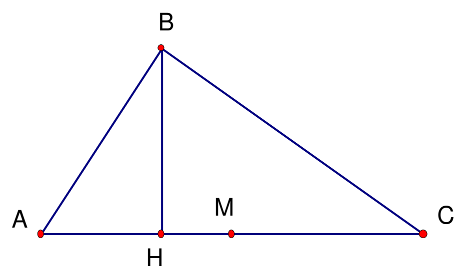
PHẦN I: BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẲNG.
BÀI 1: PHƯƠNG PHÁP KÉO THEO

I . Sơ lược về phương pháp kéo theo:

Xuất phát từ các bất đẳng thức đã biết, vận dụng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. Sau đây là các ví dụ:

Vd 1: Cho tam giác ABC, M thuộc AC. Chứng minh rằng: $S_{ABC} \le \frac{1}{2}AB.AC; S_{ABC} \le \frac{1}{2}BM.AC$

Giải:



Gọi BH là đường cao của tam giác $ABC \Rightarrow BH \le AB$

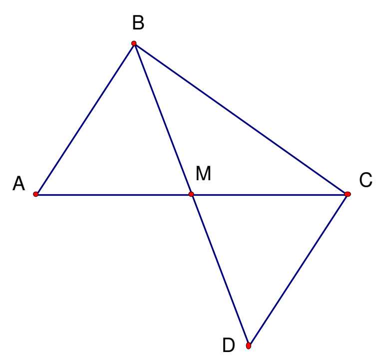
$S_{ABC} = \frac{1}{2}BH.AC \le \frac{1}{2}AB.AC$

$M \in BC \Rightarrow BH \le BM \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BH.AC \le \frac{1}{2}BM.AC$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Vd2: Cho tam giác ABC, AM là trung tuyến. Chứng minh: $AM \le \frac{BC}{2}$ thì $\widehat{BAC} \ge 90^o$ và ngược lại.

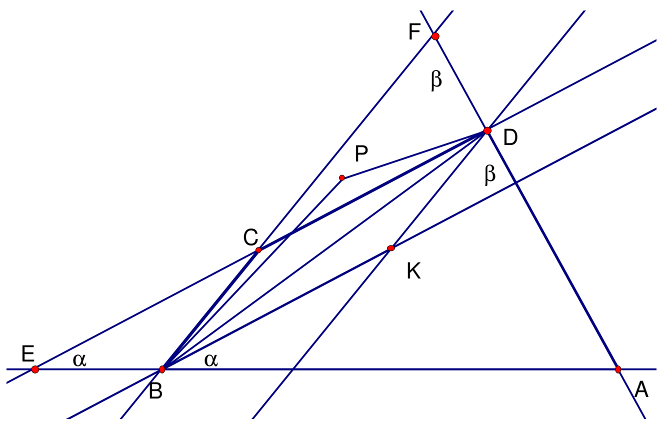
Giải:



a) Giả sử $\widehat{BAC} < 90^o$.
Gọi D là điểm đối xứng của A qua M. Suy ra $AD=2AM$. M là trung điểm hai đoạn thẳng BC và AD.
$\Rightarrow AB = DC \;\&\; AB//DC \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ACD} = 180^O$ mà $\widehat{BAC} < 90^o$
$\Rightarrow \widehat{ACD} > 90^O \Rightarrow \widehat{BAC} < \widehat{ACD}$
Xét tam giác ABC và tam giác CDB có: $AB=DC$, BC là cạnh chung, $\widehat{BAC} < \widehat{ACD}$
Do đó: BC<AD$\Rightarrow AM > \dfrac{BC}{2}$ (Vô lí).
$\Rightarrow \widehat{BAC} \geq 90^o$

Vd 3: Cho tứ giác lồi $ABCD$ sao cho AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F, và E,F,C cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ BD. Đặt $\widehat{AED} = \alpha, \widehat{AFB} = \beta$; và $S_{ABCD} = S$. Chứng minh rằng: $AB.CD.\sin\alpha + AD.BC.\sin\beta \leq 2S \leq AB.CD + AD.BC$.

Giải:



Dễ thấy: $\begin{cases} \widehat{ABF} > \alpha \\ \widehat{ACE} > \beta \end{cases}$

* Trong ΔABD ta lấy điểm K sao cho $\begin{cases} BK//DE \\ DK//BF \end{cases}$

Từ đó ta có $S_{ACK} + S_{ADK} \leq S \Rightarrow \frac{1}{2}AB.BK.\sin\alpha + \frac{1}{2}AD.DK.\sin\beta \leq S$

$\Leftrightarrow AB.BK.\sin\alpha + AD.DK.\sin\beta \leq 2S$ (1)

Dễ thấy $DKBC$ là hình bình hành.

$\begin{cases} BK = CD \\ BC = DK \end{cases}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có:

$AB.CD.\sin\alpha + AD.BC.\sin\beta \leq 2S$ (1)

* Trong nửa mặt phẳng có bờ là BD ta lấy điểm P sao cho $\begin{cases} DP = BC \\ BP = CD \end{cases}$.

Dễ thấy

$$S_{ABCD} = S_{ABPD} = S_{ADP} + S_{ABP} = \frac{1}{2}AD.DP\sin\widehat{ADP} + \frac{1}{2}BA.BP.\sin\widehat{ABP}$$

$$\le \frac{1}{2}AD.DP + \frac{1}{2}BA.BP$$

$\Leftrightarrow 2S \le AB.CD + AD.BC$

Vậy $AB.CD\sin\alpha + AD.BC.\sin\beta \le 2S \le AB.CD + AD.BC$

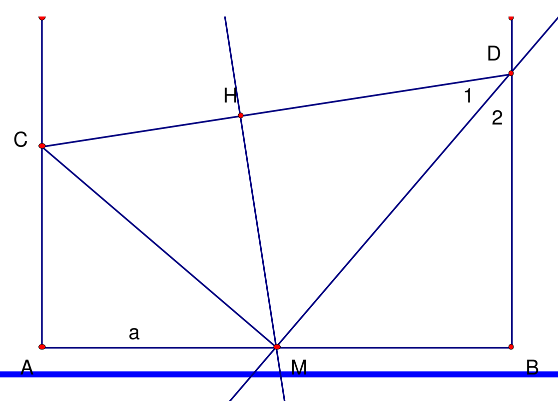
*Một số kiến thức thường dùng để giải tóan cực trị trong mặt phẳng:

- Sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, hình chiếu.
- Trong các tam giác vuông (có thể suy biến thành đoạn thẳng) có cạnh góc vuông AH và cạnh huyền AB thì $AH \le AB$. Xảy ra dấu bằng khi $H \equiv B$.
- Trong các đoạn thẳng nối từ điểm đến đường thẳng, đoạn nào vuông góc với đường thẳng là đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất.
- Trong các đoạn thẳng nối 2 điểm thuộc hai đường thẳng song song, đoạn thẳng vuông góc với hai đường thẳng song song có độ dài ngắn nhất.
- Trong hai đường xiên kẻ từ 1 điểm đến cùng một đường thẳng, đường xiên lớn hơn khi và chỉ khi hình chiếu của nó lớn hơn.
- Một tứ giác lồi bị chứa trong một tứ giác khác (không nhất thiết là lồi) thì chu vi của tứ giác bị chứa sẽ nhỏ hơn chu vi của tứ giác chứa nó bên trong.
- Độ dài đoạn thẳng nằm trong một đa giác lồi không lớn hơn độ dài đường chéo lớn nhất..
- Trong tất cả các dây cung qua một điểm cho trước trong một đường tròn thì dây cung có độ dài nhỏ nhất là dây cung vuông góc với đoạn thẳng nối tâm đường tròn với điểm đó.
- Trong các tam giác có cùng chu vi thì tam giác đều có diện tích lớn nhất.
- Một đường thẳng có thể cắt nhiều nhất hai cạnh của một tam giác.(nguyên tắc Dirichlet).

* Một số ví dụ:

Vd1: Cho đoạn thẳng AB có độ dài $2a$. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Qua trung điểm M của AB có 2 đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By lần lượt tại C,D. Xác định vị trí của các điểm C,D sao cho ΔMCD có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích đó.

Giải:



Gọi K là giao điểm của CM và DB,

$\Delta MAC = \Delta MBK\,(gcg) \Rightarrow MC = MK$

ΔDCK cân $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$

Kẻ $MH \perp CD$ Do M thuộc phân giác góc D nên $MH=MB=a$.

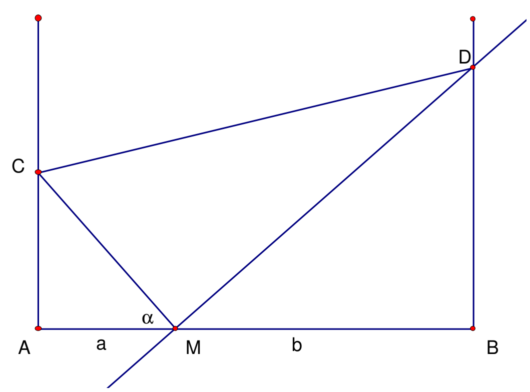
$S_{MCD} = \frac{1}{2}CD.MH$.

Do $CD \geq AB = 2a \,\&\, MH = a$ nên:

$S_{MCD} \geq \frac{1}{2}2a.a = a^2 \Rightarrow CD \perp Ax$. Các điểm C,D được xác định trên Ax, By sao cho $AC=BD=a$

* Trong lời giải trên, S_{MCD} được biểu thị bởi $\frac{1}{2}CP.MH$. Sau khi chứng minh MH không đổi, ta thấy S_{MCD} nhỏ nhất khi và chỉ khi CD nhỏ nhất.

- Nếu bài toán trên không cho M là trung điểm AB thì ta phải giải quyết ra sao?



$S_{MCD} = \frac{1}{2}MC.MD, \widehat{MAC} = \widehat{MDB} = \alpha$ (cùng phụ $\widehat{BMD}$)

$\Rightarrow MC = \frac{a}{\cos\alpha}, MD = \frac{b}{\sin\alpha}$ nên

$S_{MCD} = \frac{1}{2}\frac{ab}{\sin\alpha\cos\alpha}$

Do a,b,c là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất khi và chỉ khi $2\sin\alpha\cos\alpha$ lớn nhất.

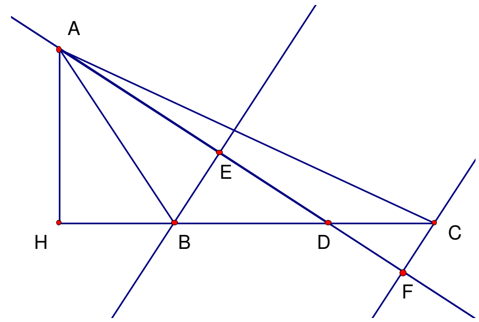
$2\sin\alpha\cos\alpha \leq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow S_{MCD} \geq ab$

$\min_{S_{MCD}} = ab \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^o$

$\Rightarrow$Các điểm C,D trên Ax, By được xác định sao cho $AC=AM$, $BD=BM$

Đây được xem là bài toán tổng quát.

Vd 2: Cho ΔABC có $\widehat{B}$ là góc tù, D di động trên BC. Xác định vị trí của D sao cho tổng các khoảng cách từ B và từ C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất.



Giải:

Ta có : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}BE.AD+\frac{1}{2}CF.AD$

$\Rightarrow BE+CF=\frac{2S_{ABC}}{AD}$. Do đó

$(BE+CF)\max \Leftrightarrow AD\min$

AD nhỏ nhất khi và chỉ khi hình chiếu *HD* nhỏ nhất. $HD\geq HB$ và *HD=HB* khi $D\equiv B$
Suy ra đpcm.

Vd3: Cho tam giác *ABC* vuông có độ dài cạnh góc vuông *AB*=6*cm*, *AC*=8*cm*. *M* là điểm di động trên cạnh huyền *BC*. Gọi *D* và *E* là chân các đường vuông góc kẻ từ *M* đến *AB* và *AC*. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác *ADME*.

Giải:
Đặt $AD=x$ thì $ME=x$. Theo Thalet:

$$\frac{EM}{AB}=\frac{CE}{CA}\Rightarrow\frac{x}{6}=\frac{CE}{8}\Rightarrow CE=\frac{4}{3}x\Rightarrow AE=8-\frac{4}{3}x$$

Ta có:

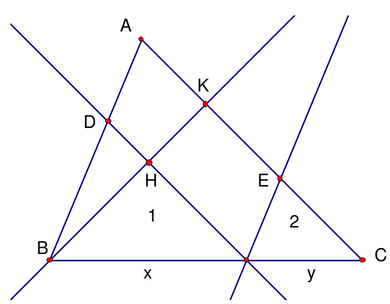
$$S_{ADME}=AD.AE=x\left(8-\frac{4}{3}x\right)=8x-\frac{4}{3}x^2$$

$$=-\frac{4}{3}\left(x^2-6x\right)=-\frac{4}{3}\left(x^2-6x+9\right)+12=-\frac{4}{3}(x-3)^2+12\leq 12$$

$S_{ADME}=12cm^2\Leftrightarrow x=3\Rightarrow D$ là trung điểm của *AB, M* là trung điểm *BC, E* là trung điểm *AC*.

Vd4: Cho tam giác *ABC*, điểm *M* di chuyển trên cạnh *BC*. Qua *M* kẻ các đường thẳng song song với *AC* và *AB*, chúng cắt *AB* và *AC* theo thứ tự *D* và *E*. Xác định vị trí *M* sao cho *ADME* có S_{max}.

Giải:



Gọi $S_{ABC}=S$, $S_{BDM}=S_1$, $S_{EMC}=S_2$.

