

▮ BÀI GIẢNG 2 : BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG



LÝ THUYẾT



✎ Memorize :

✎ Lý thuyết bài giảng :



LÀM

Câu 286: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính góc giữa hai vectơ a và b trong các trường hợp sau:

Câu 289: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(1;3), N(4;2)$

a) Tính độ dài các đoạn thẳng OM, ON, MN .

b) Chứng minh rằng tam giác OMN vuông cân.

 **Lời giải :**

Câu 290: Cho tam giác $A(5;-1), B(-1;3)$

a) Tìm trên trục tung điểm P sao cho $\angle APB = 90^\circ$

b) Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất.

 **Lời giải :**



MÓN QUÀ

Câu 291: Tính góc xen giữa hai vector a và b trong các trường hợp sau:

- a) $a = (2; -3), b = (6; 4)$
- b) $a = (3; 2); b = (5; -1)$
- c) $a = (-2; -2\sqrt{3}), b = (3; \sqrt{3})$

Lời giải

$$\text{a) } \cos(a, b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 6 + (-3) \cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{6^2 + 4^2}} = 0 \Rightarrow (a, b) = 90^\circ$$

$$\text{b) } \cos(a, b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 5 + (2) \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (a, b) = 45^\circ$$

$$\text{c) } \cos(a, b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(-2) \cdot 3 + (-2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (a, b) = 150^\circ$$

Câu 292: Cho hai vector $a = (3; 4), b = (-1; 5)$.

- a) Tìm tọa độ của vector: $a + b, a - b, 10a, -2b$

b) Tính các tích vô hướng: $a \cdot b, (-2a) \cdot (5b)$.

Lời giải

a) Ta có:

$$a + b = (3 + (-1); 4 + 5) = (2; 9); \quad a - b = (3 - (-1); 4 - 5) = (4; -1);$$

$$10a = (10 \cdot 3; 10 \cdot 4) = (30; 40); \quad -2b = (-2 \cdot (-1); -2 \cdot 5) = (2; -10).$$

b) Ta có:

$$a \cdot b = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 = -3 + 20 = 17$$

$$-2a = (-6; -8) \text{ và } 5b = (-5; 25) \text{ nên } (-2a) \cdot (5b) = (-6) \cdot (-5) + (-8) \cdot 25 = 30 - 200 = -170.$$

Câu 293: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; 3), B(4; 5), C(2; -3)$. Giải tam giác ABC (làm tròn các kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$\text{- Ta có: } AB = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,$$

$$BC = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8,$$

$$AC = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7.$$

$$\text{- Ta có: } \overrightarrow{AB} = (6; 2), \overrightarrow{AC} = (4; -6) \text{ nên } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \cdot 4 + 2 \cdot (-6) = 12.$$

$$\cos \angle BAC = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{12}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{130}}{130}.$$

Suy ra

$$\text{Vậy } \angle BAC \approx 75^\circ.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} = (-6; -2), \overrightarrow{BC} = (-2; -8) \text{ nên}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-6) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-8) = 28$$

$$\cos \angle ABC = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{28}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{17}} = \frac{7\sqrt{170}}{170}.$$

Suy ra

$$\text{Vậy } \angle ABC \approx 58^\circ.$$

$$\text{Suy ra ta có: } \angle ACB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC) \approx 180^\circ - (75^\circ + 58^\circ) = 47^\circ.$$

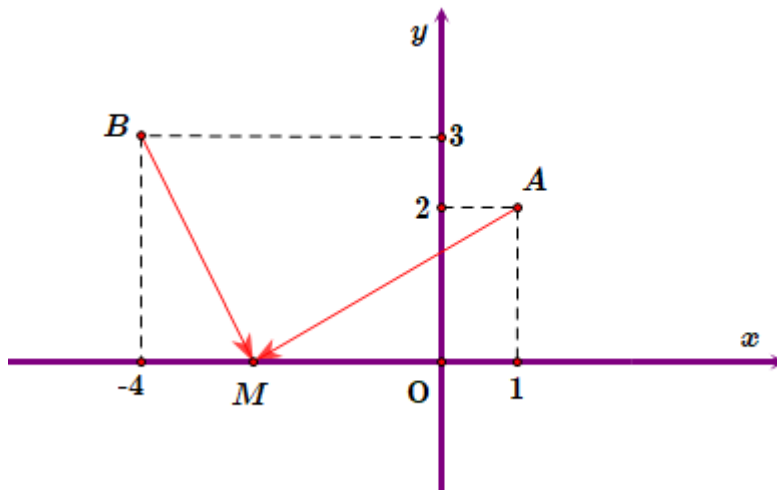
Câu 294: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2), B(-4; 3)$. Gọi $M(t; 0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ theo t .

