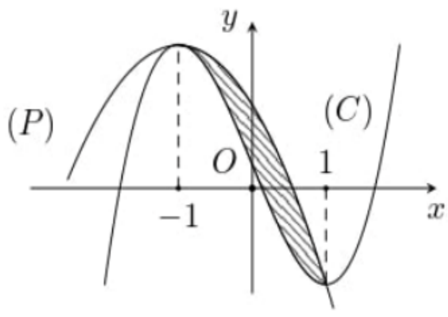
+ (P) là đồ thị của hàm số có dạng $g(x)=dx^2+ex\ \ (d,e\in\mathbb{R},d\neq 0)$.

Do (C) và (P) cắt nhau tại các điểm có hoành độ $x=-1;x=1;x=2$ nên ta có $f(x)-g(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)$.

Với $x=0$, ta có $f(0)-g(0)=a(0+1)(0-1)(0-2)=2\Rightarrow a=1$.

Diện tích của hình phẳng (H) là $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{37}{12}$.

Câu 62. **(THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2022)** Cho hai hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c,\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p,\ (m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và (P) là:

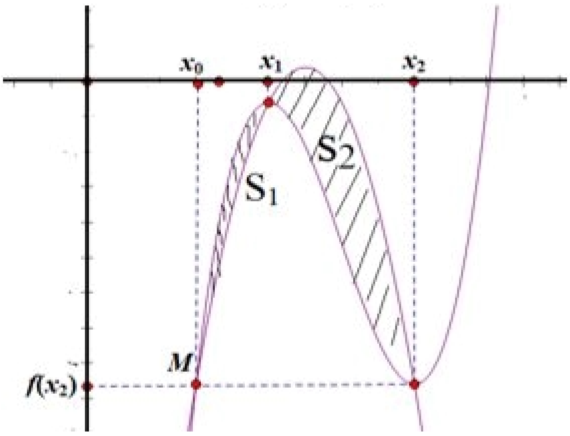
$x^3+ax^2+bx+c=mx^2+nx+p\Leftrightarrow x^3+(a-m)x^2+(b-n)x+c-p=0(*)$.

Từ đồ thị ta thấy phương trình $(*)$ có hai nghiệm $x=-1, x=1$ (trong đó $x=-1$ là nghiệm bội 2 và $x=1$ là nghiệm đơn).

Suy ra $x^3+(a-m)x^2+(b-n)x+c-p=(x+1)^2(x-1)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) là $S=\int_{-1}^{1}\left|(x+1)^2(x-1)\right|dx=\frac{4}{3}$.

Câu 63. **(Sở Lai Châu 2022)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)-3f(x_2)=0$, và đồ thị luôn đi qua $M(x_0; f(x_0))$ trong đó $x_0=x_1-1.g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị qua 2 điểm cực trị và M. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$(S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được tạo bởi đồ thị hai hàm $f(x), g(x)$ như hình vẽ).



A. $\frac{5}{32}$.

B. $\frac{6}{35}$

C. $\frac{7}{33}$.

D. $\frac{4}{29}$.

Lời giải

Nhận thấy hình phẳng trên có diện tích không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị sang trái sao cho $x_0=0$. Khi đó ta có $x_1=1, x_2=3$. Xét hàm $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ và $g(x)=mx^2+nx+p$.

Vì $x_1=1, x_2=3$ là các điểm cực trị nên ta có: $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases}$ (1).

Hơn nữa, ta có $f(1)=3f(3) \Leftrightarrow a+b+c+d=81a+27b+9c+3d(2)$. Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} b=-6a \\ c=9a \\ d=2a \end{cases}$.

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy: $\begin{cases} g(0)=f(0) \\ g(1)=3g(3) \\ g(0)=g(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=2a \\ m+n+p=6a \\ 9m+3n+p=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2a \\ n=6a \\ p=2a \end{cases}$.

Suy ra: $f(x)=a\left(x^3-6x^2+9x+2\right), g(x)=a\left(-2x^2+6x+2\right)$.

Khi đó ta có: $S_1=|a|\cdot\int_0^1\left|x^3-4x^2+3x\right|dx=\frac{5}{12}|a|, S_2=|a|\int_1^3\left|x^3-4x^2+3x\right|dx=\frac{8}{3}|a|$. Do đó, $\frac{S_1}{S_2}=\frac{5}{32}$.