Ta nhận thấy S_{ADME} max $\Leftrightarrow (S_1+S_2)\min\Leftrightarrow\frac{S_1+S_2}{S}\min$

Các ΔDBM & ΔEMC đồng dạnh với ΔABC nên:

$$\frac{S_1}{S}=\left(\frac{BM}{BC}\right)^2;\frac{S_2}{S}=\left(\frac{MC}{BC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1+S_2}{S}=\frac{BM^2+MC^2}{BC^2}=\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\geq\frac{1}{2}$$

Như vậy $\max S_{ADME}=\frac{1}{2}S$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Khi đó M là trung điểm của BC.

Vd 5: Giả sử C_1,B_1,A_1 là các điểm tùy ý trên các cạnh AB,CA,BC của tam giác ABC .Ký hiệu S,S_1,S_2,S_3 là diện tích các tam giác $ABC,AB_1C_1,BC_1A_1,CA_1B_1$ CMR:

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\leq\frac{3}{2}\sqrt{S}$$

Giải:

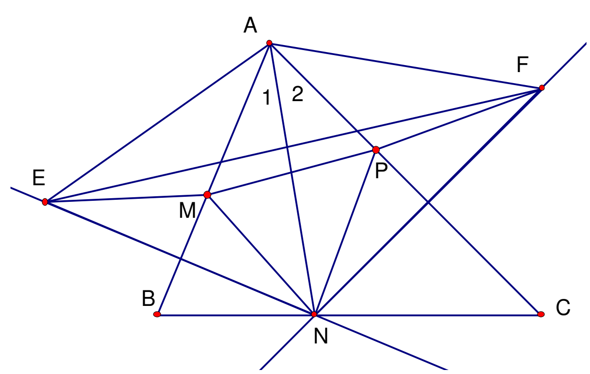
BĐT đã cho tương đương với $\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}\leq\frac{3}{2}$

$$VT=\sqrt{\frac{AB_1.AC_1}{AB.AC}}+\sqrt{\frac{BA_1.BC_1}{AB.BC}}+\sqrt{\frac{CB_1.CA_1}{AC.BC}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{AB_1}{AC}+\frac{AC_1}{AB}+\frac{BC_1}{AB}+\frac{BA_1}{BC}+\frac{CA_1}{BC}+\frac{CB_1}{AC}\right)=\frac{3}{2}$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC:

1.Cho tam giác ABC nhọn. Dựng một tam giác có chu vi nhỏ nhất nội tiếp tam giác ABC, tức là có 3 đỉnh nằm trên ba cạnh của tam giác ABC.

Giải:



Xét ΔMNP nội tiếp ΔABC một cách tùy ý. $(M\in AB, N\in BC, P\in AC)$. Vẽ E,F sao cho AB là trung trực của NE và AC là đường trung trực của NF.

Chu vi $\Delta MNP = MN+MP+PN = EM+MP+PF\geq FE$

$\widehat{EAF}=2\widehat{A_1}+2\widehat{A_2}=2\widehat{BAC}$

ΔFAE là tam giác cân có góc ở đỉnh không đổi nên cạnh đáy nhỏ nhất khi và chỉ khi cạnh bên nhỏ nhất.

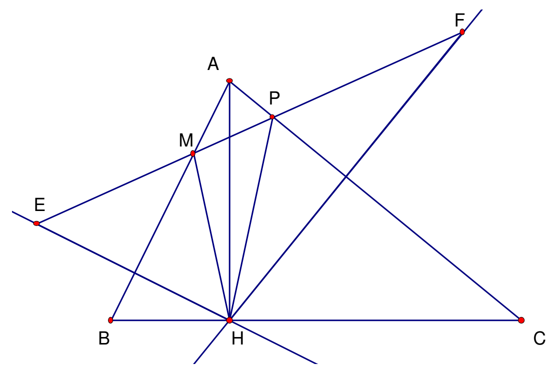
Ta có: EF nhỏ nhất $\Leftrightarrow AE \min \Leftrightarrow AN \min \Leftrightarrow AN \perp BC$

Ta có nhận xét rằng khi N là chân đường vuông góc kẻ từ A thì M và P cũng là chân 2 đường cao còn lại của tam giác.

Chứng minh nhận xét trên như sau:

ΔHMP : AB là đường phân giác của $\widehat{EMH}$, AC là đường phân giác của $\widehat{FPH}$.

Ta có: AB,AC gặp nhau tại A nên AH là tia phân giác của góc trong của tam giác tại H hay HA là tia phân giác $\widehat{MHP}$. Vì $AH \perp HC$ nên HC là đường phân giác góc ngòai của A tại đỉnh H.



Theo trên, AC là đường phân giác ngòai tại đỉnh P, HC gặp AC tại C nên MC là tia phân giác góc trong tại M.

MB và MC là các tia phân giác của hai góc kề bù nên $MB \perp MC, PC \perp PB$.

$\Rightarrow$Chu vi ΔMNP min khi M,N,P là chân 3 đường cao của tam giác ABC.

Do ΔABC nhọn nên M,N,P thuộc biên của tam giác.

2. Hai anh em chia tài sản là một miếng đất hình tam giác ABC. Họ muốn chia đôi diện tích miếng đất bằng một bờ rào ngắn nhất. Tính độ dài m của bờ rào này theo diện tích S và góc nhỏ nhất α của tam giác.

Giải:

Bờ rào phải cắt hai cạnh của tam giác. Giả sử góc tại đỉnh đó là Â, độ dài của bờ rào *là* $IK=m$ và khỏang cách từ đỉnh của góc $\widehat{A}$ tới hai đầu bờ rào là x và y.

$\Rightarrow IK^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos A \quad (1)$

Đặt $S_{AIK} = S', S_{ABC} = S, AI = x, AK = y$, ta có: $S' = \dfrac{S}{2} = const$.

Do $S' = \dfrac{1}{2}xy\sin A$ mà S' và $\widehat{A}$ không đổi nên xy không đổi.

$IK \min \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)\min$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$\left(x^2 + y^2\right)\min \Leftrightarrow x = y$

Như vậy xét bờ rào chắn góc A thì độ dài bờ rào ngắn nhất khi và chỉ khi ΔAIK cân tại A.

$IK = 2\sqrt{S'\tan\dfrac{A}{2}}.Do \quad S' = \dfrac{S}{2}$ nên $IK = \sqrt{2\tan\dfrac{A}{2}}$.

Vậy độ dài bờ rào ngắn nhất $= m = \sqrt{2\tan\frac{\alpha}{2}}$ $\left(\alpha = \min\left\{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}\right\}\right)$

3. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R có a,b,c là độ dài 3 cạnh và m_a,m_b,m_c là trung tuyến lần lượt tương ứng với 3 đỉnh A,B,C. Các trung tuyến của tam giác (theo thứ tự trên) cắt đường tròn tại A,B,C. Tìm GTLN của:

$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}$$

Giải:

Trước hết ta có $b^2+c^2 = 2m_a^2+\frac{a^2}{2}$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{b^2+c^2}{m_a} \le 4R$

Theo hệ thức lượng đường tròn:

$MA_1.MA = MB.MC \Leftrightarrow m_a MA_1 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow MA_1 = \frac{a^2}{4m_a}$

Ta lại có: $MA + MA_1 = AA_1 \le 2R$

$\Rightarrow m_a + \frac{a^2}{4m_a} \le 2R \Rightarrow 4m_a^2 + a^2 \le 8Rm_a$

$\Rightarrow 2m_a + \frac{a^2}{2} \le 4R.m_a$

$b^2+c^2 \le 4Rm_a \Rightarrow \frac{b^2+c^2}{m_a} \le 4R$.

Một cách tương tự, và cộng các bất đẳng thức lại vế theo vế ta có đpcm.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$\begin{cases} AA_1 = 2R \\ BB_1 = 2R \\ CC_1 = 2R \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. Khi đó d=2R.

4. Gọi H là trực tâm ΔABC nhọn và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Cm: $HA + HB + HC \ge 6r$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Giải:

Ta thấy: $HA.\frac{BC}{2} = S_2 + S_3$

$\Rightarrow x\frac{a}{2} = S_2 + S_3 \Rightarrow ax = 2(S_2 + S_3)$

Tương tự:

$$\left.\begin{array}{l} by = 2(S_1 + S_3) \\ cz = 2(S_1 + S_2) \end{array}\right\} ax + by + cz = 2.2S_{ABC}$$

Ta cần chứng minh: $x + y + z \geq 6r$

Giả sử: $a \geq b \geq c$. Theo quan niệm về đường xiên và hình chiếu $\Rightarrow x \leq y \leq z$

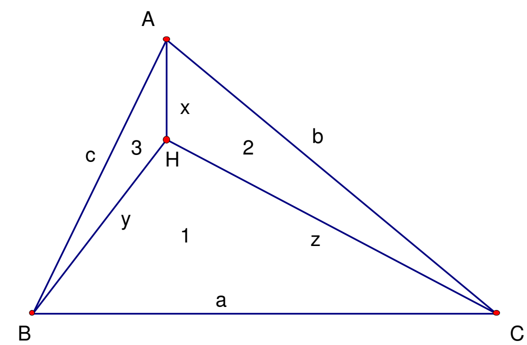
Từ đây ta sẽ chứng minh $(a+b+c)(x+y+z) \geq 3(ax+by+cz) \quad (2)$

Thật vậy:

$(2) \Rightarrow a(x+y+z) - 3ax + b(x+y+z) - 3by + c(x+y+z) - 3cz \geq 0$

$\Leftrightarrow \sum a\left[(y-x)-(x-z)\right] \geq 0$

$\Leftrightarrow \sum (y-z)(a-b) \geq 0 \quad (3)$



Vì $a \geq b \geq c$, $x \leq y \leq z$ nên (3) đúng.

Từ (1) và (2)

$(a+b+c)(x+y+z) \geq 3.4S = 12\dfrac{a+b+c}{2}r$

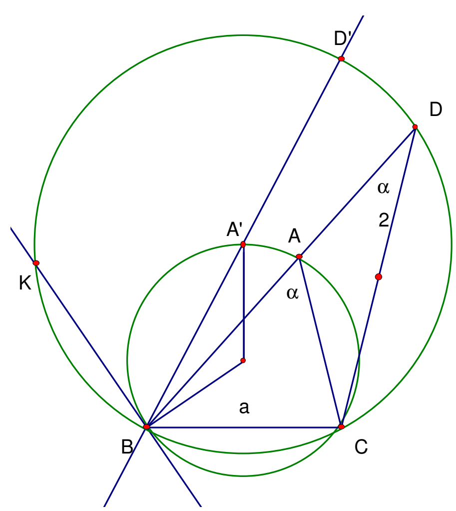
$\Rightarrow x + y + z \geq 6r$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$\begin{cases} a = b = c \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

5. ΔABC có cạnh $BC = a$ không đổi và $\widehat{A} = \alpha$ không đổi. Hãy xác định vị trí của A để ΔABC có chu vi nhỏ nhất.

Giải:



Xét A nằm trên một nữa mặt phẳng bờ BC. Ta có A di chuyển trên cung chứa góc α dựng trên BC.

Trên tia đối của tia AB lấy D sao cho $AD=AC$.

Chu vi ΔABC bằng $AB + BC + CA = AB + BC + a$

Chu vi ΔABC lớn nhất $\Leftrightarrow (AB + AC)\max \Leftrightarrow BD\max$.

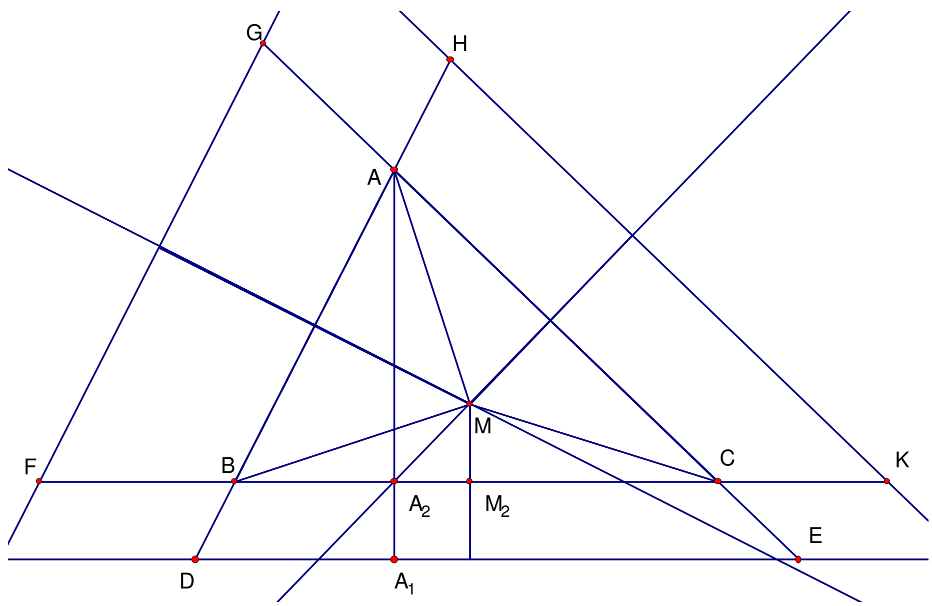
Mà $\widehat{BDC}=\dfrac{\alpha}{2}\Rightarrow D$ di động trên cung chứa $\dfrac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn BC (có giới hạn bởi tiếp tuyến tại B) đó là cung KC.

Do vậy BD max khi và chỉ khi BD là đường kính của cung chứa góc trên (tâm của cung chứa góc $\dfrac{\alpha}{2}$ đó chính là điểm A', điểm chính giữa cung chứa góc α)

ΔABC có chu vi lớn nhất khi nó là tam giác cân tại A có $BC=a,\widehat{A}=\alpha$

6. Tam giác ABC,M là điểm ở trong tam giác. Ở bên ngòai tam giác kẻ các đường thẳng song song với các cạnh, cách chúng một khỏang bằng khỏang cách từ M đến cạnh đó. Mỗi đường thẳng đó tạo với một cạnh của tam giác và các đường thẳng chứa hai cạnh kia một hình thang. Chứng tỏ rằng tổng diện tích của ba hình thang đó không nhỏ hơn $\dfrac{7}{3}S_{ABC}$.