b) Tính t để $\angle AMB = 90^\circ$

Lời giải

a)



Ta có: $A(1; 2)$, $B(-4; 3)$ và $M(t; 0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (t-1; -2), \overrightarrow{BM} = (t+4; -3)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (t-1)(t+4) + (-2)(-3) = t^2 + 3t + 2$$

b)

Để $\angle AMB = 90^\circ$ hay $AM \perp BM$ thì $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Vậy $t = -1$ hoặc $t = -2$ thì $\angle AMB = 90^\circ$

Câu 295: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 3)$ và $B(7; 1)$.

a) Tính chu vi của tam giác OAB .

b) Chứng minh rằng OA vuông góc với AB . Tính diện tích của tam giác OAB .

c) Gọi M là trung điểm của AB . Tính số đo góc $\angle BOM$.

Lời giải

a) Do $A(1; 3)$ và $B(7; 1)$ suy ra

$$OA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}; OB = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}; AB = \sqrt{(7-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{40}.$$

Suy ra chu vi của tam giác OAB bằng

$$OA + AB + OB = \sqrt{10} + \sqrt{50} + \sqrt{40} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{10}.$$

b) Theo kết quả của phần a), ta có $OA^2 + AB^2 = 10 + 40 = 50 = OB^2$. Từ đó, theo định lý Pythagore tam giác OAB vuông tại A , hay $OA \perp AB$.

Suy ra diện tích tam giác OAB bằng $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = 10$ (đ.v.d.t).

c) Do M là trung điểm của AB nên $M(4;2)$. Suy ra $OM = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ và do đó

$$\cos(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OM}|} = \frac{7 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{20}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Suy ra $0^\circ < (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}) < 90^\circ$ và do đó $\widehat{BOM} = (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}) \approx 18^\circ 26' 6''$.

Nhận xét. Ta có thể chứng minh được OA vuông góc với AB nhờ vào tích vô hướng, mà không cần phải tính độ dài của các đoạn thẳng như sau:

Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{OA} = (1; 3), \overrightarrow{AB} = (6; -2)$.

Suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) = 0$

Từ đó, do các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ đều khác 0 , suy ra $OA \perp AB$.

Một cách khái quát, để chứng minh hai đường thẳng MN và PQ vuông góc với nhau, ta chứng minh $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$.



Câu 296: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tính góc giữa hai vectơ a và b trong mỗi trường hợp sau:

a) $a = (-3; 1), b = (2; 6)$

b) $a = (3; 1), b = (2; 4)$

c) $a = (-\sqrt{2}; 1), b = (2; -\sqrt{2})$

Lời giải

a)

$$a \cdot b = (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 0 \Rightarrow a \perp b \text{ hay } (a, b) = 90^\circ$$

b)

$$\begin{cases} a \cdot b = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 10 \\ |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}; |\vec{b}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (a, b) = 45^\circ$$

c) Dễ thấy: a và b cùng phương do $\frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{-\sqrt{2}}$

Hơn nữa: $b = (2; -\sqrt{2}) = -\sqrt{2} (-\sqrt{2}; 1) = -\sqrt{2} \cdot a; -\sqrt{2} < 0$

Do đó: a và b ngược hướng.

$$\Rightarrow (a, b) = 180^\circ$$

Câu 297: Cho hai vector $a = (1; 5), b = (4; -2)$.

a) Tìm tọa độ của các vector $a + b, a - b, 3a, -5b$.

b) Tính các tích vô hướng $a \cdot b, (3a) \cdot (-b)$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (1+4; 5+(-2)) = (5; 3); & \vec{a} - \vec{b} &= (1-4; 5-(-2)) = (-3; 7) \\ 3\vec{a} &= (3 \cdot 1; 3 \cdot 5) = (3; 15); & -5\vec{b} &= (-5 \cdot 4; -5 \cdot (-2)) = (-20; 10) \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) = 4 - 10 = -6; \\ \vec{a} &= (3; 15); \quad \vec{b} = (-4; 2) \\ \Rightarrow (3\vec{a}) \cdot (-\vec{b}) &= 3 \cdot (-4) + 15 \cdot 2 = -12 + 30 = 18 \end{aligned}$$