Câu 64. **(Sở Quảng Bình 2022)** Cho hàm số $y=f(x)=-4x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-1;1;3.F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $y=g(x)$ là hàm số bậc hai đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=F(x)$ và $y=g(x)$ bằng

A. $\frac{128}{15}$.

B. $\frac{64}{15}$.

C. 16.

D. 64.

Lời giải

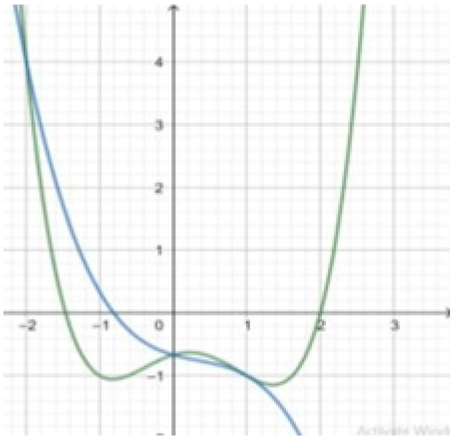
Ta có: $f(x)=-4\left(x^2-1\right)(x-3)\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=-x^4+4x^3+2x^2-12x+d$. Với $F(-1)=9+d$, $F(1)=-7+d, F(3)=9+d$ ta suy ra ba điểm cực trị của hàm số $y=F(x)$ có tọa độ lần lượt là $(-1;9+d)$, $(1;-7+d)$ và $(3;9+d)$. Xét hàm số bậc hai $y=mx^2+nx+p(m,n,p\in\mathbb{R})$ đi qua ba điểm $(-1;9),(1;-7)$ và $(3;9)$. Từ đó ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} m-n+p=9 \\ m+n+p=-7 \\ 9m+3n+p=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=-8 \\ p=-3 \end{cases} \Rightarrow y=4x^2-8x-3$. Suy ra $g(x)=4x^2-8x-3+d$. Ta có $F(x)-g(x)=-x^4+4x^3+2x^2-12x-\left(4x^2-8x-3\right)=-x^4+4x^3-2x^2-4x+3$.

Giải phương trình $F(x)-g(x)=0\Leftrightarrow x=-1;x=1;x=3$

Vậy diện tích giới hạn bởi hai đường $y=F(x)$ và $y=g(x)$ là

$$S=\int_{-1}^3|F(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^3\left|-x^4+4x^3-2x^2-4x+3\right|dx=\frac{128}{15}.$$

Câu 65. **(THPT Phụ Dực - Quảng Bình 2022)** Cho hai hàm đa thức bậc 4 và bậc 3 là $y=f(x), y=g(x)$ (hình vẽ dưới đây chỉ mang tính chất minh họa). Biết rằng hai đồ thị $y=f(x), y=g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt nhau tại 2 điểm khác có hoành độ lần lượt là $-2;0$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên ở nửa mặt phẳng bên trái và nửa bên phải của trục tung. Khi $S_2=\frac{2}{15}$ thì



A. $S_1 = \dfrac{28}{5}$.

B. $S_1 = \dfrac{56}{15}$

C. $S_1 = \dfrac{51}{15}$.

D. $S_1 = \dfrac{28}{15}$.

Lời giải

Ta có hai đồ thị $y = f(x), y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt nhau tại 2 điểm khác có hoành độ lần lượt là $-2; 0$ nên suy ra $h(x) = f(x) - g(x) = ax(x-1)^2(x+2)$

$$S_2 = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^1 \left|ax(x-1)^2(x+2)\right| dx = \frac{2}{15} \Leftrightarrow a = \pm\frac{2}{3}$$

Suy ra: $S_1 = \int_{-2}^{0} |f(x) - g(x)|dx = \int_{-2}^{0} \left|\pm\frac{2}{3}x(x-1)^2(x+2)\right| dx = \frac{56}{15}$.

Câu 66. **(Chuyên Hùng Vương – Gia Lai 2022)** Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + 1 (a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$ và $f(x_1) + f(x_2) = \dfrac{10}{3}$. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc nhất có đồ thị đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. $\dfrac{1}{6}$.