Giải:



Gọi diện tích các tam giác ABC,MBC,MAC,MAB và các hình thang lần lượt là $S,S_1,S_2,S_3,S_1',S_2',S_3'$.

Ta có: $\Delta ADE\sim\Delta ABC\left(g.g.g\right)$

$$\Rightarrow\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AA_1}{AA_2}\right)=\left(\frac{AA_2+MM_2}{AA_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{S+S_1'}{S}=\left(1+\frac{S_1}{S}\right)^2\qquad\left(Do\quad\frac{MM_2}{AA_2}=\frac{S_1}{S}\right)$$

$$\Rightarrow S_1'=2S_1+\frac{S_1^2}{S}$$

Tương tự ta có: $S_2'=2S_2+\dfrac{S_2^2}{S};S_3'=2S_3+\dfrac{S_3^2}{S}$

Mà: $3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)=\left(S_1+S_2+S_3\right)^2+\left(S_1-S_2\right)^2+\left(S_2-S_3\right)^2+\left(S_3-S_1\right)^2\geq\left(S_1+S_2+S_3\right)^2$

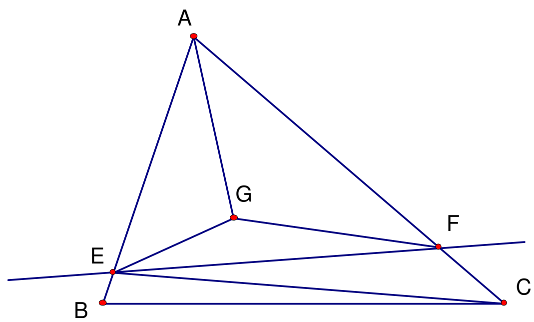
$\Rightarrow S_1^2+S_2^2+S_3^2\geq\dfrac{S^2}{3}\quad\left(Do\quad S=S_1+S_2+S_3\right)$

Do đó: $S_1'+S_2'+S_3'\geq 2S+\dfrac{S}{3}\Rightarrow S_1'+S_2'+S_3'\geq\dfrac{7}{3}S$.

Ta có đpcm.

7. Cho ΔABC, trên 2 cạnh AB và AC lấy 2 điểm E,F sao cho có điểm a trong ΔAEF thỏa $\begin{cases}S_{ABE}=2S_{AGF}\\ S_{ACE}=3S_{AGE}\end{cases}$. Chứng minh rằng: $S_{BEGF}+S_{CFGE}\geq\dfrac{4}{9}S_{ABC}$.

Giải:



Ta đặt: $S=S_{ABC};S_1=S_{AEG};S_2=S_{AFG}$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}3S_2=S_{ABF}=S_{BEGF}+S_1+S_2\\ 3S_1=S_{ACE}=S_{CFGE}+S_1+S_2\end{array}\right\}\Rightarrow S_1+S_2=S_{BEGF}+S_{CFGE}\qquad(1)$$

Ta có:

$$S_1+S_2=\frac{1}{3}\left(S_{ACE}+S_{ABF}\right)=\frac{1}{3}S\left(\frac{S_{ACE}}{S}+\frac{S_{ABF}}{S}\right)=\frac{1}{3}S\left(\frac{AE}{AB}+\frac{AF}{AC}\right)$$

$$\Rightarrow S_1+S_2\geq\frac{1}{3}S.2\sqrt{\frac{AE}{AB}\frac{AF}{AC}}=\frac{2}{3}S\sqrt{\frac{S_{AEF}}{S}}$$

$$\Rightarrow S_1+S_2\geq\frac{2}{3}S\sqrt{\frac{S_1+S_2}{S}}$$

$$\Leftrightarrow S_1+S_2\geq\frac{4}{9}S\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{BEGF}+S_{CFGE}\geq\dfrac{4}{9}S$

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases}S_1=S_2\\ G\in EF\end{cases}$

8.Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và bán kính R. Điểm M nằm trên AO và $\frac{AM}{MO}=k>1$. Từ M kẻ dây CD bất kì. Tìm $\max_{S_{ABCD}}$.

Giải:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{OCD}}=\frac{S_{ACD}+S_{BCD}}{S_{OCD}}=\frac{AM}{MO}+\frac{BM}{MO}=\frac{AB}{MO}=\frac{2AO}{MO}=2(k+1)=\text{const}$$

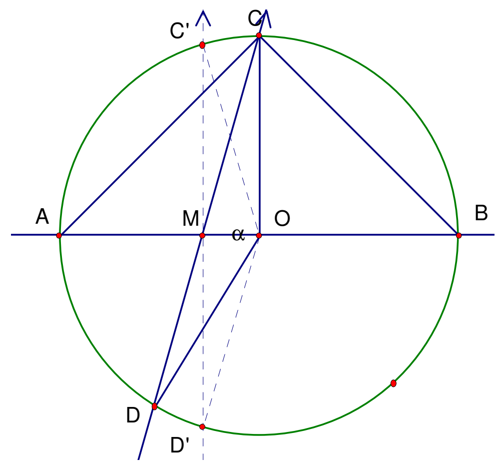
$\Rightarrow S_{ABCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow S_{OCD}$ lớn nhất

Mà ta lại có: $S_{OCD}=\frac{1}{2}OC.OD.\sin\alpha$ nên S_{OCD} khi $\sin\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow \alpha$ nhỏ nhất.

Mà ta dễ thấy: $90<\alpha<180$. $\sin\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow \alpha$ nhỏ nhất.

Ta dễ thấy $\alpha \Leftrightarrow CD\perp OA$.

Khi đó ta có: $\max_{S_{OCD}}=S_{OC'D'}$



Ta có:

$$\frac{OM}{MA}=\frac{1}{k}\Leftrightarrow\frac{OM}{R}=\frac{1}{k+1}\Rightarrow OM=\frac{R}{k+1}$$

$$MC'^2=R^2-\frac{R^2}{(k+1)^2}=\frac{R^2}{(k+1)^2}\left[k(k+2)\right]$$

$$\Rightarrow MC'=\frac{R}{k+1}\sqrt{k(k+2)}$$

$$\Rightarrow C'D'=\frac{2R}{k+1}\sqrt{k(k+2)}$$

$$\Rightarrow S_{OC'D'}=\frac{1}{2}MO.C'D'=\frac{R^2}{(k+1)^2}\sqrt{k(k+2)}$$

$$\Rightarrow Max_{S_{ABCD}}=\frac{2R^2}{k+1}\sqrt{k(k+2)}$$

9. Giả sử có một tam giác nhọn diện tích S_1, và có một tam giác vuông chứa tam giác nhọn nói trên, có diên tích S_2. Hãy tìm S_2 nhỏ nhất và so sánh S_1 và S_2.

Giải:

Gọi tam giác nhọn là ABC có $\widehat{A}$ là góc lớn nhất. Gọi M là trung điểm BC. Trên BC lấy E,F sao cho $ME=MF=MA$.

$\Rightarrow BC=a$. Tam giác AEF vuông tại A.

Khi đó ΔAEF có diện tích S_2 nhỏ nhất.

Ta có: vì $\hat{A}$ lớn nhất:

$\Rightarrow \widehat{A}\geq\widehat{B}\Rightarrow BC\geq AC$

Ta có: $\widehat{AMF}+\widehat{AME}=180^o$

$\Rightarrow \max\left(\widehat{AMF};\widehat{AME}\right)\geq 90^o$

Giả sử $\widehat{AMF}\geq 90^o$

Suy ra tam giác AMF tù.

$\Rightarrow AM^2 + ME^2 \le AC^2 \le BC^2 - a^2$

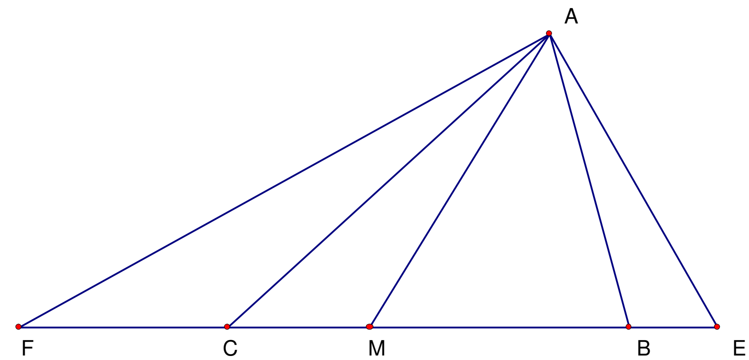
Ta có:

$$AM^2 + \frac{a^2}{2} \le a^2 \Rightarrow AM \le \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có:

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{EF}{BC} = \frac{2MA}{2BC} \le \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow S_{AEF} \le \sqrt{3} S_{ABC}$



*** Bài tập tự luyện:**

1. Cho ΔABC có các cạnh không bằng nhau, gọi các điểm G,I,H lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp, trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng: $\widehat{GIH} > 90^o$.

2. Phân giác của góc A,B,C trong ΔABC cắt đường tròn ngoại tiếp tại A_1, B_1, C_1. Giả sử A_o, B_o, C_o lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc A,B,C. Chứng minh:

$a) S_{A_oB_oC_o} = 2S_{AC_1BA_1CB_1}$;

$b) S_{A_oB_oC_o} \ge 4S_{ABC}$.

3. Cho ΔABC cân tại A và có $\widehat{BAC} \le 60^0$. Hãy tìm điểm M trênmặt phẳng sao cho tổng $MB + MC - MA$ nhỏ nhất có thể.

4. Tìm điểm O trong ΔABC cho trước sao cho tổng khỏang cách từ O tới ba đỉnh của tam giác ABC nhỏ nhất có thể (Điểm Toricenli).

5..$ABCD$ là một tứ giác nội tiếp. Tâm đường tròn ngoại tiếp nằm bên trong $ABCD$. Cạnh ngắn nhất có độ dài bằng $\sqrt{4-t^2}$ và cạnh dài nhất có độ dài bằng t, với $\sqrt{2} < t < 2$. Các tiếp tuyến tại A và B cắt nhau tại A', các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại D và A cắt nhau tại D'.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tỉ số

BÀI 2: PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG HỆ THỨC LƯỢNG

I. Sơ lược về phương pháp:

Không chỉ trong bất đẳng thức tam giác ta mới sử dụng hệ thức lượng để hỗ trợ cho việc tính toán và chứng minh, mà trong các bài toán về tam giác nói chung, hệ thức lượng trong tam giác cũng đã trở thành một công cụ mạnh để tính toán, đơn giản hóa vấn đề,…. Qua việc sử dụng hệ thức lượng trong tam giác ta có thể sử dụng các công cụ tính tóan mạnh hơn nữa như áp dụng các bất đẳng thức cổ điển, hay các bất đẳng thức trong tam giác (có nhiều bất đẳng thức trong tam giác rất độc đáo mà nếu không để ý chắc hẳn các bạn không thể thấy được vẻ đẹp huyền bí của nó). Hoặc từ việc áp dụng hệ thức lượng ta có thể biến một bài toán hình học đơn thuần trở nên phức tạp, khó nhìn hơn vì nó bị ẩn giấu sau một lọat các công thức mà nếu không nắm vững kiến thức chắc hẳn không phải ai cũng làm được.

* Một số hệ thức lượng và bất đẳng thức cơ bản trong tam giác:

Cho tam giác ABC, với $AB=c, AC=b, BC=a; m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c$ lần lượt là các trung tuyến và các phân giác ứng với các cạnh $a,b,c; d_1, d_2$ lần lượt là khỏang cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tới trọng tâm tam giác và tâm đường tròn nội tiếp tới trọng tâm tam giác, p là nửa chu vi tam giác, S là diện tích tam giác; r, R là các bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác; r_a, r_b, r_c là đường tròn bàng tiếp các cạnh a,b,c. Ta có các hệ thức sau:

$m_a^2 = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$; $d^2 = R^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$

$d_2^2 = \dfrac{1}{9}\left(p^2+5r^2-16Rr\right)$; $r_a = \dfrac{S}{p-a}, r_b = \dfrac{S}{p-b}, r_c = \dfrac{S}{p-c}$

$R = \dfrac{abc}{4S}$; $r = \dfrac{S}{p}$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \ge 2\sqrt{3}$

$\dfrac{m_a}{a} + \dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \le abc$

$\dfrac{9}{20}(ab+bc+ca) < m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a < \dfrac{5}{4}(ab+bc+ca)$

Bây giờ chúng ta đến với một bài toán.

Cho tam giác ABC với $AB=c, BC=a, CA=b$. Gọi S là diện tích tam giác này, và r và R là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác; m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các trung tuyến xuất phát từ A,B,C. M là một điểm bất kì, α, β, γ là các số thực. Ta có bất đẳng thức sau là hiển nhiên:

$$\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}\right)^2 \ge 0$$

Bình phương hai vế của $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$ ta được $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2+MB^2-AB^2$ và từ đây qua các phép biến đổi tương đương ta sẽ có được bđt sau:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2\right)\ge a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta \quad (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=0$

Nhưng khi cho M là trọng tâm tam giác thì ta sẽ có (1) trở thành:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha {m_a}^2+\beta {m_b}^2+\gamma {m_c}^2\right)\ge\frac{9}{4}\left(a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta\right) \quad (1.1)$$

- Chọn $\alpha=a,\beta=b,\gamma=c$ thay vào (1.1) ta được:

$$am_a^2+bm_b^2+cm_c^2\ge\frac{9}{4}abc \quad (1.2)$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức (1.2) ta sẽ có các bất đẳng thức sau:

$$\frac{m_a^2}{h_a}+\frac{m_b^2}{h_b}+\frac{m_c^2}{h_c}\ge\frac{9}{2}R\left(2S=\frac{abc}{2R}=ah_a=bh_b=ch_c\right)$$

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)+9abc\le 2(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

- Chọn $a=p-a,b=p-b,c=p-c\left(p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$ thay vào (1.1).

