CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

a. Phương trình bậc hai một ẩn có dạng $ax^2+bx+c=0\quad(*)$ trong đó x là ẩn; a, b, c là các hệ số cho trước với $(a\neq 0)$.

Cách giải:

+ Nếu $c=0$, ta có phương trình: $ax^2+bx=0\Leftrightarrow x(ax+b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\dfrac{b}{a}\end{array}\right.$

+ Nếu $b=0$, ta có phương trình: $ax^2+c=0\Leftrightarrow x^2=-\dfrac{c}{a}$

Khi $-\dfrac{c}{a}>0$ thì $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Khi $-\dfrac{c}{a}<0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $b\neq 0;c\neq 0$, biến đổi phương trình về dạng: $a(x-\alpha)(x-\beta)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha\\ x=\beta\end{array}\right.$

b. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Để giải phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$

* Biệt thức Delta: $\Delta=b^2-4ac$

- Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm **phân biệt:**

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$;

* Lưu ý: nếu $a.c<0$ (a, c trái dấu) thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

c. Công thức nghiệm thu gọn

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ và $b=2b'$

Tính biệt thức: $\Delta'=b'^2-ac$

Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta'}}{a}$

Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$.

Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

d. Hệ thức Viet và ứng dụng

+ Định lý Viet: nếu $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ thì tổng và tích của hai nghiệm là: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

+ Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$. (Điều kiện để có hai số đó là: $S^2 - 4P \geq 0$).

e. Cách nhẩm nghiệm của phương trình:

+ Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$.

+ Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

+ Nếu nhẩm được: $x_1 + x_2 = m + n$; $x_1x_2 = mn$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = m$, $x_2 = n$.

f. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$

1. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

2. Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

3. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

4. Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$

5. Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

6. Phương trình có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

7. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

8. Phương trình có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

9. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

10. Phương trình có 2 nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S = 0 \end{cases}$

11. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) < 0 \end{cases}$

12. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$

13. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thoả $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$

g. Các biểu thức thường gặp trong việc giải toán phương trình bậc hai chứa tham số $(\Delta \geq 0)$:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2p$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4p$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3Sp$

- $x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2=\left(S^2-2p\right)^2-2p^2$
- $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{S}{p}$
- $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{S^2-2p}{p}$

Đây là một số biểu thức căn bản nhất, thường xuất hiện trong các bài toán phương trình bậc hai có thức tham số, nằm trong cấu trúc đề thi vào 10. Do đó, các em cần nắm vững những kiến thức này, để có thể vận dụng thuần thục, giúp biến đổi các loại biểu thức khác để giải quyết bài toán một cách đơn giản hơn.

2. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Phương trình bậc hai không có tham số

1. Phương trình bậc hai $(a\neq 0)$ dạng khuyết hạng tử bậc nhất $(b=0)$, ta có phương trình:

$$ax^2+c=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}$$

Khi $-\dfrac{c}{a}>0$ thì $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Khi $-\dfrac{c}{a}<0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Phương trình bậc hai dạng khuyết hạng tử tự do $(c=0)$, ta có phương trình:

$$ax^2+bx=0\Leftrightarrow x(ax+b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\dfrac{b}{a}\end{array}\right.$$

3. Phương trình bậc hai có đầy đủ các hạng tử $(b\neq 0;c\neq 0)$:

Ta biến đổi phương trình về dạng: $a(x-\alpha)(x-\beta)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha\\ x=\beta\end{array}\right.$

Ví dụ minh hoạ 1: Chỉ ra các hệ số a, b, c trong mỗi phương trình, sau đó giải phương trình:

a. $3x^2+5x=0$ b. $x^2-16=0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2+5x=0$, có hệ số $a=3;\ b=5$ và $c=0$.

$$3x^2+5x=0\Leftrightarrow x(3x+5)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ 3x+5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\dfrac{5}{3}\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=0$; $x=-\frac{5}{3}$.

b. Phương trình $x^2-16=0$, có hệ số $a=1$; $b=0$ và $c=-16$.

$x^2-16=0 \Leftrightarrow x=\pm 4$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=-4$; $x=4$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$. Rồi chỉ ra các hệ số a, b, c?

a. $3x^2+3x+5=5x+1$

b. $\frac{3}{4}x^2-4x-3=3x+\frac{1}{3}$

c. $-\sqrt{5}x^2+x-1=\sqrt{5}x+3$

d. $x^2-3(k-2)x-8=1-k^2$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $x^2-5x=0$

b. $2x^2-32=0$

c. $3x^2+4=0$

d. $2x^2+\sqrt{2}x=0$

Bài 3: Đưa các phương trình sau bằng cách chuyển về dạng $f(x)^2=m$ với m là hằng số:

a. $x^2-10x+9=0$

b. $x^2+2x-3=0$

c. $x^2+2x+7=0$

d. $4x^2-7x+3=0$

Hướng dẫn giải:

Bài 1: Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$. Rồi chỉ ra các hệ số a, b, c?

a. Phương trình $3x^2+3x+5=5x+1 \Leftrightarrow 3x^2-2x+4=0$ có hệ số $a=3$; $b=-2$; $c=4$.

b. Phương trình $\frac{3}{4}x^2-4x-3=3x+\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2-7x-\frac{10}{3}=0$ có hệ số $a=\frac{3}{4}$; $b=-7$; $c=-\frac{10}{3}$.

c. Phương trình $-\sqrt{5}x^2+x-1=\sqrt{5}x+3 \Leftrightarrow -\sqrt{5}x^2+\left(1-\sqrt{5}\right)x-4=0$ có hệ số $a=-\sqrt{5}$; $b=1-\sqrt{5}$; $c=-4$.

d. Phương trình $x^2-3(k-2)x-8=1-k^2 \Leftrightarrow x^2-3(k-2)x+k^2-9=0$ có hệ số $a=1$; $b=k-2$; $c=k^2-9$.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. Phương trình $x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\end{array}\right.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=0$, $x=5$.

b. Phương trình $2x^2-32=0 \Leftrightarrow 2x(x-16)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=16 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=0$, $x=16$.

c. Phương trình $3x^2+4=0 \Leftrightarrow 3x^2=-4$

$VT=3x^2 \geq 0$ với mọi x, $VP=-4<0$. Do đó, phương trình $3x^2=-4$ vô nghiệm.

d. Phương trình $2x^2+\sqrt{2}x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x\left(\sqrt{2}x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x=0$, $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 3: Giải các phương trình sau bằng cách chuyển về dạng: $f(x)^2=m$ với m là hằng số:

a. Phương trình $x^2-10x+9=0 \Leftrightarrow x^2-10x+25-16=0$

$\Leftrightarrow x^2-10x+25=16 \Leftrightarrow (x-5)^2=16 \Leftrightarrow (x-5)^2=4^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=4 \\ x-5=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=9$.

b. Phương trình $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1-4=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1-4=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=4 \Leftrightarrow (x+1)^2=2^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=-3$.

c. Phương trình $x^2+2x+7=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+6=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1=-6 \Leftrightarrow (x+1)^2=-6$ không có giá trị x thoả mãn.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

d. Phương trình $4x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow 4x^2-7x+\dfrac{49}{16}-\dfrac{1}{16}=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-7x+\dfrac{49}{16}=\dfrac{1}{16} \Leftrightarrow \left(2x-\dfrac{7}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16} \Leftrightarrow \left(2x-\dfrac{7}{4}\right)^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{7}{4}=\frac{1}{4} \\ 2x-\frac{7}{4}=-\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=2 \\ 2x=\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{3}{4} \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=\frac{3}{4}$.

Dạng 2. Giải phương trình bằng công thức nghiệm

1. Giải phương trình bậc hai bằng công thức nghiệm:

Để giải phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$

* Biệt thức Delta: $\Delta=b^2-4ac$

- Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm **phân biệt:**

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$;

- Nếu $\Delta<0$ thì phương trình vô nghiệm.

* Lưu ý: nếu $a.c<0$ (a, c trái dấu) thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

2. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ và $b=2b'$

Tính biệt thức: $\Delta'=b'^2-ac$

Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$

Nếu $\Delta'=0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=-\frac{b'}{a}$.

Nếu $\Delta'<0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ minh hoạ 1: Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c, rồi tính biệt thức delta (Δ) và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. $3x^2+5x+2=0$ b. $x^2-5x+9=0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2+5x+2=0$, có hệ số $a=3$; $b=5$ và $c=2$.

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4.3.2=25-24=1>0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $x^2-5x+9=0$, có hệ số $a=1$; $b=-5$ và $c=9$.

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4.1.9=25-36=-11<0$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ minh hoạ 2: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm.

a. $3x^2-5x+8=0$ b. $5x^2-3x-2=0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2-5x+8=0$, có hệ số $a=3$; $b=-5$ và $c=8$.

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4.3.8=25-96=-71<0$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $5x^2-3x-2=0$, có hệ số $a=5$; $b=-3$ và $c=-2$.

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4.5.(-2)=9+40=49>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=7$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-7}{2.5}=-\frac{2}{5};\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+7}{2.5}=1$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=-\frac{2}{5}$; $x_2=1$.

Ví dụ minh hoạ 3: Với giá trị nào của m thì:

a. Phương trình $3x^2+(m+1)x+5=0$ có nghiệm $x=1$.

b. Phương trình $mx^2-4x-3=0$ có nghiệm kép? Tìm nghiệm đó.

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2+(m+1)x+5=0$ có nghiệm $x=1$

Thay $x=1$ vào phương trình đã cho:

$3.1^2+(m+1).1+5=0\Leftrightarrow 3+m+1+5=0\Leftrightarrow m+9=0\Leftrightarrow m=-9$

Vậy, với $m=-9$ thì phương trình có nghiệm $x=1$.

b. Phương trình $mx^2-4x-3=0$.

Với hệ số $a=m$, $\Delta=(-4)^2-4.m.(-3)=16+12m$.

Để phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 16+12m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=-\dfrac{4}{3}$

Với $m=-\dfrac{4}{3}$ thì phương trình có nghiệm kép, và $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{(-4)}{2.m}=-\dfrac{(-4)}{2.\left(-\dfrac{4}{3}\right)}=-\dfrac{3}{2}$

Ví dụ minh hoạ 4: Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ luôn có hai nghiệm phân biệt nếu a, c trái dấu.

Áp dụng: Không giải phương trình, hãy cho biết mỗi phương trình sau có mấy nghiệm:

a. $\left(1+\sqrt{2}\right)x^2-2x-\sqrt{3}=0$

b. $5x^2-3mx-1-m^2=0$.