B. $\dfrac{1}{12}$.

C. $\dfrac{1}{3}$.

D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$

Giả sử hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} = 4 \Rightarrow b = -6a$

Mặt khác: $f(x_1) + f(x_2) = a\left(x_1^3 + x_2^3\right) + b\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 3\left(x_1 + x_2\right) + 2 = \dfrac{10}{3}$

$\Leftrightarrow a\left[\left(x_1 + x_2\right)^3 - 3x_1x_2\left(x_1 + x_2\right)\right] + b\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right] + \dfrac{32}{3} = 0$

$\Leftrightarrow a\left(64 - \dfrac{12}{a}\right) + b\left(16 - \dfrac{2}{a}\right) + \dfrac{32}{3} = 0$

$\Leftrightarrow a\left(64 - \dfrac{12}{a}\right) + b\left(16 - \dfrac{2}{a}\right) + \dfrac{32}{3} = 0$

$\Leftrightarrow -32a + \dfrac{32}{3} = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3} \Rightarrow b = -2$

Vậy: hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Tọa độ các điểm cực trị $\left(1; \dfrac{7}{3}\right)$ và $(3;1)$ suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

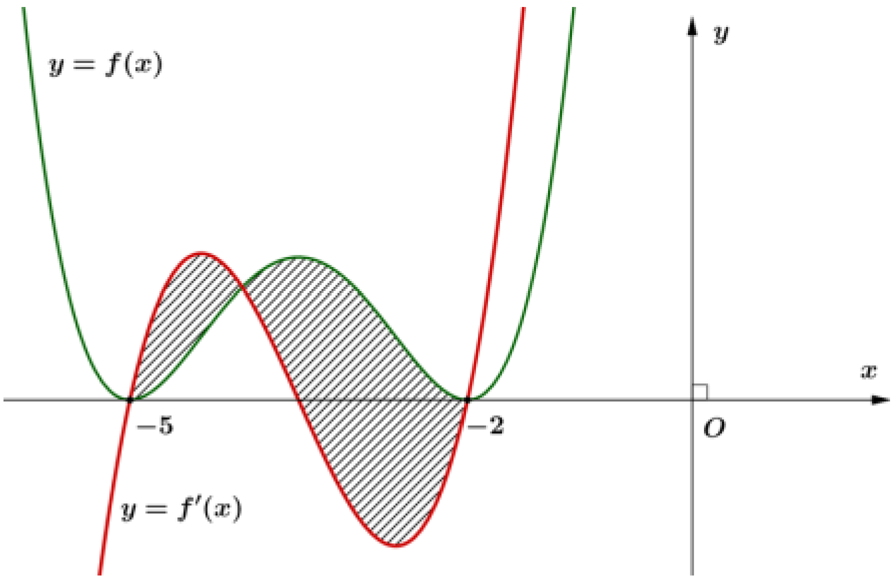
$g(x) = -\dfrac{2}{3}x + 3$

Hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là $x = 1; x = 2; x = 3$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$ và $g(x)$ là

$$S = \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 - \left(-\frac{2}{3}x + 3\right)\right)dx + \int_2^3 \left(-\frac{2}{3}x + 3 - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1\right)\right)dx = \frac{1}{6}$$

Câu 67. **(Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị nhận đường thẳng $x = -3,5$ làm trục đối xứng. Biết diện tích hình phẳng của phần giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ và hai đường thẳng $x = -5, x = -2$ có giá trị là $\dfrac{127}{50}$ (hình vẽ bên).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành bằng

A. $\frac{81}{50}$.

B. $\frac{91}{50}$.

C. $\frac{71}{50}$.

D. $\frac{61}{50}$.

Lời giải

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và $f(x)=0$ có 2 nghiệm kép $x=-5,x=-2\Rightarrow f(x)=a(x+2)^2(x+5)^2=a(x+7x+10)^2$

$\Rightarrow f'(x)=2a\left(x^2+7x+10\right)(2x+7)$. Ta có $f(x)-f'(x)=a\left(x^2+7x+10\right)\left(x^2+3x-4\right)$

Gọi S là diện tích hình phẳng của phần giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x),y=f'(x)$ và hai đường thẳng $x=-5,x=-2$

$S=a\int_{-5}^{-2}\left|\left(x^2+7x+10\right)\left(x^2+3x-4\right)\right|dx$. Đặt $A=\int_{-5}^{-2}\left|\left(x^2+7x+10\right)\left(x^2+2x-4\right)\right|dx=\frac{127}{10}$.