Ta có:

$$a^2(p-b)(p-c)=ap(p-a)(p-b)(p-c)\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}\right)$$

$$=S^2\left(\frac{p}{p-a}-1-\frac{a}{p}\right)=S\left(\frac{p^2r}{p-a}-pr-ra\right)$$

Tương tự với $b^2(p-a)(p-c)\ \&\ c^2(p-a)(p-b)$ rồi áp dụng hệ thức:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{4R+r}{pr}$$

Ta thu được bất đẳng thức sau:

$$(p-a)m_a^2+(p-b)m_b^2+(p-c)m_c^2\ge 9S(R-r)$$

- Chọn $\alpha=\dfrac{a}{m_a},\beta=\dfrac{b}{m_b},\gamma=\dfrac{c}{m_c}$ thay vào 1.2 ta sẽ được:

$$am_bm_c+bm_am_c+cm_bm_a\ge\frac{9}{4}abc \quad (1.3)$$

- Chọn $\alpha=bc,\beta=ca,\gamma=ab$ thay vào 1.2 ta có:

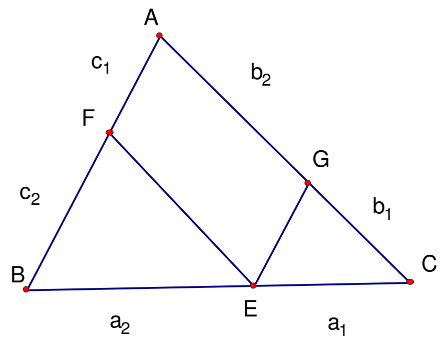
$$\frac{m_a^2}{a}+\frac{m_b^2}{b}+\frac{m_c^2}{c}\ge\frac{9}{4}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{ab+bc+ca}\right) \quad (4)$$

Chỉ cần dựa vào việc chọn bộ số α,β,γ thích hợp chúng ta đã có được những bất đẳng thức đẹp, các bất đẳng thức này cũng được ứng dụng rất nhiều trong việc giải các bài bất đẳng thức hình học, hệ thức lượng.

II. Một số ví dụ:

Vd 1: Cho ΔABC, từ điểm F trên AC vẽ các đoạn thẳng EG//AB, và EF//AC (F,G thuộc đoạn AB và AC). Cm $S_{ABC}^2 \geq 16S_{BEF}S_{CEG}$.

Giải:



Qua đề bài ta dễ nhận thấy rằng để chứng minh bất đẳng thức trên ta sẽ dùng bất đẳng thức AM-GM và công thứ Herong là phù hợp. Dễ thấy $AFEG$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow \begin{cases} AF = GE \\ AG = EF \end{cases}$$

Ta đặt :

$BC = a; BE = a_2; CE = a_1$

$AB = c; AF = c_1; FB = c_2$

$CA = b; AG = b_1; GC = b_2$

Ta có:

$$16S_{BEF}S_{CEG} = 16\sqrt{p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)p_2(p_2-a_2)(p_2-b_2)(p_2-c_2)}$$

$$= 2\sqrt{p_1p_2}2\sqrt{(p_1-a_1)(p_2-a_2)}2\sqrt{(p_1-b_1)(p_2-c_2)}2\sqrt{(p_1-c_1)(p_2-b_2)}$$

$$\leq \{(p_1+p_2)[p_1+p_2-(a_1+a_2)][p_1+p_2-(b_1+b_2)][p_1+p_2-(c_1+c_2)]\}$$

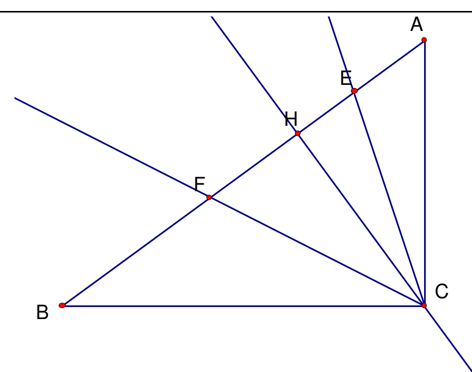
$$= p(p-a)(p-b)(p-c) = S_{ABC}^2$$

Vậy ta có: $S_{ABC}^2 \geq 16S_{BEF}S_{CEG}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi E là trung điểm BC.

Vd 2: Cho tam giác ABC vuông tại C. Kẻ đường cao CH và phân giác CE của góc ACH, CE của góc BCH. Chứng minh rằng $\dfrac{S_{ABC}}{S_{CEF}} \geq \sqrt{2}+1$.

Giải:



Đặt $AB = c; BC = a; CA = b$

Ta có: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \dfrac{AB}{EF}$

Ta có: $\widehat{CBF} = \widehat{ACH}$

$\Rightarrow \widehat{ACF} = \widehat{FCB} + \widehat{FBC} = \widehat{CFA}$

$\Rightarrow \Delta ACF$ cân tại A. $\Rightarrow AC = AF = b$

Tương tự: tam giác *BCE* cân tại *B* suy ra *BC=BE=a*

$\Rightarrow EF = BE + AF - AB = a + b - c$

Để chứng minh:

$$\frac{AB}{EF} \geq \sqrt{2}+1 \Leftrightarrow c\left(\sqrt{2}-1\right) \geq EF$$

$$\Leftrightarrow c\left(\sqrt{2}-1\right) \geq a+b-c \Leftrightarrow c\sqrt{2} \geq a+b \quad (1)$$

Ta có:

$$c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow 2c^2 \geq 2ab + c^2$$

$$\Rightarrow c\sqrt{2} \geq \sqrt{2ab+c^2} \quad (2)$$

Mà ta có:

$$2ab + c^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2ab+c^2} = a+b \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) ta có:

$$\frac{c}{EF} \geq \sqrt{2}+1 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} \geq \sqrt{2}+1 \qquad \text{(đpcm)}$$

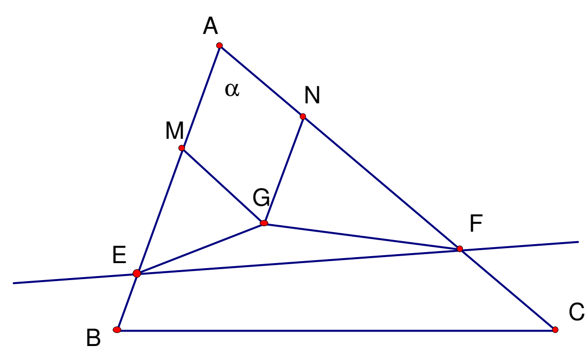
Vd 3: Cho ΔABC. Lấy *M* thuộc *AB, N* thuộc *AC*, thỏa $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = k < 1$; Dựng *AMON* làm thành hình bình hành. Kẻ 1 đường thẳng bất kì *d* cắt *AB,AC* tại *E,F* sao cho *G* không nằm ngòai ΔAEF. Chứng minh: $S_{AGE} + S_{AGF} \geq 4k^2 S_{ABC}$

<ins>Giải:</ins>

Ta có:

$$S_{ANB} = AN.AB\cos\alpha = AM.AC.\cos\alpha = S_{AMC}$$

h_1, h_2 lần lượt là khỏang cách từ *M* và *B* tới *AC*.



Khi đó ta có:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{AM}{AC} = k \Rightarrow \frac{S_{AMF}}{S_{ABF}} = \frac{S_{AGF}}{S_{ABF}} = \frac{h_1}{h_2} = k$$

Tương tự ta có: $\frac{S_{AGE}}{S_{ACE}} = k$

Ta có:

$$S_{AGE} + S_{AGF} = k\left(S_{ACE} + S_{ABF}\right) = k\left(\frac{S_{ACE}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}}\right)$$

$$= kS_{ABC}\left(\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC}\right) \geq 2kS_{ABC}\sqrt{\frac{AE.AF}{AB.AC}}$$

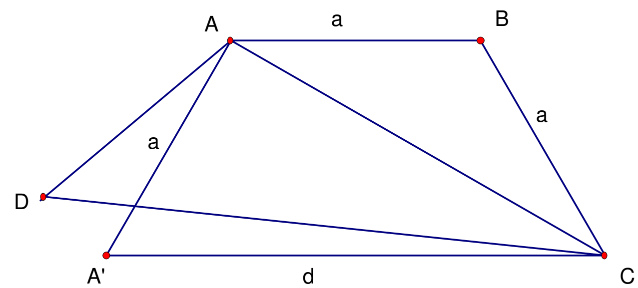
$$= 2kS_{ABC}\sqrt{\frac{AE.AF.\cos\alpha}{AB.AC.\cos\alpha}} = 2kS_{ABC}\sqrt{\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}} \geq 2kS_{ABC}\sqrt{\frac{S_{AGE}S_{AGF}}{S_{ABC}}}$$

$$\Leftrightarrow S_{AGE} + S_{AGF} \geq 2k^2 S_{ABC} \text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases} EF // BC \\ G \in EF \\ S_{AGE} = S_{AGF} \end{cases}$

Vd 4: Trong tất cả các tứ giác có 3 cạnh là a. Gọi S là diện tích các tứ giác đó. CM: $S \le \dfrac{a^2 3\sqrt{3}}{4}$

Giải:



Ta có: $\left(\widehat{A}+\widehat{D}\right)+\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)=360^o$

$\Rightarrow \min\left[\left(\widehat{A}+\widehat{D}\right);\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)\right] \le 180^o$

Qua C kẻ $d//AB$.

Vẽ $(A;2a)$ cắt d tại D'. Khi đó ta có tứ giác $ABCD'$ cũng thỏa điều kiện của tứ giác nêu ra.

Ta có: $\widehat{DAC} > \widehat{DA'C} \ge 90^o$

Suy ra khoảng cách từ D đến AC nhỏ hơn khoảng cách từ D' đến AC

$\Rightarrow S_{ADC} < S_{AD'C} \Leftrightarrow S_{ABC} + S_{ADC} < S_{AD'C} + S_{ABC} \Leftrightarrow S_{ABCD} < S_{AB'C'D'}$

Nên để tứ giác trên có diện tích lớn nhất thì có điều kiện 2 cạnh này song song. Ta xét diện tích hình thang đó.

Kẻ $BE//AD$.

Khi đó $ABED$ là hình thoi. ΔBEC là tam giác cân tại B.

Đặt $\widehat{ADE}=\alpha$ ta có:

$\widehat{EBC}=\pi-2\alpha$

Ta có:

$$S_{ABCD} = S_{ABED} + S_{BCE} = a^2 \sin\alpha + \frac{1}{2}a^2\sin(\pi-2\alpha)$$

$$= a^2\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) \quad (1)$$

$S = \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha(1+\cos\alpha) > 0$

$\Rightarrow S^2 = [\sin\alpha(1+\cos\alpha)]^2 = (1-\cos^2\alpha)(1+\cos\alpha)^2 = \frac{1}{3}(3-3\cos\alpha)(1+\cos\alpha)^3 \le \frac{1}{3}\left(\frac{6}{4}\right)^4 \quad (AM-GM)$

$\Rightarrow S \le \frac{3\sqrt{3}}{4}(2)$

Từ (1) và (2) $S_{ABCD} \le \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Dấu "=" xảy ra

$\widehat{B} - 3\cos\alpha = 1+\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^o$

Tức là tứ giác là nửa lục giác đều.

Khái quát hóa bài toán ta có bài toán sau:

Vd 5: Cho tứ giác có một cạnh có độ dài lớn hơn 1. Chứng minh: $S \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Giải:

Bằng cách tương tự bài trên ta chứng minh rằng tứ giác đó phải có 2 cạnh song song nhau.

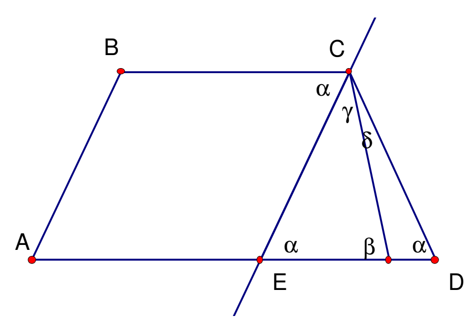
Giả sử *BC//AD*. Kẻ *CE//AB* cắt *AD* tại *E*. Không mất tính tổng quát giả sử: $CD \le AB \Rightarrow \beta \ge \alpha$.

Ta có:

$S_{ABCD} = S_{ABCE} + S_{ECD} = BC.CE\sin\alpha + \frac{1}{2}CE.CD\sin\gamma$

$\le \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin(\pi - (\alpha+\beta))$

$\Rightarrow S_{ABCD} \le \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) = T$



Qua C ta kẻ đoạn thẳng tạo với AD góc α.

Khi đó ta có:

* Nếu $180^o > \alpha + \beta \ge 90^o$

$\Rightarrow \gamma < 90^o \Rightarrow \sin(\alpha+\beta) \le \sin 2\alpha$

$\Rightarrow T \le \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$

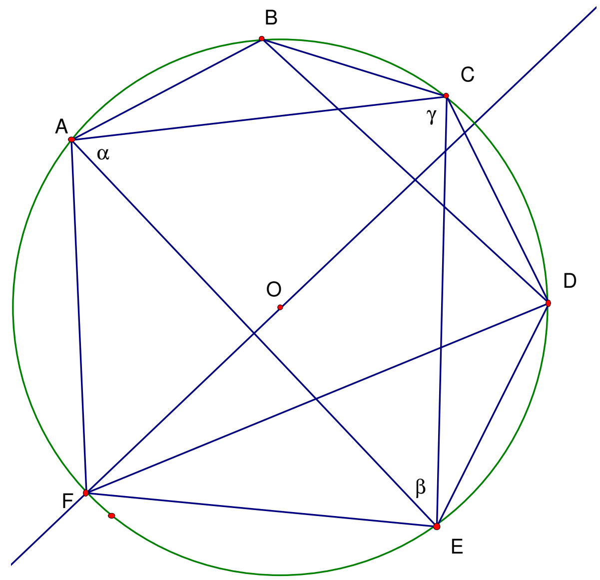
Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = CE = BC = 1 \\ \alpha = \beta \\ \alpha = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Tức là *ABCD* là nửa lục giác đều.