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có $\Delta=b^2-4ac$.

Khi a, c trái dấu thì $ac<0$, suy ra $-ac>0$, do đó $-4ac>0$.

Mặt khác: $b^2\geq 0$ với mọi b.

Vì vậy, $\Delta=b^2-4ac>0$.

Vậy, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt nếu a, c trái dấu. Điều này cũng đúng khi chứng minh với (Δ').

Áp dụng:

a. Phương trình $\left(1+\sqrt{2}\right)x^2-2x-\sqrt{3}=0$ có hệ số $a=1+\sqrt{2}>0$, hệ số $c=-\sqrt{3}<0$.

Do đó, a và c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $5x^2-3mx-1-m^2=0$ có hệ số $a=5>0$, hệ số $c=-1-m^2<0$ với mọi m.

Do đó, a và c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ minh hoạ 5: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm thu gọn.

a. $3x^2-5x+8=0$ b. $5x^2-3x-2=0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2-5x+8=0$, có hệ số $a=3$; $b=-5\Rightarrow b'=-\dfrac{5}{2}$ và $c=8$.

$$\Delta'=(b')^2-ac=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-.3.8=\frac{25}{4}-24=-\frac{71}{4}<0$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $5x^2-3x-2=0$, có hệ số $a=5$; $b=-3\Rightarrow b'=-\frac{3}{2}$ và $c=-2$.

$$\Delta'=\left(b'\right)^2-ac=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-.5.(-2)=\frac{9}{4}+10=\frac{49}{4}>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\frac{7}{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{7}{2}}{5}=-\frac{2}{5};\ x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{7}{2}}{5}=1$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=-\frac{2}{5}$; $x_2=1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c của phương trình. Tính biệt thức delta a và cho biết số nghiệm của phương trình:

a. $x^2-5x+1=0$ | b. $2x^2-9x+10=0$

c. $2x^2+7x+3=0$ | d. $-x^2+6x-9=0$

Bài 2: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:.

a. $x^2-8x+17=0$ | b. $\frac{1}{2}x^2-5x-3=0$

c. $-x^2+\sqrt{5}x-1=0$ | d. $5x^2+\sqrt{3}x-2=0$

Bài 3: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. $3x^2+\sqrt{2}x-3+\sqrt{2}=0$ | b. $5x^2-5\sqrt{2}x+\frac{5}{2}=0$

c. $x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$ | d. $x^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{6}=0$

Bài 4: Với giá trị nào của k thì các phương trình sau có nghiệm kép? Tính nghiệm kép đó.

a. $x^2-10x+k+2=0$ | b. $x^2+kx-3=0$

c. $x^2+2kx+7-k=0$ | d. $x^2-(k+1)x-1=0$

Hướng dẫn giải::

Bài 1: Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c của phương trình. Tính biệt thức delta A và cho biết số nghiệm của phương trình:

a. Phương trình $x^2-5x+1=0$ có hệ số $a=1$; $b=-5$ và $c=1$.

$$\Delta=(-5)^2-4.1.1=25-4=21>0$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $2x^2-9x+10=0$ có hệ số $a=2$; $b=-9$ và $c=10$.

$\Delta=(-9)^2-4.2.10=81-80=1>0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c. Phương trình $2x^2+7x+3=0$ có hệ số $a=2$; $b=7$ và $c=3$.

$\Delta=(7)^2-4.2.3=49-24=25>0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

d. Phương trình $-x^2+6x-9=0$ có hệ số $a=-1$; $b=6$ và $c=-9$.

$\Delta=(6)^2-4.(-1).(-9)=36-36=0$

Vậy, phương trình có nghiệm kép.

Bài 2: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. Phương trình $x^2-8x+17=0$, có hệ số $a=1$; $b=-8$ và $c=17$.

$\Delta=(-8)^2-4.1.17=64-68=-4<0$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $\frac{1}{2}x^2-5x-3=0$, có hệ số $a=\frac{1}{2}$; $b=-5$ và $c=-3$.

$\Delta=(-5)^2-4.\frac{1}{2}.(-3)=25+6=31>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{31}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{5-\sqrt{31}}{2.\frac{1}{2}}=5-\sqrt{31} \text{ và } x_2=\frac{5+\sqrt{31}}{2.\frac{1}{2}}=5+\sqrt{31}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=5-\sqrt{31}$; $x_2=5+\sqrt{31}$

c. Phương trình $-x^2+\sqrt{5}x-1=0$, có hệ số $a=-1$; $b=\sqrt{5}$ và $c=-1$.

$\Delta=\left(\sqrt{5}\right)^2-4.(-1).(-1)=5-4=1>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=1$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-\left(\sqrt{5}\right)-1}{2.(-1)}=\frac{\sqrt{5}+1}{2};\ x_2=\frac{-\left(\sqrt{5}\right)+1}{2.(-1)}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; $x_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

d. Phương trình $5x^2+\sqrt{3}x-2=0$, có hệ số $a=5$; $b=\sqrt{3}$ và $c=-2$.

$\Delta = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4.5.(-2) = 3 + 40 = 43 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{43}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-\left(\sqrt{3}\right) - \sqrt{43}}{2.5} = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{43}}{10};\ x_2 = \frac{-\left(\sqrt{3}\right) + \sqrt{43}}{2.5} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{43}}{10}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-\sqrt{3} - \sqrt{43}}{10};\ x_2 = \dfrac{-\sqrt{3} + \sqrt{43}}{10}$

Bài 3: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. Phương trình $3x^2 + \sqrt{2}x - 3 + \sqrt{2} = 0$ có

$\Delta = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4.3.\left(-3 + \sqrt{2}\right) = 2 + 36 - 12\sqrt{2} = \left(6 - \sqrt{2}\right)^2 > 0$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6 - \sqrt{2}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-\left(\sqrt{2}\right) - \left(6 - \sqrt{2}\right)}{2.3} = \frac{-6}{6} = -1;\ x_2 = \frac{-\left(\sqrt{2}\right) + \left(6 - \sqrt{2}\right)}{2.3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{6} = \frac{3 - \sqrt{2}}{3}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x_1 = -1$ và $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{3}$

b. Phương trình $5x^2 - 5\sqrt{2}x + \dfrac{5}{2} = 0$ có

$\Delta = \left(-5\sqrt{2}\right)^2 - 4.5.\dfrac{5}{2} = 50 - 50 = 0$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \dfrac{-\left(-5\sqrt{2}\right)}{2.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x_1 = x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c. Phương trình $x^2 - \left(1 - \sqrt{3}\right)x - \sqrt{3} = 0$ có:

$\Delta = \left[-\left(1 - \sqrt{3}\right)\right]^2 - 4.1.\left(-\sqrt{3}\right) = 4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} > 0$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2} = 1 + \sqrt{3}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{\left[-\left(1 - \sqrt{3}\right)\right] - \left(1 + \sqrt{3}\right)}{2.1} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3};\ x_2 = \frac{\left[-\left(1 - \sqrt{3}\right)\right] + \left(1 + \sqrt{3}\right)}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x_1 = -\sqrt{3}$ và $x_2 = 1$

d. Phương trình $x^2 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x - \sqrt{6} = 0$ có:

$$\Delta = \left[-\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right]^2 - 4.1.\left(-\sqrt{6}\right) = 5 - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-\left[-\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right] - \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{2.1} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\,;\; x_2 = \frac{-\left[-\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right] + \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{2.1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x_1 = -\sqrt{2}$ và $x_2 = \sqrt{3}$

Bài 4: Tìm m để phương trình có nghiệm kép

a. Phương trình $x^2 - 10x + k + 2 = 0$ có:

$$\Delta = (-10)^2 - 4.1.(k + 2) = 100 - 4k - 8 = 92 - 4k$$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 92 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 23$

Vậy, với $k = 23$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 5$

b. Phương trình $x^2 + kx - 3 = 0$ có:

$\Delta = k^2 - 4.1.(-3) = k^2 + 12 > 0$ với mọi *k*. Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, không có giá trị *k* thoả mãn điều kiện bài toán.

c. Phương trình $x^2 + 2kx + 7 - k = 0$ có:

$$\Delta = (2k)^2 - 4.1.(7 - k) = 4k^2 + 4k - 28$$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k - 28 = 0(*)$

Giải phương trình $4k^2 + 4k - 28 = 0(*)$ ta được $k = \dfrac{-1 - \sqrt{29}}{2}$; $k = \dfrac{-1 + \sqrt{29}}{2}$

Vậy, với $k = \dfrac{-1 - \sqrt{29}}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}$

với $k = \dfrac{-1 + \sqrt{29}}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{29}}{2}$

d. Phương trình $x^2 - (k + 1)x - 1 = 0$ có:

$\Delta = \left[-(k + 1)\right]^2 - 4.1.(-1) = (k + 1)^2 + 4 > 0$ với mọi k.

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi k.

Vậy, không có giá trị k thoả mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 3: Ứng dụng hệ thức Viét

1. Không giải phương trình, tính tổng và tích các nghiệm số

+ Định lý Viet: nếu $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ thì tổng và tích của hai nghiệm là: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

2. Giải phương trình bằng phương pháp tính nhẩm nghiệm

Phương trình $ax^2+bx+c=0$ có các hệ số thoả mãn:

+ Trường hợp: $a+b+c=0$ thì phương trình có nghiệm $x_1=1$, $x_2=\dfrac{c}{a}$.

+ Trường hợp: $a-b+c=0$ thì phương trình có nghiệm $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

3. Tính giá trị biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1; x_2 của phương trình

Để làm dạng toán này các em cần nhớ một số biểu thức sau:

- $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2p$
- $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=S^2-4p$
- $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3Sp$
- $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=(S^2-2p)^2-2p^2$
- $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{S}{p}$
- $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{S^2-2p}{p}$

4. Lập phương trình bậc hai khi biết tổng và tích của hai nghiệm phương trình:

Nếu u và v là hai số cần tìm có $\begin{cases} u+v=S \\ u.v=P \end{cases}$ thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình

$X^2-SX+P=0$

(Điều kiện để có hai số đó là $S^2-4P\geq 0$)

Ví dụ minh hoạ 1: Không giải phương trình, dùng hệ thức Vi-ét hãy tính tổng và tích các nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. $3x^2-11x+4=0$ b. $x^2-3\sqrt{7}x+2\sqrt{3}=0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2-11x+4=0$ có $\Delta=(-11)^2-4.3.4=121-48=73>0$.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2.