Ta có $S=a.A\Rightarrow a=\frac{S}{A}=\frac{1}{5}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành bằng

$S_1=\frac{1}{5}\int_{-5}^{-2}\left(x^2+7x+10\right)^2dx=\frac{81}{50}$.

Câu 68. **(Sở Nghệ An 2022)** Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx(a,b\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $g(x)=\frac{1}{3}f(x)-\frac{2}{3}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)$ có hai điểm cực trị là $x=1,x=3$. Với mỗi t là hằng số tùy ý thuộc đoạn $[0;1]$, gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0,y=f(t),y=f(x)$ và S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=1,y=f(t),y=f(x)$. Biểu thức $Q=12S_1+4S_2$ có thể nhận được bao nhiêu giá trị là số nguyên ?

A. 7.

B. 10.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Ta có: $f(x)=x^3+ax^2+bx\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow f''(x)=6x+2a\Rightarrow f'''(x)=6$

Từ đó ta suy ra: $g'(x)=\frac{1}{3}f'(x)-\frac{2}{3}f''(x)+\frac{1}{2}f'''(x)=\frac{3x^2+2ax+b}{3}-\frac{2(6x+2a)}{3}+3$

Do hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x=1, x=3$ nên suy ra $\begin{cases} g'(1)=0 \\ g'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ tức $y=f(x)=x^3$.

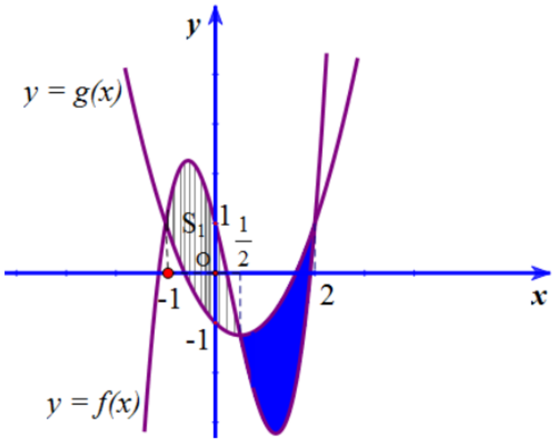
Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(t), y=f(x)$ có $x^3=t^3 \Leftrightarrow x=t$

$$\begin{cases} S_1=\int_0^t\left(t^3-x^3\right)dt=\dfrac{3t^4}{4} \\ S_2=\int_t^1\left(x^3-t^3\right)dt=\dfrac{3t^4}{4}-t^3+\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow Q=12S_1+4S_2=12t^4-4t^3+1=f(t)$$

Xét hàm số $f(t)$ ta có $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=0; t=\dfrac{1}{4}$ với $t=\dfrac{1}{4}$ là điểm cực tiểu và $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{63}{64}$.

Do $t\in[0;1]$ nên ta suy ra $Q\in\left[\dfrac{63}{64};9\right]$ tức Q có thể nhận 9 giá trị nguyên.

Câu 69. **(THPT Cò Nòi - Sơn La 2022)** Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ và $y=g\left(x\right)=mx^2+nx+k$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ là $-1;\dfrac{1}{2};2$ và có đồ thị như hình vẽ.



Biết phần diện tích kẻ sọc (hình S_1) bằng $\dfrac{81}{32}$. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}; x=2$ (phần bôi đen trong hình vẽ) bằng

A. $\dfrac{79}{24}$. **B.** $\dfrac{243}{96}$. **C.** $\dfrac{81}{32}$. **D.** $\dfrac{45}{16}$.

Lời giải

Ta có

$f\left(x\right)-g\left(x\right)=a\left(x+1\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-2\right)\ \left(a>0\right)$

$S_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}a\left(x+1\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-2\right)\mathrm{d}x=a\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-2\right)\mathrm{d}x=a.\dfrac{81}{64}$.

Mà $S_1=\dfrac{81}{32} \Rightarrow a=2$.

Khi đó: $S_2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x+1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-2\right)\mathrm{d}x=\frac{81}{32}$.