Vd 6: Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp trong $(O;R)$ và $AB = BC; CD = DE; EF = FA$. Chứng minh:
$S_{ACE} \le S_{BDF}$

Giải:



Ta đặt:

$$\begin{cases} \widehat{CAE} = \alpha \\ \widehat{CEA} = \beta \\ \widehat{ACE} = \gamma \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{cases} \widehat{DFB} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ \widehat{DBF} = \frac{1}{2}(\beta+\gamma) \\ \widehat{BDF} = \frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \end{cases}$$

Khi đó:

$$S_{ACE} = \frac{1}{2}AC.CE.\sin\gamma = \frac{1}{2}2R\sin\beta.2R\sin\alpha\sin\gamma = 2R^2\sin\beta\sin\alpha\sin\gamma$$

Tương tự:

$$S_{BDF} = 2R^2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$$

Suy ra ta có: $S_{ACE} \le S_{BDF}$

$$\sin\beta\sin\alpha\sin\gamma \le \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right) \le \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi lục giác đã cho đều.

III. Một số bài toán chọn lọc:

1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn. Đặt $l_a = \frac{m_a}{M_a}$ tương tự với l_b, l_c.

   Với m_a, m_b, m_c là độ dài các phân giác kẻ từ A,B,C tương ứng và M_a, M_b, M_c là độ dài các phân giác kéo dài, tính từ các đỉnh tương ứng A,B,C đến các giao điểm của chúng với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{l_a}{\sin^2 A} + \frac{l_b}{\sin^2 B} + \frac{l_c}{\sin^2 C} \ge 3$$

   Và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Giải:

Giả sử đường phân giác góc A cắt BC tại P và cắt vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC ở Q.

Áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác ABP ta có:

$$\frac{AP}{AB}=\frac{\sin B}{\sin\left(180^0-B-\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sin B}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}\quad(1)$$

Với chú ý rằng $\widehat{C}=\overset{\frown}{BQA}$ và

$$\overset{\frown}{ABQ}=\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{CBQ}=\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{CAQ}=\widehat{B}+\frac{\widehat{A}}{2}$$

Áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác ABQ ta có:

$$\frac{AB}{AQ}=\frac{\sin C}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}\quad(2)$$

Nhân (1) và (2) vế theo vế ta được:

$$l_a=\frac{m_a}{M_a}=\frac{AP}{AQ}=\frac{\sin B\sin C}{\sin^2\left(B+\frac{A}{2}\right)}\geq \sin B\sin C$$

Hoàn toàn tương tự ta có:

$$l_b=\frac{m_b}{M_b}=\frac{\sin A\sin C}{\sin^2\left(C+\frac{B}{2}\right)}\geq \sin A\sin C$$

$$l_c=\frac{m_c}{M_c}=\frac{\sin B\sin A}{\sin^2\left(A+\frac{C}{2}\right)}\geq \sin B\sin A$$

Từ đó suy ra

$$\frac{l_a}{\sin^2 A}+\frac{l_b}{\sin^2 B}+\frac{l_c}{\sin^2 C}\geq\frac{\sin B\sin C}{\sin^2 A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin^2 B}+\frac{\sin A\sin B}{\sin^2 C}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{\sin B\sin C}{\sin^2 A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin^2 B}+\frac{\sin A\sin B}{\sin^2 C}}=3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)=\sin\left(C+\frac{B}{2}\right)=\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=1$ tức là khi tam giác ABC đều.

2. Cho m,n,p là các số thực thỏa mãn $m+n, n+p, p+m$ & $mn+np+mp$ là các số âm. Đặt a,b,c là độ dài 3 cạnh, S là diện tích tam giác ABC. Khi đó:

$$ma^2+nb^2+pc^2\geq 4\sqrt{mn+np+mp}S$$

Giải:

Theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$ma^2+nb^2+pc^2 \ge 4\sqrt{mn+np+mp}S$$

$$\Leftrightarrow ma^2+nb^2+p\left(a^2+b^2-2ab\cos C\right) \ge 2ab\sin C\sqrt{mn+np+mp}$$

$$\Leftrightarrow (m+p)\frac{a}{b}+(n+p)\frac{b}{a} \ge 2\left(\sqrt{mn+np+mp}+p\cos C\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS ta có:

$$\left(\sqrt{mn+np+mp}+p\cos C\right)^2 \le \left(p^2+mn+np+pm\right)\left(\sin^2 C+\cos^2 C\right)=(m+p)(n+p)$$

Mặt khác: $\left[(m+p)\dfrac{a}{b}+(n+p)\dfrac{b}{a}\right]^2 \ge 4(m+p)(n+p)$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Câu hỏi đặt ra cho chúng ta là đẳng thức xảy ra khi nào? Đẳng thức xảy ra khi đẳng thức ở bất đẳng thức BCS mà chúng ta sử dụng để chứng minh xảy ra. Tức là:

$$\begin{cases} (m+p)\dfrac{a}{b}=(n+p)\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{\cos C}{p}=\dfrac{\sin C}{\sqrt{mn+np+mp}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{n+p}}=\dfrac{b}{\sqrt{m+p}} \\ \dfrac{\cos^2 C}{p^2}=\dfrac{\sin^2 C}{mn+np+mp}=\dfrac{1}{(m+p)(n+p)} \end{cases}$$

Thay $\cos C, b$ tương ứng vào biểu thức: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ta thu được:

$$c^2=a^2+a^2\frac{m+p}{n+p}-2a^2\sqrt{\frac{m+p}{n+p}}\frac{p}{\sqrt{(m+p)(n+p)}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2=1+\frac{m+p}{n+p}-2\frac{p}{n+p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a}=\sqrt{\frac{m+n}{n+p}} \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{n+p}}=\frac{c}{\sqrt{m+n}}$$

Tương tự ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{\sqrt{n+p}}=\dfrac{b}{\sqrt{m+p}}=\dfrac{c}{\sqrt{m+n}}$

Bài toán này là một định lí quen thuộc và có rất nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán lớn hơn. Ví dụ ta có thể sử dụng định lí này để chứng minh các bài tóan sau:

Đặt a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác ABC và S là diện tích của tam giác đó.

3. (Bất đẳng thức Hadwiger-Finsler)Chứng minh: $$a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Giải:

Thông thường khi nhìn vào bài này chúng ta sẽ nghĩ ngay đến công thức Herong và một số bất đẳng thức cổ điển quen thuộc và đưa nó về một bài toán đại số không hơn không

kém. Nhưng nếu tinh ý nhận ra sự liên hệ giữa bài toán này và bài toán 2 thì bài toán trở nên vô cùng dễ dàng.
Bất đẳng thức đã cho tương đương với:
$$a^2\frac{b+c-a}{a}+b^2\frac{c+a-b}{b}+c^2\frac{a+b-c}{c}\ge 4\sqrt{3}S$$
Theo định lí ta đã chứng minh ở trên thì ta chỉ cần chứng minh:
$$\sum\frac{(b+c-a)(c+a-b)}{ab}\ge 3$$
$$\Leftrightarrow \sum a(a-b)(a-c)\ge 0$$
Đây lại chính là bất đẳng thức Schur.

4. Chứng minh: $a^2b+b^2c+c^2a\ge 8\sqrt[4]{27}S^{\frac{3}{2}}$

Giải:
Ở bài toán này ta dễ dàng thấy rằng nó có liên hệ gì đó với bài toán 3. Và từ bài toán 3 ta dễ dàng suy ra được rằng:
$$ab+bc+ca\ge 4\sqrt{3}S$$
Bây giờ ta có thể trở về việc áp dụng định lí ở bài toán 2. Ta có:
$$a^2b+b^2c+c^2a\ge 4\sqrt{ab+bc+ca}S\ge 8\sqrt[4]{27}S^{\frac{3}{2}}$$
Bất đẳng thức được chứng minh xong.

5. Chứng minh: $3abc\ge 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}S$

Giải:
Cũng theo ý tưởng là sử dụng định lí ở bài toán 2, nhưng ở bài toán này chúng tôi muốn giới thiệu tới bạn đọc 2 cách giải:
Cách 1:
Cách giải này giống như cách giải ở bài toán 3:
Bất đẳng thức đã cho tương đương: $a^2\frac{bc}{a}+b^2\frac{ca}{b}+c^2\frac{ab}{c}\ge 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}S$
Theo định lí trên thì ta có:
$$3abc\ge 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}S$$
Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 2:
Cách này lại hoàn toàn chẳng liên hệ gì tới định lí trên nhưng thú vị một điều là lời giải của nó vô cùng ngắn gọn và đơn giản.
Bất đẳng thức đã cho có thể viết dưới dạng $9R^2\ge a^2+b^2+c^2$, áp dụng định lí hàm số sin ta sẽ có được bất đẳng thức tương đương với:
$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$$
Đây là một bđt lượng giác cơ bản, bất cứ người học toán nào cũng biết nên việc chứng minh bđt này chúng tôi sẽ bỏ qua, các bạn có thể tự tìm chứng minh cho mình.

6. Chứng minh: $\frac{x}{y+z}a^2+\frac{y}{x+z}b^2+\frac{z}{x+y}c^2 \ge 2\sqrt{3}S$ với x,y,z là các số thực dương.

Giải:

Để chứng minh bài toán này ta có một bổ đề nhỏ:

$$\frac{xy}{(y+z)(x+z)}+\frac{yz}{(y+x)(z+x)}+\frac{xz}{(x+y)(z+y)} \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2 \ge 0$$

Bổ đề đã được chứng minh xong.

Giờ ta mới chứng minh tiếp tục bất đẳng thức này. Áp dụng định lí trên ta có:

$$\frac{x}{y+z}a^2+\frac{y}{z+x}b^2+\frac{z}{x+y}c^2 \ge 4S\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(x+z)}+\frac{yz}{(y+x)(z+x)}+\frac{xz}{(x+y)(z+y)}}$$

Do đó ta có đpcm.

7. (Bất đẳng thức Pedoe) Đặt a,b,c là độ dài các cạnh cảu tam giác ABC với diện tích S. Đặt a_1,b_1,c_1 là độ dài các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ với diện tích S_1. Chứng minh rằng:

$$a^2\left(a_1^2+b_1^2-c_1^2\right)+b^2\left(b_1^2+c_1^2-a_1^2\right)+c^2\left(-b_1^2+c_1^2+a_1^2\right) \ge 16SS_1$$

Giải:

Ở bài này chúng tôi cũng đưa ra hai cách chứng minh, một cách sử dụng định lí trên và một cách khác sử dụng hệ thức lượng trong tam giác rồi đưa về định lí trên để hoàn tất việc chứng minh.

Cách 1:

Áp dụng trực tiếp định lí ta có:

$$a^2\left(a_1^2+b_1^2-c_1^2\right)+b^2\left(b_1^2+c_1^2-a_1^2\right)+c^2\left(-b_1^2+c_1^2+a_1^2\right) \ge$$

$$\ge 4S\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2-c_1^2\right).\left(b_1^2+c_1^2-a_1^2\right)+\left(b_1^2+c_1^2-a_1^2\right)\left(-b_1^2+c_1^2+a_1^2\right)+\left(-b_1^2+c_1^2+a_1^2\right)\left(a_1^2+b_1^2-c_1^2\right)}$$

$$=4S\sqrt{\left(a_1+b_1+c_1\right)\left(a_1-b_1+c_1\right)\left(a_1+b_1-c_1\right)\left(-a_1+b_1+c_1\right)}=16SS_1$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 2:

Cách 2 này là cách mà ít người nghĩ tới.

Ta có: $4\cot A=\dfrac{2bc\cos A}{\frac{1}{2}bc\sin A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{S}$

Vậy thì bất đẳng thức đã cho tương đương:

$a^2\cot A_1+b^2\cot B_1+c^2\cot C_1 \ge 4S$

Mà $\cot A_1\cot B_1+\cot C_1\cot A_1+\cot B_1\cot C_1=1$ nên theo định lí ta có đpcm.

(Dựa vào việc tìm trường hợp đẳng thức xảy ra khi nào của định lí các bạn hãy tìm trường hợp xảy ra đẳng thức của các bất đẳng thức trên, việc này hoàn toàn dễ dàng.)

IV. Bài tập tự luyện:

1. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi tam giác ABC không cân thỏa mãn $0<a<b<c$:

$$\left(\frac{ab(a-b)}{(b-c)(c-a)}\right)^2+\left(\frac{bc(b-c)}{(c-a)(a-b)}\right)^2+\left(\frac{ca(c-a)}{(a-b)(b-c)}\right)^2>4S$$

2. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi tam giác ABC không cân thỏa mãn $0<a<b<c$:

$$abc\left[\frac{a-b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b-c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}\right]\geq 4\sqrt{2}S$$

3. Cho tam giác ABC với $AB=c, BC=a, CA=b$. m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các trung tuyến xuất phát từ A,B,C. Chứng minh:

a) $4m_am_bm_c\leq bcm_a+acm_b+abm_c\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)}$

b) $\frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)}{4abc}\geq\frac{m_a^2}{a}+\frac{m_b^2}{b}+\frac{m_c^2}{c}\geq\frac{9(a^3+b^3+c^3)}{4(ab+ca+bc)}$

c) $m_a+m_b+m_c\leq\frac{a+b+c}{2}\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}}$

d) $am_a+bm_b+cm_c\leq\frac{3}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

e)

$$4(\alpha+\beta+\gamma)\left[\alpha(bcm_a)^2+\beta(acm_b)^2+\gamma(abm_c)^2\right]\geq(a^2+b^2+c^2)^2(a^2\alpha\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta)$$

f) $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\geq 4(bcm_a^2+acm_b^2+abm_c^2)^2\geq(a^2+b^2+c^2)^2$

Gợi ý: sử dụng bài toán đã xét ở phần lý thuyết, các phép biến đổi, các hệ thức lượng, điểm đặt của M và các bất đẳng thức cổ điển.