Theo hệ thức VI ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{11}{3}$; $x_1.x_2=\dfrac{4}{3}$.

b. Phương trình $x^2-3\sqrt{7}x+2\sqrt{3}=0$ có $\Delta=\left(-3\sqrt{7}\right)^2-4.1.2\sqrt{3}=63-8\sqrt{3}>0$.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2.

Theo hệ thức vi ét ta có: $x_1+x_2=3\sqrt{7}$; $x_1.x_2=2\sqrt{3}$.

Ví dụ minh hoạ 2:

a. Chứng tỏ rằng phương trình $7x^2-3x-54=0$ có một nghiệm là 3. Tìm nghiệm còn lại.

b. Cho phương trình $4x^2+3x+m^2-5=0$. Biết phương trình có nghiệm $x=-1$, hãy dùng hệ thức Vi ét để tìm nghiệm còn lại của phương trình, từ đó tính giá trị của m.

Hướng dẫn giải:

a. Thay $x_1=3$ vào phương trình $7x^2-3x-54=0$ được:

$7(3)^2-3(3)-54=63-9-54=0$ nên $x_1=3$ là một nghiệm của phương trình.

Theo định lý Vi ét, ta có: $x_1+x_2=\dfrac{3}{7}\Leftrightarrow 3+x_2=\dfrac{3}{7}\Leftrightarrow x_2=\dfrac{3}{7}-3=-\dfrac{18}{7}$.

b. Phương trình $4x^2+3x+m^2-5=0$ có nghiệm $x=-1$.

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow -1+x_2=-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x_2=-\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{1}{4}$

Cũng theo hệ thức Vi ét: $x_1x_2=\dfrac{m^2-5}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}.(-1)=\dfrac{m^2-5}{4}\Leftrightarrow -1=m^2-5\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm 2$

Vậy, với $m=2$ hoặc $m=-2$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x=-1$

Ví dụ minh hoạ 3: Cho phương trình: $3x^2+5x-6=0$ có nghiệm x_1; x_2.

Không tính giá trị của x_1; x_2, hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là u và v.

Biết $u = x_1 + \frac{1}{x_2}$ và $v = x_2 + \frac{1}{x_1}$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$ có hệ số $a = 3 > 0$; $c = -6 < 0$. Do đó tích $a.c < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo Định lý vi ét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{3}$ và $x_1x_2 = -2$. Khi đó:

$$u + v = x_1 + \frac{1}{x_2} + x_2 + \frac{1}{x_1} = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\right) = (x_1 + x_2) + \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}\right) = -\frac{5}{3} + \frac{5}{6} = -\frac{5}{6}$$

và

$$uv = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2} + 2 = -2 + \frac{1}{-2} + 2 = -\frac{1}{2}$$

Vậy, u và v là nghiệm của phương trình: $X^2 + \frac{5}{6}X - \frac{1}{2} = 0$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Không giải phương trình, hãy dùng hệ thức Vi ét, tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình sau:

a. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

b. $3x^2 - 11x + 4 = 0$

c. $x^2 + 2\left(1 + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{3} = 0$

d. $\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)x^2 + 2x + \sqrt{7} + \sqrt{3} = 0$

Bài 2: Dùng điều kiện $a + b + c = 0$, hoặc $a - b + c = 0$ để nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. $3x^2 - 4x + 1 = 0$

b. $-4x^2 - 3x + 7 = 0$

c. $x^2 + \left(1 + \sqrt{5}\right)x + \sqrt{5} = 0$

d. $3x^2 - \left(3 + \sqrt{5}\right)x + \sqrt{5} = 0$

e. $\left(\sqrt{3} - 2\right)x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 2 = 0$

f. $\left(5 - \sqrt{2}\right)x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$

Bài 3:

a. Cho phương trình $2x^2 + 5x + 2 = 0$. Biết phương trình có một nghiệm $x = -2$. Sử dụng định lý Vi ét để tìm nghiệm còn lại.

b. Cho phương trình $-3x^2 + 5x + 12 = 0$. Chứng tỏ phương trình có một nghiệm $x = 3$. Sử dụng định lý Vi ét để tìm nghiệm còn lại.

Bài 4: Hãy sử dụng hệ thức Vi ét để tìm nghiệm còn lại và tham số m trong mỗi phương trình sau:

a. Phương trình $3x^2-10x+3m+1=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=\frac{7}{3}$

b. Phương trình $4x^2-2x+m-3=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a. Phương trình $2x^2+5x+3=0$ có $\Delta=5^2-4.2.3=25-24=1>0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$; $x_1x_2=\frac{3}{2}$.

b. Phương trình $3x^2-11x+4=0$ có $\Delta=11^2-4.3.4=121-48=73>0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1+x_2=\frac{11}{3}$; $x_1x_2=\frac{4}{3}$.

c. Phương trình $x^2+2\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$ có

$\Delta'=\left(1+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}-\sqrt{3}=4+\sqrt{3}>0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1+x_2=-2\left(1+\sqrt{3}\right)$; $x_1x_2=\sqrt{3}$.

d. Phương trình $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)x^2+2x+\sqrt{7}+\sqrt{3}=0$ có

$\Delta=2^2-4.\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)=4-4(7-3)=-12<0$.

Phương trình vô nghiệm.

Bài 2: Dùng điều kiện $a+b+c=0$, hoặc $a-b+c=0$ để nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. Phương trình $3x^2-4x+1=0$ có $a+b+c=3+(-4)+1=0$. Nên có nghiệm $x=1$ và $x=\frac{1}{3}$

b. Phương trình $-4x^2-3x+7=0$ có $a+b+c=(-4)+(-3)+7=0$. Nên có nghiệm $x=1$ và $x=-\frac{7}{4}$.

c. Phương trình $x^2+\left(1+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}=0$ có $a-b+c=1-\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}=0$. Nên có nghiệm $x=-1$ và $x=\sqrt{5}$.

d. Phương trình $3x^2-\left(3+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}=0$ có $a+b+c=3-\left(3+\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}=0$. Nên có nghiệm $x=1$ và $x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

e. Phương trình $\left(\sqrt{3}-2\right)x^2+2\sqrt{3}x+\sqrt{3}+2=0$ có $a-b+c=\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}+2=0$. Nên có nghiệm $x=-1$ và $x=\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$.

f. Phương trình $\left(5-\sqrt{2}\right)x^2-10x+5+\sqrt{2}=0$ có $a+b+c=5-\sqrt{2}+(-10)+5+\sqrt{2}=0$. Nên có nghiệm $x=1$ và $x=\dfrac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$

Bài 3:

a. Cho phương trình $2x^2+5x+2=0$. Biết phương trình có một nghiệm $x=-2$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow -2+x_2=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x_2=-\dfrac{1}{2}$

b. Cho phương trình $-3x^2+5x+12=0$. Chứng tỏ phương trình có một nghiệm $x=3$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow -2+x_2=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x_2=-\dfrac{1}{2}$

Bài 4:

a. Phương trình $3x^2-10x+3m+1=0$.Phương trình có nghiệm $x_1=\dfrac{7}{3}$

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow \dfrac{7}{3}+x_2=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow x_2=1$

Khi đó, $x_1x_2=\dfrac{3m+1}{3}\Leftrightarrow \dfrac{7}{3}=\dfrac{3m+1}{3}\Leftrightarrow 3m+1=7\Leftrightarrow m=2$

Vậy, với $m=2$ thì phương trình có nghiệm $x_1=\dfrac{7}{3}$ và nghiệm còn lại $x_2=1$.

b. Phương trình $4x^2-2x+m-3=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=3$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3+x_2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x_2=-\dfrac{5}{2}$

Khi đó, $x_1x_2=\dfrac{m-3}{4}\Leftrightarrow -\dfrac{15}{2}=\dfrac{m-3}{4}\Leftrightarrow m-3=30\Leftrightarrow m=-27$

Vậy, với $m=-27$ thì phương trình có nghiệm $x_1=3$ và nghiệm còn lại $x_2=-\dfrac{5}{2}$.

Dạng 4. Giải và biện luận phương trình bậc hai có chứa tham số

Cho phương trình bậc hai có chứa tham số, thường là tham số m có dạng: $f\left(x,m\right)=0.$

1. Giải phương trình khi biết giá trị của tham số

Phương pháp: Thay giá trị m vào phương trình để tìm nghiệm.

2. Tìm tham số khi biết nghiệm x_0 của phương trình

+ Thay x_0 vào phương trình, ta tìm được giá trị m.

+ Kiểm tra xem giá trị m có thoả mãn điều kiện bài toán không. Nếu thoả mãn, ta kết luận đó là giá trị m cần tìm.

3. Tìm tham số m để phương trình bậc hai

+ Trong bài toán tìm tham số m để phương trình bậc hai thoả mãn điều kiện về số nghiệm, mối quan hệ giữa các nghiệm,...

Ta cần phân tích yêu cầu bài toán để xác định đúng các điều kiện cần thiết. Nếu tham số m có mặt ở hệ số a, ta cần phải chú ý điều kiện tương ứng của nó.

Các dạng toán thường gặp khi có tham số là tìm m để phương trình:

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ c\neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$	Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$
Phương trình (*) có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm đối nhau	Phương trình có 2 nghiệm đối nhau

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) < 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) < 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$	Phương trình có 1 nghiệm: có 2 TH + Phương trình có một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ + PT có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

4. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số.

Phương pháp: Biểu thức liên hệ không phụ thuộc m là biểu thức không có chứa tham số m. Áp dụng hệ thức Vi ét gồm tổng và tích của hai nghiệm. Biểu diễn tham số m theo các nghiệm (rút m).

Ví dụ minh hoạ 1: Cho phương trình: $x^2-(2m+3)x+m=0$

a. Giải phương trình với m = 2

b. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

c. Viết hệ thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ mà không phụ thuộc vào m.

Hướng dẫn giải:

Phương trình : $x^2-(2m+3)x+m=0$ (1)

a. Với m = 2, phương trình (1): $x^2-7x+2=0$

$\Delta=(-7)^2-4.1.2=41>0$, nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1=\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}; x_2=\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}$.

b. Phương trình : $x^2-(2m+3)x+m=0$ (1) có

$\Delta=(2m+3)^2-4.1.m=4m^2+12m+9-4m$

$= 4m^2 + 8m + 9 = 4m^2 + 8m + 4 + 5$

$= (2m+2)^2 + 5 > 0$ với mọi m.