Câu 298: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4; 1), B(2; 4), C(2; -2)$

a) Giải tam giác

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{cases} \overline{AB} = (2 - (-4); 4 - 1) = (6; 3) \\ \overline{BC} = (2 - 2; -2 - 4) = (0; -6) \\ \overline{AC} = (2 - (-4); -2 - 1) = (6; -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = |\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \\ BC = |\overline{BC}| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6 \\ AC = |\overline{AC}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5} \end{cases}$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC , ta có:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(3\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 - (6)^2}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{A} \approx 53,13^\circ$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(6)^2 + (3\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{5})^2}{2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{B} \approx 63,435^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} \approx 63,435^\circ$$

Vậy tam giác ABC có: $a=6; b=3\sqrt{5}; c=3\sqrt{5}$;

$$\hat{A} \approx 53,13^\circ; \hat{B} = \hat{C} \approx 63,435^\circ.$$

b)

Gọi H có tọa độ $(x; y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} = (x - (-4); y - 1) = (x + 4; y - 1) \\ \overrightarrow{BH} = (x - 2; y - 4) \end{cases}$$

Lại có: H là trực tâm tam giác ABC

$$\Rightarrow AH \perp BC \text{ và } BH \perp AC$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 0$$

$$\text{Và } (\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AC}) = 90^\circ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ và } \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\text{Mà: } \overrightarrow{BC} = (0; -6)$$

$$\Rightarrow (x+4) \cdot 0 + (y-1) \cdot (-6) = 0 \Leftrightarrow -6 \cdot (y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

$$\text{Và } \overrightarrow{AC} = (6; -3) \Rightarrow (x-2) \cdot 6 + (y-4) \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 + (-3) \cdot (-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } H\left(1; \frac{1}{2}\right).$$

Câu 299: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 2), B(1; -1), C(8; 0)$.

a) Tính $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ và $\cos \angle ABC$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Giải tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1; 3), \overrightarrow{BC} = (7; 1)$. Do đó $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 10$.

Mặt khác, ta cũng có:

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50},$$

$$\cos \angle ABC = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

b) Do $\overrightarrow{AB} = (-1; -3)$ và $\overrightarrow{AC} = (6; -2)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) = 0$. Vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\angle BAC = 90^\circ$, tức là tam giác ABC vuông tại A . Mà $\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{5}}{5}$ nên $\angle ABC \approx 63^\circ$. Vì thế $\angle ACB \approx 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$.

Mặt khác, ta có: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{10}$,

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, CA = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{10}$$

Câu 300: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(-2; 3); B(4; 5); C(2; -3)$

- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Giải tam giác ABC (làm tròn các kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$A(-2; 3); B(4; 5); C(2; -3)$$

a. Có: $\overrightarrow{AB} = (6; 2); \overrightarrow{BC} = (-2; -8)$

$$\frac{6}{-2} \neq \frac{2}{-8} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{BC}$$

Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-2 + 4 + 2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + 5 + (-3)}{3}$$

$$\text{Vậy } G\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

c. Giải tam giác ABC (làm tròn các kết quả đến hàng đơn vị).

$$\overrightarrow{AB} = (6; 2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \approx 6$$

$$\overrightarrow{BC} = (-2; -8) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2} = 2\sqrt{17} \approx 8$$

$$\overrightarrow{AC} = (4; -6) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13} \approx 7$$

$$\overrightarrow{BA} = (-6; -2); \overrightarrow{BC} = (-2; -8)$$

$$\cos \angle ABC = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{28}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{17}} \approx 0,54 \Rightarrow \angle ABC \approx 58^\circ$$

$$\cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{12}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{13}} \approx 0,26 \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 75^\circ$$

Xét tam giác ABC có: $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ (ĐL tổng ba góc trong tam giác)

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 47^\circ$$

Giấc mơ không phải là thứ bạn nhìn thấy khi ngủ, giấc mơ là những điều mà không cho phép bạn ngủ.

“Nếu bạn muốn hoàn thành ước mơ của mình thì bạn nên hoàn thành những việc nhỏ nhất đó là hoàn thành bài tập về nhà của tớ giao nhé”.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>