BÀI 3: PHƯƠNG PHÁP ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG

Nhiều bài bất đẳng thức tam giác có khối lượng tính toán khổng lồ hoặc khó hình dung các con số hay hướng xác định khi bắt đầu bài toán với một cách bình thường. Với phương pháp ứng dụng tích vô hướng, các khối lượng tính toán và biến đổi được rút gọn đến mức tối thiểu đồng thời bảo đảm được tính chính xác và sáng tỏ. Ngòai ra ta còn có thể sử dụng thêm các bất đẳng thức cổ điển để làm công cụ trợ giúp cho phương pháp này.

Trước hết chúng tôi xin nhắc lại định nghĩa. Cho hai vecto $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$. Tích vô hướng của chúng, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, với $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ là góc giữa hai vecto.

Biểu thức tọa độ: $\vec{a}.\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

Từ đó ta có:

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

Sau đây là một số ví dụ:

Vd 1: Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC luôn có:

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$$

Giải:

Ta có $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

Với bài toán này ta thấy có nhiều cách giải như áp dụng định lí cosin, đưa về tổng bình phương, hoặc bất đẳng thức hàm lồi. Nhưng chúng tôi muốn giới thiệu với bạn về phương pháp tích vô hướng cho bài này.

Gọi độ dài *BC = a, AC = b, AB = c.*

Từ điểm I tùy ý trong mặt phẳng (*ABC*) dựng 3 vecto $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$ có độ dài đơn vị lần lượt vuông góc với các cạnh *BC, AC, AB*.

Theo tính chất của tích vô hướng:

$$0\le\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}\right)^2=\overrightarrow{v_1}^2+\overrightarrow{v_2}^2+\overrightarrow{v_3}^2+2\left(\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_3}\right)$$

Mà theo giả thiết ta có $\overrightarrow{v_1}^2=\overrightarrow{v_2}^2=\overrightarrow{v_3}^2=1$;

$\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \cos\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) = -\cos C$

$\overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_3} = -\cos A$

$\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_3} = -\cos B$

Nên

$0 \le 3 - 2\left(\cos A + \cos B + \cos C\right)$

$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Vd 2: Chứng minh với mọi tam giác ABC và ba số thực x,y,z bất kì ta luôn có:

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B \quad (1)$$

Giải:

Lại chọn $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ như vd1 trên, áp dụng tích vô hướng cho các vectơ $x\overrightarrow{v_1}, y\overrightarrow{v_2}, z\overrightarrow{v_3}$ ta được:

$0 \le \left(x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(xy\cos C + xz\cos B + yz\cos A\right)$

Từ đây ta có ngay điều phải chứng minh.

Vd 3: Chứng minh rằng với mọi tam ABC và ba số dương m,n,p tùy ý , luôn có:

$$m\sin\frac{A}{2} + n\sin\frac{B}{2} + p\sin\frac{C}{2} \le \frac{m.n.p}{2}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}\right)$$

Giải:

Ta có:

$VP = \dfrac{m.n.p}{2}\left(\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{p^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{np}{m} + \dfrac{mp}{n}\dfrac{mn}{p}\right) = \dfrac{1}{2mnp}\left(n^2p^2 + m^2p^2 + m^2n^2\right)$

Bất đẳng thức tương đương:

$n^2p^2 + m^2p^2 + m^2n^2 \ge 2mnp\left(m\sin\dfrac{A}{2} + n\sin\dfrac{B}{2} + p\sin\dfrac{C}{2}\right) \quad (1)$

Đặt $mn = x; mp = y; np = z$, bất đẳng thức (1) trở thành:

$x^2 + y^2 + z^2 \ge 2\left(xy\cos\dfrac{B+C}{2} + zx\cos\dfrac{A+C}{2} + yz\cos\dfrac{A+B}{2}\right) = 2(xy\cos\alpha + xz\cos\beta + yz\cos\gamma)$

Với $\alpha = \dfrac{B+C}{2}; \beta = \dfrac{A+C}{2}; \gamma = \dfrac{A+B}{2}$ tạo thành 3 góc một tam giác. Ta thấy bài toán này trở về vd 2 mà ta vừa xét ban nãy.

Vd 4: Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC và mọi số thực x ta luôn có:

$$1 + \frac{1}{2}x^2 \ge \cos A + x(\cos B + \cos C) \qquad (1)$$

Giải:

Đặt $f(x)=1+\frac{1}{2}x^2-\cos A-x(\cos B+\cos C)$ (1)

Ta cần chứng minh $f(x)\geq 0, \forall x\in \mathbb{R}$.

Tuy nhiên với phương pháp này ta thấy việc tính toán rất khó khăn và không hiệu quả. Ta sẽ chọn phương pháp tích vô hướng cho bài này:

Lại chọn $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$ như trên ta có:

$$0\leq \vec{v}^2=\left(x\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}\right)^2=x^2+2x\left(\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_3}\right)+2\overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_2}^2+\overrightarrow{v_3}^2$$

$$\Leftrightarrow 0\leq x^2-2x\left(\cos C+\cos B\right)-2\cos A+2$$

Từ đó ta suy ra được đpcm.

Tiếp tục vận dụng ý tưởng trên vào bài toán hình học không gian đặc sắc sau, phần chứng minh chúng tôi sẽ dành cho bạn đọc tự tìm hiểu.

Vd 5: Chứng minh tam giác ABC có các trung tuyến ứng với các cạnh AB và BC vuông góc thì ta có $\cos B\geq \frac{4}{5}$.

Giải:

Đặt $\overrightarrow{BC}=\vec{a}, \overrightarrow{BA}=\vec{c}$ ta có: $\overrightarrow{m_a}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{c}, \overrightarrow{m_c}=\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}$ do $\overrightarrow{m_a}\perp\overrightarrow{m_c}$ nên

$$\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{c}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right)=0\Leftrightarrow \vec{a}\vec{c}=\frac{2}{5}\left(\vec{a}^2+\vec{c}^2\right)$$

Vậy ta có đpcm.

Vd 6: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng khỏang cách giữa trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp bé hơn ba lần bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Giải:

Ở bài toán này, thoạt đầu nhìn vào ta sẽ nghĩ ngay đến dùng hệ thức lượng trong tam giác, hoặc dùng phương pháp hình học thông thường, ít ai nghĩ rằng với phương pháp vecto thì bài toán trở nên vô cùng đơn giản.

Ta biết rằng tâm O của đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm G và trực tâm H nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Euler) và ta có: $OH=3OG$. Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

Suy ra: $\left|\overrightarrow{OH}\right|\leq\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|+\left|\overrightarrow{OC}\right|=3R$

Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A,B,C thẳng hàng. Nhưng điều này không xảy ra được theo giả thiết. Từ đó ta có đpcm. Vậy là ta đã giải quyết xong một bài APMO nữa một cách khá dễ dàng.

Một số bài toán chọn lọc:

1. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm $M\&N$ thuộc các đoạn AD,BC chia chúng theo cùng tỉ số. Chứng minh rằng $MN \le \max\{AB, CD\}$.

Giải:

M,N chia AD,BC theo cùng tỉ số $k\left(M \in AD; N \in BC \Leftrightarrow k \le 0\right)$

Với mọi điểm O ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OD}}{1-k} \\ \overrightarrow{ON} = \dfrac{\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}}{1-k} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) - k\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}\right)}{1-k} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{DC}}{1-k}$$

$$\Rightarrow \frac{\left|\overrightarrow{MN}\right| \le \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|k\overrightarrow{DC}\right|}{\left|1-k\right|} = \frac{AB - kDC}{1-k} \qquad \left(Do\ k \le 0\right)$$

2. Cho n điểm $X_1, X_2, ..., X_n$ và số dương $a_1,..,a_n$. M thuộc đoạn AB. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i MX_i \le \max\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i AX_i, \sum_{i=1}^{n} a_i BX_i\right\}$$

Giải:

M thuộc đoạn AB nên chia nó theo tỉ số: $-\dfrac{MA}{MB}$

$$\Rightarrow \text{ với mọi điểm } X_i, i = \overline{1,n} \text{ ta có: } \overrightarrow{X_iM} = \frac{\overrightarrow{X_iA} + \dfrac{MA}{MB}\overrightarrow{X_iB}}{1 + \dfrac{MA}{MB}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{X_iM} = \frac{MB.\overrightarrow{X_iA} + MA\overrightarrow{X_iB}}{MA + MB} = \frac{MB}{AB}\overrightarrow{X_iA} + \frac{MA}{MB}\overrightarrow{X_iB}\left(i = \overline{1,n}\right)$$

$$\Leftrightarrow a_i MX_i \le \frac{MB}{AB} a_i AX_i + \frac{MA}{AB} a_i BX_i$$

$$\Rightarrow \sum a_i MX_i \le \left(\frac{MB}{AB} + \frac{MA}{AB}\right)\max\left\{\sum a_i AX_i, \sum a_i BX_i\right\} = \max\left\{\sum a_i AX_i, \sum a_i BX_i\right\}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

BÀI 4: PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ HÓA.

I. Sơ lược về phương pháp:

Với việc đặt độ dài các đoạn thẳng hay số đo các góc trong tam giác là các chữ hay các kí hiệu toán học ta sẽ làm cho việc tính toán trở nên dễ nhìn hơn. Bước thứ hai là ta sẽ áp dụng phương pháp đại số hóa. Đó là việc chứng minh dựa trên những tính toán, những bất đẳng thức cổ điển, những con số, những phân số cơ bản, những tính chất cơ bản trong đại số,….

* Một số ví dụ:

Vd 1: Cho tứ giác lồi *ABCD* có khoảng cách từ *A* đến *BC* nhỏ hơn khoảng các từ *B* đến *DC*. *CA* và *BD* có giao điểm *K*. Trên *BC* lấy *N*, trên *AD* lấy *M*, trên *AC* lấy *G*, sao cho *KN* // *DC*; *GN* // *DC; KG* // *AB*. Chứng minh: $S_{GMNK} < \frac{8}{27} S_{ABCD}$

Giải:

Ta có: *KN // DC; GN // DC; KG // AB*

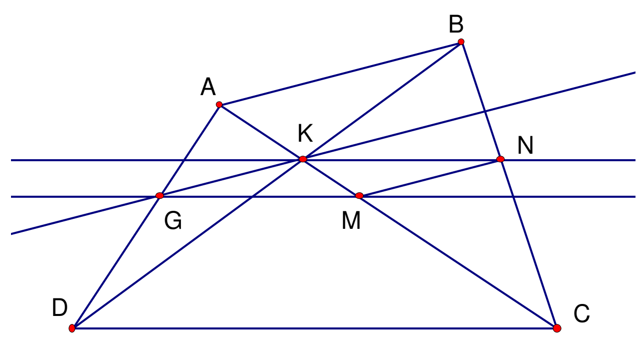
$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{GM}{DC} = \frac{AG}{AD} = \frac{BK}{BD} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow MN // AB \Rightarrow GMNK$ là hình bình hành.

Theo đề bài ta có khỏang cách từ *A* đến *CD* nhỏ hơn từ *B* đến *DC*

$\Rightarrow S_{ACD} < S_{BCD}$

$\Rightarrow S_{AKD} < S_{BKC} \Rightarrow \frac{S_{AKD}}{S_{BKC}} = \frac{ay}{bx}$

$\Rightarrow \frac{x}{y} > \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x}{y+x} > \frac{a}{b+a}$



Ta có:

$\frac{S_{AGM}}{S_{ACD}} = \left(\frac{AG}{AD}\right)^2 = \left(\frac{BK}{BD}\right)^2 = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2$

Tương tự: $\frac{S_{AGK}}{S_{ACD}} = \frac{AG.AK}{AD.AC} = \frac{a}{a+b}\frac{x}{x+y}$

$\Rightarrow \frac{S_{GKM}}{S_{ACD}} = \frac{x}{x+y}\left(\frac{x}{x+y} - \frac{a}{a+b}\right) \quad (1)$

Ta có:

$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{ABCD}} = \frac{y}{x+y} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có:

$$S_{GKM} = \frac{x}{x+y}\left(\frac{x}{x+y} - \frac{a}{a+b}\right)\frac{y}{x+y}$$

$$\Rightarrow S_{GMNK} = \frac{2xy}{(x+y)^2}\left(\frac{x}{x+y} - \frac{a}{a+b}\right)S_{ABCD} < \frac{2xy}{(x+y)^2}\frac{x}{x+y}S_{ABCD} \quad (3)$$

Ta xét:

$$\frac{2x^2y}{(x+y)^3} = \frac{2\frac{y}{x}}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^3} = \frac{2t}{(1+t)^3} \qquad \left(t = \frac{y}{x}\right)$$

Ta có: $t+1 = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{t}{4}}$

$$\Leftrightarrow (t+1)^3 \geq \frac{27}{4}t$$

$$\Rightarrow \frac{2t}{(1+t)^3} \leq \frac{2t}{\frac{27}{4}t} = \frac{8}{27} (5)$$

Từ (3)(4)(5) ta có đpcm.

Vd 2: Cho ΔABC cân tại C. Biết $\frac{AC}{AB} = k(k \neq 1)$. Các đường phân giác trong của các góc của tam giác cắt các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại M, N, P. Chứng minh: $S_{ABC} \geq 4S_{MNP}$.