Vậy, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

c. Theo câu b. Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Nên áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+3 \\ x_1x_2 = m \end{cases}$

Thay $m = x_1x_2$ vào $x_1 + x_2 = 2x_1x_2 + 3$ (*)

Vậy, biểu thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ không phụ thuộc m là $x_1 + x_2 = 2x_1x_2 + 3$ (*).

Ví dụ minh hoạ 2: Cho phương trình : $mx^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$

a. Xác định m để phương trình có một nghiệm duy nhất.

b. Xác định m để phương trình có một nghiệm.

c. Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức $(x_1+1)(x_2+1) = 3$

Hướng dẫn giải:

Phương trình : $mx^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$

a. Để phương trình có một nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -2(m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy, với $m = 0$ thì phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

b. Để phương trình có một nghiệm

TH1: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -2(m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

TH2: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+1)^2 - m(m-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 2m + 1 - m^2 + 5m = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 7m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -\frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{7}$$

Vậy, khi $m = 0$ hoặc $m = -\frac{1}{7}$ thì phương trình có một nghiệm.

c. Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức $\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)=3$

Để phương trình có nghiệm $x_1;x_2$ thì $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'\geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left(m+1\right)^2-m\left(m-5\right)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2+2m+1-m^2+5m\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 7m+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\geq -\dfrac{1}{7} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$:

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m+1}{m} \\ x_1x_2=\dfrac{m-5}{m} \end{cases}$

Theo đề ra: $\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)=3 \Leftrightarrow x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)+1=3 \Leftrightarrow x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)=2$

$\Leftrightarrow \dfrac{m-5}{m}+\dfrac{2m+1}{m}=2 \Leftrightarrow \dfrac{3m-4}{m}=2 \Leftrightarrow 3m-4=2m \Leftrightarrow m=4$ (thoả điều kiện)

Kết luận: Vậy với $m=4$ thì phương trình có hai nghiệm thoả điều kiện bài toán.

<u>Lưu ý:</u>

Ở câu này, học sinh chú ý, do mức độ phong phú của Tiếng Việt nên gặp đề yêu cầu phương trình có MỘT NGHIỆM (hoặc MỘT NGHIỆM DUY NHẤT) thì các em cần phân hiệt chính xác.

Nếu đề yêu cầu phương trình có 1 nghiệm thì sẽ có hai trường hợp thoả mãn là:

Phương trình có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$ *hoặc phương trình có nghiệm kép* $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$

Nếu đề yêu cầu phương trình có 1 nghiệm duy nhất thì chỉ có trường hợp $\begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$ *là đúng. Nếu đề yêu cầu phương trình có nghiệm kép thì* $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho phương trình: $x^2-2mx+4m-4=0.$

a. Tìm m để phương trình có hai nghiêm thỏa mãn $\frac{x_1+1}{x_2}+\frac{x_2+1}{x_1}=\frac{13}{4}$

b. Viết hệ thức liên hệ giữa x_1; x_2 mà không phụ thuộc vào tham số m.

Bài 2: Cho phương trình : $x^2-5x+2m-1=0$

a. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b. Tìm m để $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{19}{3}$

Bài 3: Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+2m+10=0$

a. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt

b. Tìm GTNN của biểu thức $A=10x_1x_2+x_1^2+x_2^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Phương trình: $x^2-2mx+4m-4=0.$

Có $\Delta'=(-m)^2-1(4m-4)=m^2-4m+4=(m-2)^2\geq 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$.

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=4m-4\end{cases}$

a. Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{x_1+1}{x_2}+\frac{x_2+1}{x_1}=\frac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1^2+x_1+x_2^2+x_2}{x_1x_2}=\frac{13}{4}\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2m)^2-2(4m-4)+(2m)}{4m-4}=\frac{13}{4}\Leftrightarrow\frac{4m^2-6m+8}{m-1}=13$$

$$\Leftrightarrow\frac{4m^2-6m+8}{m-1}-13=0\Leftrightarrow\frac{4m^2-6m+8-13(m-1)}{m-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4m^2-19m+21}{m-1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-19m+21=0\\m-1\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-\dfrac{7}{4} \end{array}\right. \\ m\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-\dfrac{7}{4} \end{array}\right.$$

Vậy, với $m=3$ hoặc $m=-\dfrac{7}{4}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn

$\dfrac{x_1+1}{x_2}+\dfrac{x_2+1}{x_1}=\dfrac{13}{4}$.

b. Phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ với mọi m, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=4m-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ m=\dfrac{x_1x_2+4}{4} \end{cases}$. Suy ra $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_1x_2+4}{4} \Leftrightarrow 2(x_1+x_2)=x_1x_2+4\ (*)$

Vậy, biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m là: $2(x_1+x_2)=x_1x_2+4\ (*)$.

Bài 2. Phương trình : $x^2-5x+2m-1=0$

a. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\ne 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\ne 0 \\ (-5)^2-4.1.(2m-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow -8m+29>0 \Leftrightarrow m<\frac{29}{8}$$

Vậy, với $m<\dfrac{29}{8}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình có hai nghiệm $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{19}{3}$

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\ne 0 \\ \Delta\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le\dfrac{29}{8}$, khi đó:

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1x_2=2m-1 \end{cases}$

Ta có: $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{19}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{19}{3} \Leftrightarrow \dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}-\dfrac{19}{3}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(5)^2-2(2m-1)}{2m-1}-\frac{19}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{75-12m+6-38m+19}{3(2m-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{75-12m+6-38m+19}{3(2m-1)}=0 \Leftrightarrow \frac{-50m+100}{3(2m-1)}=0 \Leftrightarrow m=2$$ (thỏa điều kiện)

Vậy, với $m=2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thoả điều kiện.

Bài 3. Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+2m+10=0$

a. Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\neq 0 \\ (m+1)^2-(2m+10)>0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2+2m+1-2m-10>0$

$\Leftrightarrow m^2-9>0 \Leftrightarrow m^2>9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<-3 \end{array}\right.$

Vậy, với $m<-3$ hoặc $m>3$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt,

b. Tìm GTNN của biểu thức $A=10x_1x_2+x_1^2+x_2^2$

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 3 \\ m\leq -3 \end{array}\right.$ Khi đó, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1x_2=2m+10 \end{cases}$, thay vào biểu thức

$A=10x_1.x_2+x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2+8x_1x_2$

$A=4(m+1)^2+8(2m+10)=4m^2+8m+4+16m+80$

$A=4m^2+24m+84$

$A=4(m+3)^2+48\geq 48$ với mọi giá trị m thuộc $\left[\begin{array}{l} m\geq 3 \\ m\leq -3 \end{array}\right.$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $A_{\min}=48 \Leftrightarrow m=-3$.

Dạng 5. Một số dạng toán khác liên quan phương trình bậc hai

1. Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức hàm số bậc hai: $M=ax^2+bx+c$ với $(a\neq 0)$.

+ Ta tính được $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ và $f(x_0)=ax_0^2+bx_0+c$

+ Biến đổi: $M=a(x-x_0)^2+f(x_0)$

+ Nếu $a>0 \Rightarrow M_{\min}=f(x_0)$, xảy ra khi và chỉ khi $x=x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

+ Nếu $a<0 \Rightarrow M_{\max}=f(x_0)$, xảy ra khi và chỉ khi $x=x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

2. Bài toán đồ thị hàm số bậc hai (Parabol)

Đồ thị hàm $y = ax^2 + bx + c$ với $(a \neq 0)$ là parabol (P).

Đồ thị hàm số $y = mx + n$ là đường thẳng (d).

+ Biện luận sự tương giao của hai đồ thị là biện luận số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$ax^2 + bx + c = mx + n \ (1)$

+ Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

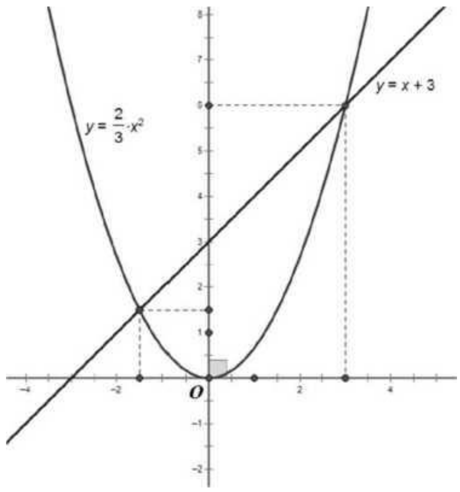
+ Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì (d) tiếp xúc với (P). Khi đó, ta gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị (P), và hoành độ tiếp điểm chính là nghiệm kép của phương trình.

+ Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (d) không cắt (P).

Ví dụ minh hoạ 1: Xác định tọa độ giao điểm của $(\mathrm{P}): y = \frac{2}{3}x^2$ và $(\mathrm{d}): y = x + 3$ bằng phương pháp đại số và đồ thị.

Hướng dẫn giải:

a. Đồ thị của parabol (P) và đường thẳng (d) được biểu diễn như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị ta thấy, đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm có toạ độ (3; 6) và $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

b. Tìm giao điểm bằng phương pháp đại số:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$\frac{2}{3}x^2 = x + 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 - x - 3 = 0$, giải phương trình ta được nghiệm là

$$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Với $x = 3$, thay vào (d) suy ra $y = 6$. Ta có giao điểm $(3;\ 6)$.

Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào (d) suy ra $y = \frac{3}{2}$. Ta có giao điểm $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ minh hoạ 2: Cho $(\mathrm{P}): y = -x^2$ và đường thẳng $(\mathrm{d}): y = -x + 3$

a. Xác định giao điểm của (P) và (d)

b. Viết phương trình đường thẳng (d') vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P).

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$-x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$ có $\Delta = 1 - 4.1.3 = -11 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy, đường thẳng (d) không cắt parabol (P).

b. Viết phương trình đường thẳng (d') vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P). Đường thẳng (d') có dạng: $y = ax + b$

+ (d') vuông góc với (d) suy ra: $a(-1) = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (d'): y = x + b$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (d') và (P):

$-x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 + x + b = 0\ (1)$

(d') tiếp xúc với (P) nên (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}$

Vậy, phương trình đường thẳng $(d'): y = x + \frac{1}{4}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho (P): $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ và (d): $y = mx + n$

a. Tìm m, n biết (d) đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(3;2)$

b. Tính a biết (d) tiếp xúc với (P).

Bài 2: Cho (P): $y = \frac{1}{3}x^2$ và (d): $y = -x + 6$.

a. Hãy vẽ đồ thì của (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b. Xác định tọa độ giao điểm của chúng bằng đồ thị.

Bài 3: Chứng minh (d): $y = x + \frac{1}{2}$ và (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$ tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm của chúng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Cho (P): $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ và (d): $y = mx + n$

a. Đường thẳng (d): $y = mx + n$ đi qua $A(0;-1) \Rightarrow -1 = m.0 + n \Leftrightarrow m = -1$

Đường thẳng (d): $y = mx + n$ đi qua $B(3;2)$

$\Rightarrow 2=3m+n \Leftrightarrow 2=3(-1)+n \Leftrightarrow n=5$

Vậy, đường thẳng $(d): y=-x+5$

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $ax^2=-x+5$

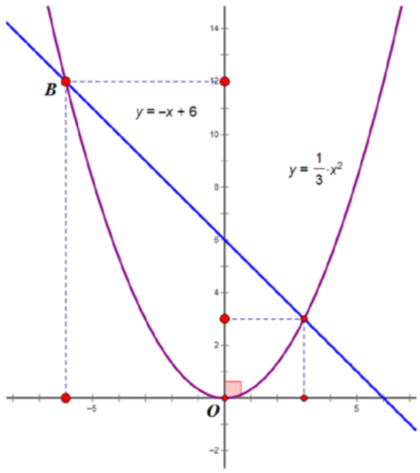
$\Leftrightarrow ax^2+x-5=0\ (*)$ với $(a\neq 0)$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow ax^2+x-5=0\ (*)$ có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ 1-4.a.(-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ 1+20a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{20}$$

Vậy, với $a=-\frac{1}{20}$ thì $(d): y=-x+5$ tiếp xúc với (P): $y=-\frac{1}{20}x^2$

Bài 2: Cho (P): $y=\frac{1}{3}x^2$ và (d): $y=-x+6$.



a. Hàm số $y=\frac{1}{3}x^2$ có đồ thị là parabol (P). Có đỉnh $O(0;0)$, có trục đối xứng là Oy, và đi qua các điểm sau:

x	-3	0	3
$y=\frac{1}{3}x^2$	3	0	3

Hàm số $y=-x+6$ có đồ thị là đường thẳng (d) đi qua các điểm $(0;6)$ và $(6;0)$.

b. Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại các điểm $(3;3)$ và $(-6;12)$.

Bài 3:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$-\frac{1}{2}x^2=x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=0 \text{ có } \Delta=1^2-4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=0$$

Do đó, phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép, hay đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P).

Khi đó, phương trình có nghiệm là: $x_1=x_2=-\dfrac{1}{2.\frac{1}{2}}=-1$ suy ra $y=-\frac{1}{2}$

Vậy, toạ độ tiếp điểm là $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$

III. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Dạng 1. Phương trình trùng phương: $ax^4+bx^2+c=0$ (1) *với* $(a\neq 0)$.

Phương pháp giải:

+ Đặt $t=x^2\,(t\geq 0)$.

+ Đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai ẩn (t) *là:*

$$at^2+bt+c=0(a\neq 0),(t\geq 0)\qquad (2)$$

+ Giải phương trình (2) *tìm* (t)*, loại các giá trị* $t<0$*, chỉ lấy các giá trị* $t\geq 0$

+ Với $t\geq 0, t=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{t}$ *là nghiệm của phương trình* (1).

Ví dụ 1: Giải phương trình $4x^4-x^2-18=0$

Giải:

Đặt $t=x^2$ *với điều kiện* $t\geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 4t^2-t-18=0(t\geq 0)$ $(*)$

$\Delta=1+4.4.18=289\Rightarrow\sqrt{\Delta}=17$

$t_1=\dfrac{1-17}{8}=-2<0$ *(loại);* $t_2=\dfrac{1+17}{8}=\dfrac{9}{4}>0$ *(nhận)*

Với $t_2=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{9}{4}}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\pm\dfrac{3}{2}$.

Dạng 2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Thực hiện các bước sau:

+ Tìm điều kiện xác định của phương trình

+ Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu

+ Giải phương trình vừa nhận được

+ Loại các giá trị không thỏa mãn điều kiện. Các giá trị thỏa mãn điều kiện là nghiệm của phương trình.

+ Kết luận.

$$\frac{x^2-3x+1}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$$

Quy đồng mẫu thức ta được: $PT \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+1}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}$

Khử mẫu ta được: $x^2-3x+1 = x-2 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1; x=3$.

Dạng 3. Phương trình tích

Phương trình tích là phương trình có dạng $A.B=0$.

Cách giải: $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $(3x^2-5x-2)(x^2-8)=0$

Giải:

Ta có: $(3x^2-5x-2)(x^2-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x^2-5x-2=0 & (1) \\ x^2-8=0 & (2) \end{array}\right.$

Giải phương trình $(1): 3x^2-5x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Giải phương trình $(2): x^2-8=0 \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\sqrt{2} \\ x=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $x_1=2; x_2=-\dfrac{1}{3}; x_3=2\sqrt{2}; x_4=-2\sqrt{2}$.

Dạng 4. Phương pháp đặt ẩn phụ để quy về giải phương trình bậc hai

Ví dụ 4: Giải phương trình: $3(x^2-3x)^2-4(x^2-3x+1)+5=0$

Giải:

Phương trình: $3(x^2-3x)^2-4(x^2-3x+1)+5=0$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-3x)^2-4(x^2-3x)+1=0$$

Đặt $t=(x^2-3x)$, *ta có phương trình:* $t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $t_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 3x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 3x - \frac{1}{3} = 0$.

Có nghiệm là: $x_3 = \frac{9+\sqrt{93}}{6}; x_4 = \frac{9-\sqrt{93}}{6}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $x_3 = \frac{9+\sqrt{93}}{6}$; $x_4 = \frac{9-\sqrt{93}}{6}$.

e. Dạng 5. Phương trình chứa căn thức

Dạng: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = \left[g(x)\right]^2 \end{cases}$

Dạng: $a.f(x) + b.\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \ge 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$

<u>*Ví dụ 5*</u>*: Giải phương trình:* $x^2 + 4x - 7 + \sqrt{x^2 + 4x - 1} = 0$

Giải:

Phương trình: $x^2 + 4x - 7 + \sqrt{x^2 + 4x - 1} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 + \sqrt{x^2 + 4x - 1} - 6 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4x - 1}\,(t \ge 0)$, *ta có phương trình:*

$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -3 \end{array}\right.$ *loại nghiệm* $t_2 = -3$ *vì không thỏa điều kiện,*

Với $t_1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x - 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 4$.

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x_1 = 1; x_2 = -5$

f. Dạng 6. Phương trình dạng $A^2 + B^2 = 0$

Phương pháp: $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

<u>*Ví dụ 6*</u>*: Giải phương trình:* $\left(x^2 - x\right)^2 + \left(x^2 - 3x + 2\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. $x(x-1)(x-2) - x^3 + 1 = 0$

b. $(x+6)^2 - 4x + 7 = 2(x+3)^2$

c. $\dfrac{x+3}{4} - 3 = \dfrac{(x+5)(x-2)}{3}$

d. $\dfrac{(x+5)^2}{2} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{(x-3)^2}{3}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$

b. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

c. $\dfrac{9}{2}x^4 + 4x^2 - \dfrac{1}{2} = 0$

d. $4x^2 - 29 + \dfrac{25}{x^2} = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a. $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$

b. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

c. $x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = 0$

d. $(2x^2 - 5x + 1)^2 - (x^2 - 5x + 6)^2 = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. Phương trình $x(x-1)(x-2) - x^3 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) - x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - x^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = 1$ và $x = -\dfrac{1}{3}$.

b. Phương trình $(x+6)^2 - 4x + 7 = 2(x+3)^2$

$\Leftrightarrow x^2+12x+36-4x+7=2\left(x^2+6x+9\right)$

$\Leftrightarrow x^2+12x+36-4x+7=2\left(x^2+6x+9\right)$

$\Leftrightarrow x^2+8x+43=2x^2+12x+18$

$\Leftrightarrow -x^2-4x+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2+\sqrt{29} \\ x=-2-\sqrt{29} \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-2-\sqrt{29}$ và $x=-2+\sqrt{29}$

c. Phương trình $\frac{x+3}{4}-3=\frac{(x+5)(x-2)}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{x+3-12}{4}=\frac{x^2-2x+5x-10}{3} \Leftrightarrow \frac{x-9}{4}=\frac{x^2+3x-10}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{3x-27}{12}=\frac{4x^2+12x-40}{12} \Leftrightarrow 3x-27=4x^2+12x-40$

$\Leftrightarrow 4x^2+9x-13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{13}{4} \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=1$ và $x=-\frac{13}{4}$

d. Phương trình $\frac{(x+5)^2}{2}-\frac{x}{3}=\frac{(x-3)^2}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x^2-6x+9}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x^2-6x+9}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2+30x+75-2x}{6}=\frac{2x^2-12x+18}{6}$

$\Leftrightarrow 3x^2+30x+75-2x=2x^2-12x+18$

$\Leftrightarrow x^2+40x+57=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-20+7\sqrt{7} \\ x=-20-7\sqrt{7} \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-20-7\sqrt{7}$ và $x=-20+7\sqrt{7}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. Phương trình $x^4-6x^2-7=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow t^2-6t-7=0$.

Ta thấy $a-b+c=1-(-6)+(-7)=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=-1$ (loại); $t=7$ (thỏa)

Với $t=7 \Rightarrow x^2=7 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm\sqrt{7}$.

b. Phương trình $x^4-5x^2+4=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow t^2-5t+4=0$.

Ta thấy $a+b+c=1+(-5)+4=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=1$ (thỏa); $t=-7$ (loại).

Với $t=1 \Rightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm 1$.

c. Phương trình $\frac{9}{2}x^4+4x^2-\frac{1}{2}=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\geq 0$.