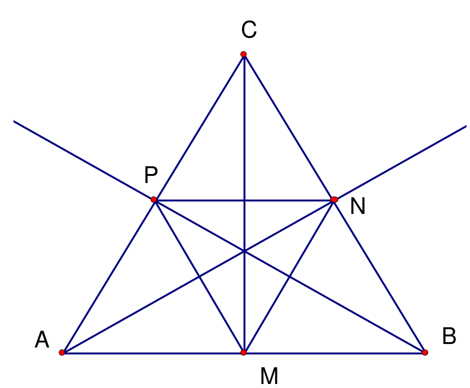
<u>Giải:</u>

Ta có: $k = \frac{AC}{AB} = \frac{CN}{NB} \Leftrightarrow \frac{k}{k+1} = \frac{CN}{NB}$

Vì tam giác ABC cân tại C có BN, AN là phân giác của hai góc đáy.

$\Rightarrow PN // AB \Rightarrow \Delta CPN \sim \Delta CAB$

$$\Rightarrow \frac{S_{CPN}}{S_{MBC}} = \frac{CN.CD}{CA.CB} = \left(\frac{CN}{CB}\right)^2 = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \quad (1)$$



Ta xét: ΔMNB & ΔMCB có:

$$\frac{S_{MNB}}{S_{MBC}} = \frac{BN}{BC} = \frac{BC - CN}{BC} = \frac{1}{k+1}$$

Tương tự: $\frac{S_{APM}}{S_{ACN}} = \frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1} = \frac{S_{APM}}{S_{ACN}} = \frac{S_{MNP}}{S_{MBC}} = \frac{S_{APM} + S_{MNP}}{S_{ABC}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\frac{S_{APM}+S_{MNB}+S_{CPM}}{S_{ABC}}=\frac{1}{k+1}+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{ABC}-S_{MNP}}{S_{ABC}}=\frac{k+1+k^2}{(k+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=\frac{k}{(k+1)^2} \quad (3)$$

Mà ta có:

$$(k+1)^2 \ge 4k$$

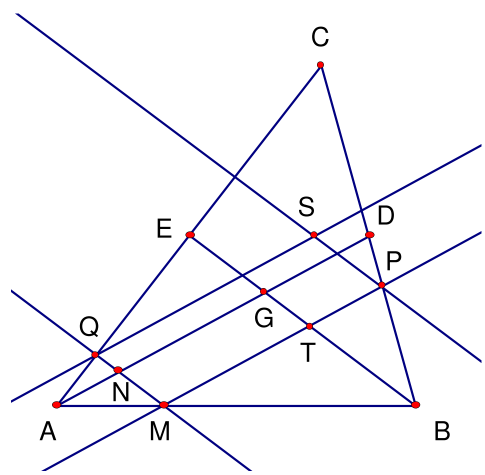
$$\Rightarrow \frac{k}{(k+1)^2} \le \frac{1}{4} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh.

Vd 3: Cho ΔABC. Qua điểm M thuộc cạnh AB, dựng hai tia lần lượt song song với các trung tuyến AD và BE và chúng cắt BC và CA tại PQ. Dựng hình bình hành $MPSQ$. Chứng minh:

$$S_{MPSQ} \le \frac{3}{8}S_{ABC}$$

<u>Giải:</u>



Gọi N và T như hình vẽ. Ta có:

$$\frac{MN}{MQ}=\frac{BG}{BE}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{MT}{MP}=\frac{AG}{AD}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow S_{MNGE}=MN.ME.\sin\alpha=\frac{4}{9}NQ.MN.\sin\alpha$$

$$=\frac{4}{9}S_{MPSQ} \quad (1)$$

Ta đặt: $MA=kMB$

Ta có:

$$\frac{MN}{GB}=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{k+1}$$

$$\frac{MT}{GA}=\frac{BM}{BA}=\frac{k}{k+1}$$

$$\widehat{NMT}=\widehat{NGT}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1}=\frac{S_{APM}}{S_{ACN}}=\frac{S_{MNP}}{S_{MCB}}=\frac{S_{APM}+S_{MNP}}{S_{ACN}+S_{MCB}}=\frac{S_{APM}+S_{MNP}}{S_{ABC}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{S_{APM}+S_{MNB}+S_{CPM}}{S_{ABC}}=\frac{1}{k+1}+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{ABC}-S_{MNP}}{S_{ABC}}=\frac{k+1+k^2}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=\frac{k}{(k+1)^2} \qquad (3)$$

Mà ta có:

$(k+1)^2 \geq 4k$

$$\Rightarrow \frac{k}{(k+1)^2}\leq\frac{1}{4} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

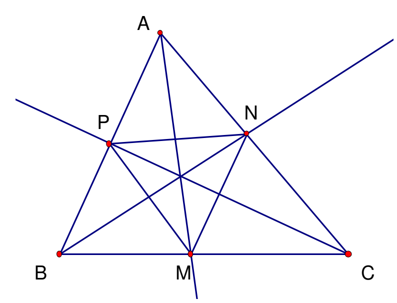
$4S_{MNP}\leq S_{ABC} \qquad (dpcm)$

Vd 4: Cho ΔABC có các phân giác AM,BN,CP. Chứng minh rằng: $S_{MNP}\leq\frac{1}{4}S_{ABC}$

Giải:

Trước tiên ta nhận thấy đây chính là phần mở rộng của bài 3.

Ta đặt: $\begin{cases} AB=c \\ BC=a \\ CA=b \end{cases}$



Và ta có:

$$\frac{BP}{PA}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{BP}{BA}=\frac{a}{a+b}$$

$$\frac{BN}{MC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{BM}{BC}=\frac{c}{b+c}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{BPM}}{S_{ABC}}=\frac{BP.BM}{AB.BC}=\frac{ac}{(a+b)(b+c)}$$

Tương tự với các ΔMNC & ΔAPN.

Mà

$$S_{MNP}=S_{ABC}-(S_{PN}+S_{BPM}+S_{MNC})$$

$$\Rightarrow\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=1-\left(\frac{S_{PN}+S_{BPM}+S_{MNC}}{S_{ABC}}\right)=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Ta có:

$$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq\frac{1}{4}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Với trường hợp tam giác ABC cân thì ta đưa về bài 3.

BÀI 5: SỬ DỤNG CÁC ĐỊNH LÍ, ĐỊNH NGHĨA VỀ CÁC ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG TRÒN

I. Sơ lược về phương pháp:

Có thể nói, từ cấp hai chúng ta đã được tham khảo nhiều sách viết về các định lí lớn, các đường tròn, đường thẳng, các hệ thức,… được sử dụng rộng rãi trong việc chứng minh các bài toán hình học.

1. Định lí Menelaus:

Cho tam giác ABC, gọi M,N,K lần lượt là các điểm thuộc các đường thẳng AB,BC,CA (có thể nằm trên phần kéo dài chứ không nhất thiết phải nằm trên đoạn thẳng) chia các cạnh tam giác đó theo tỷ số là m,n,k (đều khác 1). Thì ta có M,N,K thẳng hàng khi và chỉ khi $m.n.p = 1$.

Định lí này theo tôi nhớ là chương trình sách giáo khoa cấp II không có đề cập đến, nhưng nếu các bạn chịu khó tham khảo các sách tham khảo ngòai thị trường, thì có thể biết được rằng định lí này đã được giới thiệu với học sinh từ những năm cấp II. Năm đầu cấp III, các bạn đã được học về vecto thì định lí này lại được mở rộng thêm, và phát biểu chính xác hơn, từ đây ta biết được chính xác về định lí Ceva.

2. Định lí Ceva:

Gọi D,E, F là ba điểm tương ứng các dường thẳng BC, CA, AB của tam giác ABC. Chia các cạnh tam giác đó theo tỷ số là m,n,k (đều khác 1). Lúc đó ba đường thẳng AD, BE, CF cắt nhau tại một điểm O hoặc song song khi và chỉ khi $mnp = -1$.

* Chú ý : các đường AD, BE, CF gọi là các cevian.

Định lí này còn được phát biểu dưới dạng lượng giác như sau:

Gọi D,E, F là ba điểm tương ứng trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.

Lúc đó ba đường thẳng AD, BE, CF cắt nhau tại một điểm O khi và chỉ khi

$$\frac{\sin\widehat{ABE}}{\sin\widehat{CBE}}\frac{\sin\widehat{BCF}}{\sin\widehat{ACF}}\frac{\sin\widehat{CAD}}{\sin\widehat{BAD}}=1$$

Từ định lí Menelaus và Ceva này ta có thể suy ra cách chứng minh định lí Desargues.

3. Định lí Desargues:

Trong một mặt phẳng cho hai tam giác ABC và A'B'C'.Nếu các đường thẳng AA',BB',CC' đồng qui tại một điểm và các cặp đường thẳng BC,B'C' ; AC,A'C' ; AB,A'B' đều cắt nhau thì các giao điểm của chúng thẳng hàng.

Đây là một bài toán được giải bằng kiến thức THCS, bạn đọc có thể tự chứng minh.

4. Đường thẳng Simson:

Đường thẳng Simson là một bài toán khá nổi tiếng trong chương trình toán học phổ thông. Định lý được phát biểu như sau:

Từ một điểm D bất kỳ nằm trên vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC kẻ 3 đường vuông góc xuống 3 cạnh của tam giác này. Khi đó khi D chuyển động trên đường tròn chân 3 đường vuông góc này luôn thẳng hàng.

5. Đường thẳng Steine:

Đường thẳng steine là đường thẳng đối xứng của đường thẳng Simson qua các cạnh của tam giác. Nó luôn luôn đi qua trực tâm của tam giác với mọi M thuộc (ABC).
Ngòai ra cũng có một điểm khác cũng liên quan đến đường thẳng Simson đó là điểm Miquel:

6. Điểm Miquel:

Cho 4 đường thẳng cắt nhau tại 6 điểm tạo thành 4 tam giác. Các đường tròn ngoại tiếp 4 tam giác này có một điểm chung (gọi là điểm Miquel).

7. Đường thẳng Euler, đường tròn Euler, hệ thức Euler:

- Đường tròn Euler:

Chân ba đường cao của một tam giác bất kì, ba trung điểm của ba cạnh, ba trung điểm của ba đoạn thẳng nối ba đỉnh với trực tâm, tất cả chín điểm này cùng nằm trên một đường tròn. Đường tròn này thường được gọi là đường tròn Euler hay còn gọi là đường tròn Feuerbach hay đường tròn chín điểm.
Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác thì đường tròn Euler có bán kính là R/2 và tâm của nó là trung điểm đoạn nối trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

- Định lí Feuerbach:

Đường tròn Feuerbach của một tam giác tiếp xúc với đường tròn nội tiếp và ba đường tròn bàng tiếp của tam giác đó.

- Đường thẳng Euler:

Đường thẳng Euler là đường thẳng nối các điểm là Trực tâm, Trọng tâm và Tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác. Đường thẳng Euler là một định lý rất nổi tiếng của hình học sơ cấp mà mỗi học sinh đều biết.

- Hệ thức Euler:

Cho $(O;R),(O';r)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC thì ta có: $OO'^2 = R^2 - 2Rr$. Đây chính là hệ thức Euler.

- Công thức Euler:

Công thức Euler, hay còn gọi là đồng nhất thức Euler, là một công thức toán học trong ngành giải tích phức, được xây dựng bởi nhà toán học người Thụy Sĩ Leonhard Euler. Công thức chỉ ra mối liên hệ giữa hàm số lượng giác và hàm số mũ phức.
Cụ thể, với mọi số thực x, ta có:

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Ở đây e là cơ số logarit tự nhiên, i là đơn vị của số phức.
Khai triển từ công thức trên, các hàm số $\sin x \,\&\, \cos x$ có thể được viết dưới dạng sau:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$\sin x = \frac{1}{2}i\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

Trường hợp đặc biệt: khi $x = \pi$, ta có: $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ từ đó dẫn đến công thức rút gọn nổi tiếng: $e^{i\pi} + 1 = 0$
(Cách chứng minh các hệ thức này các bạn có thể tham khảo ở trang wikipedia.org hoặc tự tìm tòi sáng tạo ra cách giải riêng cho mình nhưng ở công thức Euler thì bạn

đọc cần có kiến thức về sử dụng số phức, phép tính vi tích phân, vi phân, chuỗi Taylor mới có thể hiểu được phần này).

8. Định lý Stewart:

- Định lý Stewart 1 :(Tính chất đường phân giác)

Cho tam giác *ABC*, *D* là điểm trên *BC* sao cho *AD* sao cho *AD* là đường phân giác của góc *A*. Khi đó: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$

- Định lý Stewart:

Cho tam giác *ABC, D* là điểm trên *BC.* Khi đó ta có: $AB^2.CD + AC^2.BD - AD^2BC = BC.BD.DC$

- Định lý Apolonius :(cho đường trung tuyến):

Cho tam giác *ABC* có cạnh *a, b,c* và độ dài đường trung tuyến m_a. Khi đó ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

+ Hệ quả 1:(Tổng bình phương ba đường trung tuyến)

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

+ Hệ quả 2 :(công thức đường phân giác)

$$d_a = \frac{2\sqrt{bcp\left(p-a\right)}}{b+c}$$

9. Đường tròn Apollonius:

Cho hai điểm phân biệt *A,B* và số thực $k \neq 1$. Chứng minh rằng tập hợp những điểm *M* sao cho $\frac{MA}{MB} = k$ là một đường tròn, đó chính là đường tròn Apollonius ứng với 2 điểm *A,B* và tỉ số *k*.

10. Bất đẳng thức và định lý Ptolemy:

Định lý Ptolemy về tính chất của tứ giác nội tiếp là một trong những kết quả kinh điển và đẹp của hình học sơ cấp.

Có thể nói, bất đẳng thức Ptolemy và định lý Ptolemy đẹp từ các cách chứng minh đa dạng đến những ứng dụng phong phú trong các bài toán chứng minh, trong tính toán hình học và trong các bài toán bất đẳng thức hình học. Bất đẳng thức Ptolemy là hệ quả của bất đẳng thức tam giác? Ai cũng biết bất đẳng thức tam giác: Với *A, B, C* là ba điểm bất kỳ trên mặt phẳng, ta có $AB + BC \geq AC$ (1). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *A, B, C* thẳng hàng và B nằm giữa A và C. Nói cách khác $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ với k là một số thực dương.