Phương trình $\frac{9}{2}t^2+4t-\frac{1}{2}=0$

Ta thấy $a-b+c=\frac{9}{2}-4+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=-1$ (loại); $t=\frac{1}{9}$ (thỏa)

Với $t=\frac{1}{9} \Rightarrow x^2=\frac{1}{9} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{3}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm\frac{1}{3}$

d. Phương trình $4x^2-29+\frac{25}{x^2}=0$ có điều kiện: $x\neq 0$, ta có:

$$4x^2-29+\frac{25}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{4x^4-29x^2+25}{x^2}=0 \Leftrightarrow 4x^4-29x^2+25=0$$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t>0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 4t^2-29t+25=0$

Ta thấy $a+b+c=4+(-29)+25=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=1$ (thỏa); $t=\frac{25}{4}$ (thỏa)

Với $t=1\Rightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$

Với $t=\frac{25}{4}\Rightarrow x^2=\frac{25}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{5}{2}$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm là: $x=\pm 1$; $x=\pm\frac{5}{2}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a. Phương trình $x^3-5x^2-2x+10=0\Leftrightarrow x^2(x-5)-2(x-5)=0$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)(x-5)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=0 \\ x^2=2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Phương trình có ba nghiệm $x=\pm\sqrt{2}; x=5$.

b. Phương trình $x^3-3x^2-3x+1=0\Leftrightarrow (x^3+1)-(3x^2+3x)=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2-4x+1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm là $x=1; x=2-\sqrt{3}; x=2+\sqrt{3}$.

c. Phương trình $x^3-6x^2+6x-1=0\Leftrightarrow (x^3-1)-(6x^2-6x)=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)-6x(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-5x+1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm là: $x=1; x=\dfrac{5-\sqrt{29}}{2}; x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

d. Phương trình $\left(2x^2-5x+1\right)^2-\left(x^2-5x+6\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(2x^2-5x+1-x^2+5x-6\right)\left(2x^2-5x+1+x^2-5x+6\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-5\right)\left(3x^2-10x+7\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5=0 \\ 3x^2-10x+7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{5} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{7}{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm là: $x=-\sqrt{5}; x=1; x=\sqrt{5}; x=\dfrac{7}{3}$

B:HỆ PHƯƠNG TRÌNH

CHỦ ĐỀ 1: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

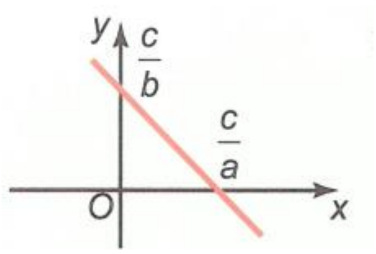
Phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm.

Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by=c$, $\left(a,b,c\in\mathbb{R};\ a^2+b^2=0\right)$

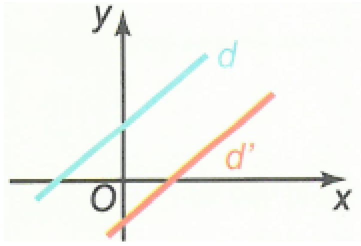
• *Công thức nghiệm tổng quát*

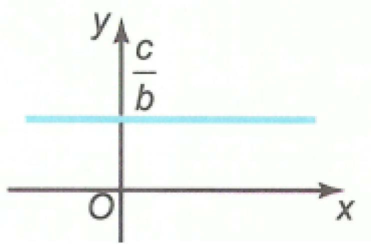
$$\left(x;\frac{c-ax}{b}\right),\ x\in\mathbb{R},\ b\neq 0 \ \text{ hoặc } \left(\frac{c-by}{a};y\right),\ y\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$$

• $a\neq 0;\ b\neq 0\Rightarrow$ Đường thẳng (d) là đồ thị hàm số $ax+by=c\left(cb>0;\ ca>0\right)$.

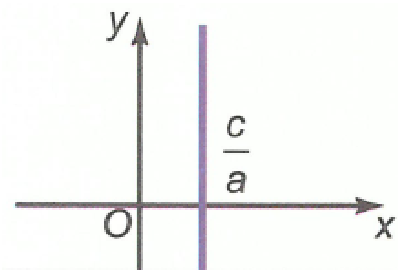


• $a=0;\ b\neq 0\Rightarrow$ Đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung $(cb>0)$.





• $a\neq 0;\ b=0\Rightarrow$ Đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành $(ca>0)$.



Hệ hai phương trình tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm

Hệ phương trình (HPT) bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \left(a,b,c,a',b',c'\in\mathbb{R};\ a^2+b^2\neq 0;\ a'^2+b'^2\neq 0\right)$

• *Số nghiệm của HPT*

Số nghiệm của hệ chính là số giao điểm của hai đường thẳng:

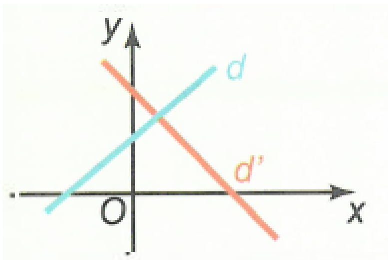
$(d): ax+by=c$

$(d'): a'x+b'y=c'$

• (d) cắt $(d')\Rightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$.

• $(d)\,//\,(d')\Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$.

• $(d)\equiv(d')\Rightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$.



1. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn không chứa hàm số

• *Phương pháp giải:*

- Phương pháp cộng đại số

Bước 1: Nhân hai vế của phương trình trong hệ với một hệ số thích hợp.

Bước 2: Cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình để được phương trình chỉ còn x hoặc y.

Bước 3: Giải tìm x, y.

Bước 4: Kết luận.

- Phương pháp thế:

Bước 1: Từ một phương trình của hệ rút x theo y hoặc y theo x.

Bước 2: Thế vào phương trình còn lại.

Bước 3: Giải hệ phương trình mới.

Bước 4: Kết luận.

- Phương pháp đặt ẩn phụ:

Bước 1: Đặt điều kiện của phương trình.

Bước 2: Đặt ẩn phụ, điều kiện của ẩn phụ. Đưa hệ ban đầu về hệ mới.

Bước 3: Giải hệ mới tìm ẩn phụ.

Bước 4: Thay giá trị vào ẩn phụ tìm x và y.

Bước 5: Kết luận.

** Nếu hệ phương trình có biểu thức chứa căn hoặc phân thức chứa x và y thì phải có điều kiện xác định của hệ.*

• *Bài tập mẫu*

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2x+y=8 \end{cases}$.

(Đề thi vào lớp 10 tỉnh Bình Phước năm 2017 – 2018).

Giải chi tiết

$$\begin{cases} 3x-2y=5 & (1) \\ 2x+y=8 & (2) \end{cases}$$

Cách 1: Giải bằng phương pháp cộng đại số

Nhận xét: Bằng phương pháp cộng đại số, bài toán có hai hướng làm:

• Để hệ số x bằng nhau ta nhân hai vế của (1) với 2, nhân hai vế của (2) với 3.

• Để hệ số y bằng nhau đối nhau ta nhân hai vế của (2) với 2.

Ở bài này, làm theo hướng 2:

$$\begin{cases}3x-2y=5\\2x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5\\4x+2y=16\end{cases}.$$

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình ta có: $7x=21\Leftrightarrow x=3$.

Thay vào phương trình (2) ta được: $6+y=8\Leftrightarrow y=2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(3;2)$.

Cách 2: Giải bằng phương pháp thế

Nhận xét: Ta nên rút y theo x ở phương trình hai của hệ, vì hệ số của y là 1.

Ta có: $(2)\Leftrightarrow y=8-2x$.

Thay $y=8-2x$ vào (1) ta được: $3x-2(8-2x)=5\Leftrightarrow 7x-16=5\Leftrightarrow 7x=21\Leftrightarrow x=3$.

Với $x=3$ thì $y=8-2.3=2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(3;2)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}3x-2(2y-1)=0\\3x+2y=2(7-x)\end{cases}$.

Giải chi tiết

Nhận xét: Hệ phương trình chưa có dạng bậc nhất hai ẩn nên bước đầu tiên chúng ta rút gọn các phương trình của hệ đưa về phương trình bậc nhất hai ẩn.

$$\begin{cases}3x-2(2y-1)=0\\3x+2y=2(7-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=-2\\3x+2y+2x=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=-2\\5x+2y=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=-2\\10x+4y=28\end{cases}.$$

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình ta có: $13x=26\Leftrightarrow x=2$.

Thay $x=2$ vào phương trình thứ hai: $5.2+2y=14\Leftrightarrow y=2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(2;2)$.

** Ta cũng có thể dùng phương pháp thế để giải hệ phương trình.*

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)x-y=\sqrt{2} & (1)\\x+\left(\sqrt{2}+1\right)y=1 & (2)\end{cases}$.

Giải chi tiết

Nhân cả hai vế của (1) với $\left(\sqrt{2}+1\right)$ ta được:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)x-y=\sqrt{2}\\ x+\left(\sqrt{2}+1\right)y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)x-\left(\sqrt{2}+1\right)y=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\\ x+\left(\sqrt{2}+1\right)y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\left(\sqrt{2}+1\right)y=2+\sqrt{2}\\ x+\left(\sqrt{2}+1\right)y=1\end{cases}$$

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình ta có: $2x=3+\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$.

Thay $x=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$ vào (1): $\left(\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)-y=\sqrt{2}\Leftrightarrow y=\left(\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{3+\sqrt{2}}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)+(x+2y)=-2\\ 3(x+y)+(x-2y)=1\end{cases}$.

Giải chi tiết

$$\begin{cases}(x+y)+(x+2y)=-2\\ 3(x+y)+(x-2y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+x+y+2y=-2\\ 3x+x+3y-2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=-2 & (1)\\ 4x+y=1 & (2)\end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow y=1-4x$.

Thay $y=1-4x$ vào (1) ta được: $2x+3(1-4x)=-2\Leftrightarrow 10x=5\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Với $x=\dfrac{1}{2}$ thì $y=1-4.\dfrac{1}{2}=-1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x(y+5)+2y=xy+9\\ (3x+1)(2y-1)=6xy\end{cases}$.

Giải chi tiết

$$\begin{cases}x(y+5)+2y=xy+9\\ (3x+1)(2y-1)=6xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+5x+2y=xy+9\\ 6xy-3x+2y-1=6xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+2y=9 & (1)\\ -3x+2y=1 & (2)\end{cases}.$$

Trừ các vế tương ứng của hai phương trình ta có: $8x=8\Leftrightarrow x=1$.

Thay $x=1$ vào phương trình thứ nhất: $5.1+2y=9\Leftrightarrow y=2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;2)$.

** Hệ phương trình chưa có dạng bậc nhất hai ẩn nên bước đầu tiên chúng ta rút gọn các phương trình của hệ đưa về phương trình bậc nhất hai ẩn. Rút gọn xy ở cả hai vế của hai phương trình.*

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x-|y+2|=3 \\ x+2|y+2|=3 \end{cases}$ (I).

(Đề thi vào lớp 10 Thành phố Hà Nội năm 2018 – 2019)

Giải chi tiết

Đặt $t=|y+2|$ (điều kiện: $t \ge 0$)

Ta có hệ: $\begin{cases} 4x-t=3 \\ x+2t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-2t=6 \\ x+2t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x=9 \\ x+2t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ t=1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Với $t=1$ thì $|y+2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+2=1 \\ y+2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-3 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1;-1),(1;-3)$.

** Vì cả hai phương trình đều có $|y+2|$ nên ta sẽ sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Hệ phương trình có trị tuyệt đối nên ta có thể chia hai trường hợp để phá dấu trị tuyệt đối để được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (nhưng cách này sẽ dài hơn cách đặt ẩn phụ).*

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1}-3\sqrt{y+2}=2 \\ 2\sqrt{x-1}+5\sqrt{y+2}=15 \end{cases}$.

Giải chi tiết

Điều kiện xác định: $x \ge 1;\ y \ge -2$.

Đặt $a=\sqrt{x-1};\ b=\sqrt{y+2}\,(a \ge 0;\ b \ge 0)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} a-3b=2 \\ 2a+5b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-6b=4 \\ 2a+5b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11b=11 \\ a-3b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=5 \end{cases}$ (thỏa mãn).

$\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=5 \\ \sqrt{y+2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=25 \\ y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=26 \\ y=-1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(26;-1)$.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{|x+3|}+\dfrac{4}{|y|-2}=\dfrac{11}{6} \\ \dfrac{5}{|x+3|}-\dfrac{2}{|y|-2}=\dfrac{11}{6} \end{cases}$.

Giải chi tiết

Điều kiện xác định: $x \neq -3;\ y \neq \pm 2$.

Đặt $a = \dfrac{1}{|x+3|};\ b = \dfrac{2}{|y|-2}\left(a > 0;\ b > 0\right)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} 2 + 2b = \dfrac{11}{6} \\ 5a - b = \dfrac{11}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = \dfrac{11}{6} \\ 10a - 2b = \dfrac{22}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11a = \dfrac{11}{2} \\ a + 2b = \dfrac{11}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ 2b = \dfrac{11}{6} - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ (thỏa mãn).

$$a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x+3| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 = 2 \\ x + 3 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5 \end{array}\right.$$

$$b = \frac{2}{3} \Leftrightarrow |y| - 2 = 3 \Leftrightarrow |y| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 5 \\ y = -5 \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-1;5),(-1;-5),(-5;5),(-5;-5)$.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x-y}} - \dfrac{21}{x+y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2x-y}} + \dfrac{7-x-y}{x+y} = 1 \end{cases}$.

(Đề thi thử vào lớp 10 trường THCS&THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội năm 2018 – 2019)

Giải chi tiết

Nhận xét: Cả hai phương trình đều có $\dfrac{1}{\sqrt{2x-y}}$ nên đặt được ẩn phụ.

Ta biến đổi: $\dfrac{7-x-y}{x+y} = \dfrac{7-(x+y)}{x+y} = \dfrac{7}{x+y} - 1$. Vậy đặt $\dfrac{7}{x+y} = b,\ \dfrac{1}{\sqrt{2x-y}} = a$.

Điều kiện xác định: $2x > y$ và $x \neq -y$.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x-y}} - \dfrac{21}{x+y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2x-y}} + \dfrac{7-x-y}{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x-y}} - \dfrac{21}{x+y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2x-y}} + \dfrac{7-(x+y)}{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x-y}} - \dfrac{21}{x+y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2x-y}} + \dfrac{7}{x+y} - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x-y}} - \dfrac{21}{x+y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2x-y}} + \dfrac{7}{x+y} = 2 \end{cases}$$

Đặt $a = \dfrac{1}{\sqrt{2x-y}};\ b = \dfrac{7}{x+y},\ (a > 0)$.

Ta có hệ: $\begin{cases}4a-3b=\dfrac{1}{2}\\3a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a-3b=\dfrac{1}{2}\\9a+3b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13a=\dfrac{13}{2}\\3a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{3}{2}+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (thỏa mãn).

$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2x-y}}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{7}{x+y}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=4\\x+y=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=18\\y=14-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=8\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(6;8)$.

Dạng 2: Hệ phương trình chứa tham số

• Phương pháp giải

$$\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$$

Cách 1: Tìm $(x;y)$ theo *m*, rồi tìm điều kiện của *m*.

Cách 2: + Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$

+ Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

+ Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$.

• Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases}x-my=2\\mx+2y=1\end{cases}$. Tìm điều kiện của *m* để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải chi tiết

Với $m=0$ thì hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$, hệ có nghiệm.

Với $m\neq0$. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow\dfrac{1}{m}\neq\dfrac{-m}{2}\Leftrightarrow-m^2\neq2\Leftrightarrow m^2\neq-2$ (luôn đúng).

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi *m*.

** Khi lập tỉ số $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$ nếu a' hoặc b' có tham số m thì ta phải xét thêm trường hợp $a'=0$ hoặc $b'=0$.*

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-2y=2m \\ -2x+y=m+1 \end{cases}$. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó.

Giải chi tiết

Hệ $\begin{cases} mx-2y=2m & (1) \\ -2x+y=m+1 & (2) \end{cases}$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{m}{-2} \neq \dfrac{-2}{1} \Leftrightarrow m \neq 4$.

Từ phương trình (2) ta có: $y=2x+m+1$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$mx-2(2x+m+1)=2m \Leftrightarrow (m-4)x=4m+2 \Leftrightarrow x=\frac{4m+2}{m-4},(m\neq 4)$$

$$\Rightarrow y=2.\left(\frac{4m+2}{m-4}\right)+m+1=\frac{m^2+5m}{m-4}.$$

Vậy với $m\neq 4$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=\left(\dfrac{4m+2}{m-4};\dfrac{m^2+5m}{m-4}\right)$.

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x-y=2m+3 \\ x+2y=3m+1 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình với $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2=5$.

Giải chi tiết

a) Với $m=2$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 3x-y=7 \\ x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=14 \\ x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=21 \\ 3x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy với $m=2$ hệ phương trình có nghiệm là $(3;2)$.

b) Vì $\dfrac{3}{1}\neq\dfrac{-1}{2}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$.

$$\begin{cases} 3x-y=2m+3 \\ x+2y=3m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=4m+6 \\ x+2y=3m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=7m+7 \\ 3x-y=2m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m+1 \\ y=3(m+1)-2m-3=m \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(m+1;m)$.

Theo đề bài, ta có: $x^2+y^2=5$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2+m^2=5 \Leftrightarrow 2m^2+2m-4=0 \Leftrightarrow 2(m-1)(m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right..$$

Vậy $m=1$ hoặc $m=-2$ thì phương trình có nghiệm thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+ay=3a \\ -ax+y=2-a^2 \end{cases}$ *(I)* (*a* là tham số).

a) Giải hệ phương trình với $a=1$.

b) Tìm *a* để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $\dfrac{2y}{x^2+3}$ là số nguyên.

(Đề thi vào lớp 10 môn Toán tỉnh Lào Cao năm 2018 – 2019)

Giải chi tiết

a) Với $a=1$, ta có hệ: $\begin{cases} x+y=3 \\ -x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4 \\ x=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$

Vậy với $a=1$ hệ phương trình có nghiệm là $(1;2)$.

b) Với $a=0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$, hệ có nghiệm.

Với $a \neq 0$. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{-a} \neq \dfrac{a}{1} \Leftrightarrow -a^2 \neq 1 \Leftrightarrow a^2 \neq -1$ (luôn đúng).

Hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi *a*.

$$\begin{cases} x+ay=3a \\ -ax+y=2-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-ay \\ -a(3a-ay)+y=2-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-ay \\ (a^2+1)y=2a^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=a \end{cases}.$$

(Vì $a^2+1>0$ nên rút gọn được ta có $y=2$).

Hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)=(a;2)$.

Xét: $A=\dfrac{2y}{x^2+3}=\dfrac{4}{a^2+3}$

Ta có: $a^2+3 \geq 3,\ \forall a \Rightarrow \dfrac{4}{a^2+3} \leq \dfrac{4}{3},\ \forall a \Rightarrow 0<A \leq \dfrac{4}{3}$.

Mà theo đề bài để $A \in \mathbb{Z}$ thì $A=1 \Rightarrow a^2+3=4 \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

Vậy $a=1$ hoặc $a=-1$ thỏa mãn đề bài.

Lưu ý: Đối với bài toán tìm *a* để biểu thức *A* nhận giá trị nguyên thì ta đi tìm khoảng giá trị của biểu thức *A*, tìm các giá trị nguyên của *A* trong khoảng này rồi thay vào tìm *a*. Phân biệt với bài toán tìm *a* là số nguyên để *A* nhận giá trị nguyên thì khi đó mới có $a^2+3 \in Ư(4)$.

Ví dụ 5: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 3 - m \\ x - my = 2m \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Khi đó, hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

Giải chi tiết

Với $m = 0$, ta có hệ: $\begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases}$. Hệ có nghiệm duy nhất.

Với $m \neq 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{m}{1} \neq \frac{-1}{-m} \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Vậy với $m \neq \pm 1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} mx - y = 3 - m \\ x - my = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + m - 3 \\ x - m\left(mx + m - 3\right) = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + m - 3 \\ \left(1 - m^2\right)x = m^2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{m}{m+1} \\ y = \dfrac{-m^2}{m+1} + m - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{m}{m+1} \\ y = \dfrac{-2m-3}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \dfrac{1}{m+1} \\ y = -2 - \dfrac{1}{m+1} \end{cases}.$$

Cộng hai vế của hai phương trình ta khử được tham số m. Hệ thức cần tìm là $x + y = -3$.

2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$ *(Đề thi vào lớp 10 tỉnh Bắc Giang năm 2018 – 2019).*

2) $\begin{cases} 9x + y = 11 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$ *(Đề thi vào lớp 10 tỉnh Bình Dương năm 2018 – 2019).*

Câu 2: Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$ *(Đề thi vào lớp 10 TP Hà Nội năm 2017 – 2018).*

2) $\begin{cases} 3x + \sqrt{y+6} = 11 \\ 5x - \sqrt{y+6} = 13 \end{cases}$ *(Đề thi vào lớp 10 TP Hà Nội năm 2017 – 2018).*

Câu 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x = 2 \\ mx + y = m^2 + 3 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để $x + y$ nhỏ nhất.

(Đề thi vào lớp 10 tỉnh Lào Cai năm 2017 – 2018)

Gợi ý giải

Câu 1:

1) Nghiệm của hệ phương trình là $(4;1)$.

2) Nghiệm của hệ phương trình là $(1;2)$.

Câu 2:

1) Điều kiện: $x \ge 0;\ y \ge 1$

Đặt $a = \sqrt{x};\ b = \sqrt{y-1}\,(a \ge 0;\ b \ge 0)$

Ta có hệ: $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ 4a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

2) Điều kiện: $y \ge -6$

Đặt $b = \sqrt{y+6}\,(b \ge 0)$

Ta có hệ: $\begin{cases} 3x + b = 11 \\ 5x - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Nghiệm của hệ phương trình là: $(3;-2)$.

Câu 3:

$$\begin{cases} x = 2 \\ mx + y = m^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2m + y = m^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = m^2 - 2m + 3 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm với mọi *m*.

Ta có: $A = x + y = m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4$

$\Rightarrow A \ge 4, \forall m$.

Giá trị nhỏ nhất của $x + y$ là 4 đạt được khi $m = 1$.

CHỦ ĐỀ 2: MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ HỆ BẬC NHẤT

Dạng 1: Hệ phương trình đối xứng loại I

Phương pháp giải

Hệ phương trình đối xứng loại I theo ẩn *x* và *y* là hệ phương trình mà khi ta đổi vai trò của các ẩn *x* và *y* thì hệ phương trình vẫn không thay đổi.

Hệ phương trình đối xứng loại I có dạng $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$, trong đó $\begin{cases} f(x,y) = f(y,x) \\ g(x,y) = g(y,x) \end{cases}$.

Bước 1: Đặt $S = x + y;\ P = xy$. Điều kiện: $S^2 \ge 4P$.

Bước 2: Biến đổi hệ phương trình có hai ẩn *S*, *P* giải ra *S* và *P* (sử dụng phương pháp thế hoặc cộng đại số).

Bước 3: Tìm được *S* và *P*, khi đó *x* và *y* là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2 - SX + P = 0$$

Giải phương trình bậc hai theo ẩn *X*.

Bước 4: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Chú ý: Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình.

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Giải chi tiết

Ý tưởng: Biến đổi phương trình (1) về tổng và tích của *x* và *y*.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy + xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y;\ P = xy$. Điều kiện: $S^2 \geq 4P$.

Ta có hệ: $\begin{cases} S^2 - P = 3 \\ S = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ 4 - P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

x và *y* là nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X-1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1;1)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ (x+1)(y+1) = 8 \end{cases}$.

Giải chi tiết

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ (x+1)(y+1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 10 \\ xy + x + y + 1 = 8 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y;\ P = xy$. Điều kiện: $S^2 \geq 4P$.

Ta có hệ: $\begin{cases} S^2 - 2P = 10 \\ P + S + 1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 10 \\ P = 7 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2(7-S) = 10 \\ P = 7 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S - 24 = 0 \\ P = 7 - S \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S = -6 \\ P = 13 \end{cases}$.

Mà $S^2 \ge 4P \Rightarrow S = 4,\ P = 3$ thỏa mãn.

Khi đó, x và y là nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 3 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1;3),(3;1)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + 4\sqrt{xy} = 16 \\ x + y = 10 \end{cases}$.

Giải chi tiết

Điều kiện xác định: $x \ge 0;\ y \ge 0$.

Đặt $S = \sqrt{x} + \sqrt{y};\ P = \sqrt{xy}$. Điều kiện: $S^2 \ge 4P$ và $S \ge 0; P \ge 0$.

Ta có hệ: $\begin{cases} S + 4P = 16 \\ S^2 - 2P = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + 4P = 16 \\ 2S^2 - 4P = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + 4P = 16 \\ 2S^2 + S - 36 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases} \text{(thỏa mãn) hoặc } \begin{cases} S = -\dfrac{9}{2} \\ P = \dfrac{41}{8} \end{cases} \text{(loại).}$$

Khi đó $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$ là nghiệm của phương trình bậc hai.

$$X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 3 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1;9),(9;1)$.

Dạng 2: Hệ phương trình đối xứng loại II

Phương pháp giải

Hệ phương trình đối xứng loại II theo ẩn x và y là hệ phương trình mà khi ta đổi vai trò của các ẩn x và y thì hai phương trình trong hệ sẽ hoán đổi cho nhau.

Hệ phương trình đối xứng loại II có dạng $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ f(y,x) = 0 \end{cases}$.

Bước 1: Cộng hoặc trừ hai vế của hai hệ phương trình thu được phương trình. Biến đổi phương trình này về phương trình tích, tìm biểu thức liên hệ giữa x và y đơn giản.

Bước 2: Thế x theo y (hoặc y theo x) vào một trong hai phương trình của hệ ban đầu.

Bước 3: Giải và tìm ra nghiệm x (hoặc y). Từ đó suy ra nghiệm còn lại.

Bước 4: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-3x=-2y & (1) \\ y^2-3y=-2x & (2) \end{cases}$.

Giải chi tiết

Trừ từng vế của hai phương trình ta được:

$$x^2-y^2-3x+3y=-2y+2x \Leftrightarrow (x-y)(x+y)-5(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=5-y \end{array}\right.$$

Với $x=y$ thay vào (1) ta được: $y^2-y=0 \Leftrightarrow y(y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=0 \\ y=1 \Rightarrow x=1 \end{array}\right.$.

Với $x=5-y$ thay vào (1) ta được: $\begin{array}{l} y^2-3y=-2(5-y) \Leftrightarrow y^2-3y=-10+2y \\ \Leftrightarrow y^2-5y+10=0 \end{array}$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y) \in \{(0;0),(1;1)\}$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2x=y & (1) \\ y^3+2y=x & (2) \end{cases}$.

Giải chi tiết

Trừ từng vế của hai phương trình ta được:

$$x^3-y^3+3x-3y=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+y^2+xy+3=0\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+3\right]=0 \Leftrightarrow y=x$$

Với $y=x$ thay vào (1) ta được: $x^3+x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;0)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x=\dfrac{x^2+2}{y^2} \\ 3y=\dfrac{y^2+2}{x^2} \end{cases}$.

Giải chi tiết

Vì vế phải của mỗi phương trình đều dương nên ta có $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \\ 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy^2 = x^2+2 \quad (1) \\ 3yx^2 = y^2+2 \quad (2) \end{cases}$.

Trừ từng vế của hai phương trình (1) và (2) ta được:

$3xy^2 - 3yx^2 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow 3xy(y-x) = (x-y)(x+y) \Leftrightarrow (x-y)(3xy+x+y) = 0$

Vì $x>0, y>0 \Rightarrow 3xy+x+y>0$

$\Rightarrow x = y$.

Với $x=y$ thay vào (1) ta được: $3x^3 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+2) = 0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;1)$.

Dạng 3: Một số hệ phương trình khác

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=-m^2+6 \end{cases}$ (m là tham số).

Hãy tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ sao cho biểu thức $A = xy + 2(x+y)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

(Trích đề thi vào 10 tỉnh Cao Bằng năm 2017 – 2018)

Giải chi tiết

Nhận xét: $\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=-m^2+6 \end{cases}$ là hệ phương trình đối xứng loại 1.

Đặt $S = x+y;\ P = xy$. Điều kiện: $S^2 \ge 4P$.

$\Rightarrow x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$.

Ta có hệ: $\begin{cases} S=m \\ S^2-2P=-m^2+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=m \\ P=m^2-3 \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ khi và chỉ khi

$S^2 \ge 4P \Leftrightarrow m^2 \ge 4m^2 - 12 \Leftrightarrow 3m^2 \le 12 \Leftrightarrow m^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$.

Ta có: $A = xy + 2(x+y) = m^2 - 3 + 2m = m^2 + 2m + 1 - 4 = (m+1)^2 - 4$.

Vì $-2 \le m \le 2 \Leftrightarrow -1 \le m+1 \le 3 \Leftrightarrow 0 \le (m+1)^2 \le 9$

$\Rightarrow -4 \le A \le 5$.

Giá trị nhỏ nhất của A là -4 đạt được khi $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức $M=a^2+b^2$ biết *a, b* thỏa mãn: $\begin{cases} \dfrac{3a^2}{b^2}+\dfrac{1}{b^3}=1 \\ \dfrac{3b^2}{a^2}+\dfrac{2}{a^3}=1 \end{cases}$.

(Trích đề thi vào 10 tỉnh Quảng Ninh năm 2017 – 2018)

Giải chi tiết

Điều kiện xác định: $a \neq 0;\ b \neq 0$.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{3a^2}{b^2}+\dfrac{1}{b^3}=1 \\ \dfrac{3b^2}{a^2}+\dfrac{1}{a^3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2b+1=b^3 \\ 3ab^2+2=a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3-3a^2b=1 \\ a^3-3ab^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(b^3-3a^2b\right)^2=1 \\ \left(a^3-3ab^2\right)^2=4 \end{cases}$

Cộng từng vế của hai phương trình ta được:

$$\left(b^6-6a^2b^4+9a^4b^2\right)+\left(a^6-6a^4b^2+9a^2b^4\right)=5$$

$$\Leftrightarrow b^6+3a^2b^4+3a^4b^2+a^6=5 \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^3=5$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=\sqrt[3]{5}$$

Vậy $M=\sqrt[3]{5}$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y=xy+5 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+1}=1 \end{cases}$.

(Trích đề thi vào 10 tỉnh Nam Định năm 2017 – 2018)

Giải chi tiết

Điều kiện xác định: $x \neq 0$ và $y \neq -1$.

$$\begin{cases} 2x+3y=xy+5 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=xy+5 \\ y+1+x=x(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2x+3y-5 & (1) \\ xy=y+1 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế của hai phương trình ta có: $2x+2y-6=0 \Leftrightarrow x=3-y$

Thay $x=3-y$ vào phương trình (2) ta được:

$$(3-y)y=y+1 \Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=1$$

$$\Rightarrow x=2$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2;1)$.

2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=x^2 \\ 2y+x=y^2 \end{cases}$.

Câu 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3=2y+x \\ y^3=2x+y \end{cases}$.

Câu 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ x^2y+xy^2=2 \end{cases}$.

Gợi ý giải

Câu 1:

Hệ phương trình đối xứng loại II, trừ từng vế của hai phương trình ta được

$$(x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=1-y \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;0),(3;3),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 2:

Hệ phương trình đối xứng loại II, trừ từng vế của hai phương trình ta được

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x=y$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;0),\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$.

Câu 3:

Hệ phương trình đối xứng loại I.

Đặt $S=x+y;P=xy$ (điều kiện: $S^2\geq 4P$), ta được

$$\begin{cases} P+S=3 \\ S.P=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=1;P=2 \\ S=2;P=1 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow S=2;P=1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;1)$.