Trong khi đó, bất đẳng thức Ptolemy khẳng định: Với 4 điểm *A, B, C, D* bất kỳ trên mặt phẳng, ta có $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$ (2).

Rõ ràng, theo một quan điểm nào đó thì bất đẳng thức Ptolemy chính là mở rộng của bất đẳng thức tam giác. Vì sao vậy? Xin giải thích lý do:

Chia hai vế của (2) cho *BD*, ta được

$$AB\frac{CD}{BD}+BC\frac{AD}{BD}\geq AC$$

Nếu chọn D "đủ xa" thì từ đây ta sẽ suy ra $AB+BC\geq AC$.

Điều này nghe cũng ngạc nhiên, tuy nhiên lợi ích đem lại của sự đặc biệt hoá này không nhiều, vì chẳng lẽ lại dùng bất đẳng thức Ptolemy cao siêu để chứng minh bất đẳng thức tam giác vốn được coi như tiên đề?

Tuy nhiên, một logic rất tự nhiên dẫn chúng ta đến một ý tưởng hữu ích hơn: Như vậy bất đẳng thức Ptolemy có liên quan đến bất đẳng thức tam giác. Vậy có thể là bất đẳng thức Ptolemy có thể được chứng minh nhờ vào bất đẳng thức tam giác? Điều này quả là như vậy. Để chứng minh cho luận điểm này ta có thể dùng ba phép chứng minh tiêu biểu: Sử dụng tính chất tam giác đồng dạng và bất đẳng thức tam giác, Sử dụng phép nghịch đảo và bất đẳng thức tam giác, Số phức. Ta cũng có thể chứng minh định lí Ptolemy bằng cách sử dụng đường thẳng Simson.

- Những kết quả kinh điển:

Trước hết ta xem xét ứng dụng của bất đẳng thức Ptolemy và trường hợp đặc biệt của nó – định lý Ptolemy trong việc chứng minh các kết quả kinh điển của hình học phẳng

+ Điểm Toricelli:

Xét bài toán "Cho tam giác ABC bất kỳ. Hãy tìm điểm M trong mặt phẳng tam giác sao cho $MA+MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất".Điểm M tìm được được gọi là điểm Toricelli của tam giác ABC.

Có thể giải ngắn gọn bài toán này bằng cách sử dụng bất đẳng thức Ptolemy như sau:

Trên cạnh BC, dựng ra phía ngoài tam giác đều BCA'. Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $MBA'C$ ta có $BM.CA'+CM.BA'\geq BC.MA'$

Từ đó, do $CA'=BA'=BC$ nên ta được $BM+CM\geq MA'$

Như thế $AM+BM+CM\geq MA+MA'\geq AA'$

Tức là $AM+BM+CM\geq AA'(const)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

1. Tứ giác $BMCA'$ nội tiếp
2. M nằm giữa A và A'

Dễ thấy ta có thể tìm được điểm M thoả mãn cả hai điều kiện này khi và chỉ khi tất cả các góc của tam giác ABC đều không lớn hơn 120^0.

Nếu chẳng hạn, góc $A>120^0$ thì điểm M cần tìm sẽ chính là điểm A (bạn đọc tự chứng minh!).

Rõ ràng phương pháp nói trên có thể áp dụng cho bài toán tổng quát hơn: "Cho tam giác ABC và các số thực dương *m, n, p*. Hãy tìm điểm M trong mặt phẳng tam giác sao cho $m.MA+n.MB+p.MC$ đạt giá trị nhỏ nhất".

Tất nhiên, chúng ta cũng sẽ gặp phải tình huống tương tự như tình huống tam giác ABC có 1 góc lớn hơn 120^0 như ở trên.

Nếu chú ý đến xuất phát điểm của bất đẳng thức Ptolemy, chúng ta có thể dễ dàng xây dựng lời giải trực tiếp cho bài toán điểm Toricelli mà không qua bất đẳng thức này bằng cách sử dụng việc vẽ thêm các tam giác đồng dạng.

Chẳng hạn với bài toán điểm Toricelli. Xét phép quay tâm C góc 60^0 biến M thành M',B thành B' thì CMM' là tam giác đều và $MB=M'B'$, do đó

$$AM+BM+CM=AM+MM'+M'B'\geq AB'$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, M, M', B' thẳng hàng. Điều này xảy ra khi cả ba góc *AMC, CMB* và *AMB* bằng 120^0 và điểm *M* nằm trong tam giác *ABC*.

+ Bất đẳng thức Erdos-Mordell

Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Đặt $x_1 = MA$, $x_2 = MB$, $x_3 = MC$; p_1, p_2, p_3 lần lượt là khoảng cách từ *M* đến *BC, CA, AB* tương ứng. Khi đó ta có bất đẳng thức $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2(p_1 + p_2 + p_3)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác *ABC* đều và *M* trùng với tâm *O* của tam giác.

Những ví dụ trên một lần nữa cho thấy sự gần gũi giữa bất đẳng thức Ptolemy và bất đẳng thức tam giác. Sau đây, ta sẽ xem xét một số ứng dụng của định lý Ptolemy về tứ giác nội tiếp trong việc chứng minh một số công thức lượng giác và hình học.

+ Công thức tính $\sin(\alpha + \beta)$:

Với $\alpha + \beta$ là các góc nhọn, dựng đường tròn đường kính *AC* và chọn các điểm *B* và *D* nằm trên hai nửa đường tròn, sao cho $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{DAC} = \beta$. Áp dụng định lý Ptolemy, ta có

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD \quad (7)$$

Mặt khác, áp dụng định nghĩa của hàm số lượng giác, ta có

$$AB = AC.\cos\alpha, BC = AC.\sin\alpha, CD = AC.\sin\beta, DA = AC.\cos\beta$$

Cuối cùng, áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác *ABD*, ta được

$$BD = AC.\sin(\beta + \alpha)$$

Thay vào (7), ta được

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha$$

+ Định lý Pythagore:

Xét hình chữ nhật *ABCD*. Rõ ràng đây là một tứ giác nội tiếp. Vì thế ta có

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

Do $AB = CD, AD = BC$ nên từ đây suy ra

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \text{ (đpcm)}$$

+ Định lý hàm số cosin:

Xét tam giác *ABC* với các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Dựng điểm D trên đường tròn ngoại tiếp tam giác sao cho $AD = BC$ & $AC = BD$(*D* chính là điểm đối xứng của *C* qua trung trực của *AB*). Gọi *E* và *F* là hình chiếu của *C* và *D* lên *AB*. Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp *ABCD* ta có $AB.CD + AD.BC = AC.BD$

Mặt khác, $CD = AB - AE - BF = AB - 2BC\cos B$

Thay $CD = AB - 2BC\cos B, AD = BC, BD = AC$ vào, ta có

$$AB^2 - 2AB.BC.\cos B + BC^2 = AC^2$$

Hay $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$ (đpcm)

+ Hệ thức Feuerbach:

Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp trong một đường tròn, khi đó

$$BD^2.S_{ACD} = CD^2.S_{ABD} + AD^2.S_{BCD} \quad (8)$$

+ Định lý Carnot:

Trong tam giác nhọn *ABC* nội tiếp trong đường tròn tâm *O* bán kính *R*. Gọi *x, y, z* là các khoảng cách từ *O* đến *BC, CA, AB* tương ứng. Khi đó

$$x + y + z = R + r$$

trong đó *r* là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Viết dưới dạng lượng giác, định lý Carnot chính là hệ thức $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$. Chú ý hệ thức này đúng với mọi tam giác.

Với hệ thức hình học, định lý Carnot vẫn đúng trong trường hợp tam giác tù, nhưng nếu chẳng hạn A tù thì ta có $-x + y + z = R + r$.

- Mở rộng định lý Ptolemy và bất đẳng thức Ptolemy:

Định lý Ptolemy và bất đẳng thức Ptolemy có nhiều hướng mở rộng khác nhau. Thậm chí từ bất đẳng thức Ptolemy, phát sinh ra hẳn một khái niệm gọi là không gian metric Ptolemy, đồ thị Ptolemy … Dưới đây, chúng ta xem xét một số mở rộng của định lý Ptolemy (và cũng là của bất đẳng thức Ptolemy)

+Định lý Bretschneider

Cho tứ giác *ABCD* có độ dài các cạnh *AB, BC, CD, DA* lần lượt là *a, b, c, d* và độ dài hai đường chéo *AC, BD* là *m, n*. Khi đó ta có $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd.\cos(A + C)$

Rõ ràng định lý Ptolemy và cả bất đẳng thức Ptolemy đều là hệ quả của định lý Bretschneider.

+Định lý Casey (định lý Ptolemy mở rộng)

Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn (*C*). Bốn đường tròn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tiếp xúc với (*C*) lần lượt tại *A, B, C, D*. Gọi $t_{\alpha\beta}$ là độ dài đoạn tiếp tuyến chung, trong đó $t_{\alpha\beta}$ là độ dài đoạn tiếp tuyến chung ngoài nếu α, β cùng tiếp xúc ngoài hoặc cùng tiếp xúc trong với (*C*) và $t_{\alpha\beta}$ là độ dài đoạn tiếp tuyến chung trong trong trường hợp ngược lại. Các đại lượng $t_{\beta\gamma}$, $t_{\gamma\delta}$ … được định nghĩa tương tự. Khi đó ta có

$$t_{\alpha\beta}.t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}.t_{\delta\alpha} = t_{\gamma\alpha}.t_{\delta\beta}. \qquad (9)$$

Định lý Ptolemy chính là trường hợp đặc biệt của định lý Casey, khi $x = y = z = t = 0$.

Định lý Casey có thể phát biểu một cách khác, như sau: Các đường tròn *A, B, C, D* tiếp xúc với đường tròn (*O*); *a,b,c,d,x,y* là độ dài các tiếp tuyến chung của các cặp đường tròn *A* và *B,B* và *C,C* và *D,D* và *A,A* và *C, B và D* tương ứng. Khi đó $x.y = a.c + b.d$. Chú ý ta lấy độ dài tiếp tuyến chung trong hay tiếp tuyến chung ngoài theo nguyên tắc đã đề cập ở trên. Cuối cùng, điểm có thể coi như đường tròn bán kính 0 và tiếp tuyến của hai « đường tròn điểm » chính là đường thẳng đi qua chúng. Điều này sẽ được dùng đến trong phần ứng dụng của định lý Casey.

+ Định lý 1. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại I và cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O). Một tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) cắt O tại B và C, trong khi đó tiếp tuyến chung trong của chúng cắt (O) tại điểm A cùng phía với I. Khi đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

+ Định lý 2. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường tròn (C) tiếp xúc với dây cung BC tại D và các cạnh AB, AC tương ứng tại P và Q. Khi đó trung điểm của PQ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

11. Trọng tâm của một hệ điểm:

Cho n bộ (A_i, m_i) với $i = \overline{1,n}$, trong đó A_i là các điểm còn m_i là các số thực dương. Ta nói trọng tâm của hệ n bộ (A_i, m_i) là một điểm T sao cho:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{TA_i} = 0$$

(Có thể hiểu m_i là các trọng lượng đặt vào vị trí A_i. Khi $n = 3$ và $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, ta lại gặp khái niệm trọng tâm của một tam giác).
Định nghĩa này hợp lí vì ta có tính chất sau: Với mọi n bộ như đã nói trên, trọng tâm luôn luôn tồn tại và duy nhất.

12. Bao lồi của hệ *n* điểm:

Trong mặt phẳng cho n điểm. Ta nói bao lồi của hệ n điểm này là đa giác lồi nhỏ nhất chứa tất cả các điểm đó, nghĩa là đa giác này không chứa bất cứ một đa giác lồi nào khác cũng với tính chất đó. (Ta nói một đa giác là lồi nếu kéo dài một cạnh bất kì thì nó sẽ không cắt bất cứ cạnh nào khác). Có thể chứng minh được rằng bao lồi của một hệ hữu hạn điểm luôn luôn tồn tại và duy nhất.

13. Định lí Pick:

Cho đa giác (P) không tự cắt nhau trong mặt phẳng tọa độ với các đỉnh có tọa độ nguyên. Kí hiệu B là số tất cả các điểm có tọa độ nguyên nằm trên biên của (P), I là số tất cả các điểm có tọa độ nguyên nằm bên trong của (P). Khi đó, diện tích của (P) là:

$$\left[(P)\right] = I + \frac{1}{2}B - 1$$

14. Định lí Poncelet:

Giả sử có một đường tròn được đặt bên trong một đường tròn khác. Gọi $A_i, i = \overline{1,n}$ là các điểm trên đường tròn lớn sao cho mỗi đoạn trong đường gấp khúc A_iA_{i+1} đều tiếp xúc với đường tròn nhỏ. Khi đó, nếu $B_i, i = \overline{1,n}$, là các điểm trên đường tròn lớn sao cho mỗi đoạn trong đường gấp khúc B_iB_{i+1} đều tiếp xúc với đường tròn nhỏ thì B_nB_1 là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ.

II. Một số ví dụ:

Phép chứng minh bất đẳng thức Ptolemy cũng như cách từ bất đẳng thức Ptolemy suy ra bất đẳng thức tam giác cho thấy bất đẳng thức này có thể áp dụng để đánh giá độ dài các đoạn thẳng. Việc dựng tam giác đều BCA' ra phía ngoài trong lời giải bài toán Toricelli chính là một cách làm mẫu mực để áp dụng được bất đẳng thức Ptolemy.

Ý tưởng chung là: Để đánh giá tổng $p.MA + q.MB$, ta có thể dựng điểm N sao cho $p.NA = q.NB$. Sau đó áp dụng bất đẳng thức Ptolemy thì được

$$NA.MB + NB.MA \geq AB.MN$$

Từ đó

$$p.NA.NB + p.NP.MA \geq AB.MN$$

$$\Leftrightarrow q.NB.MB + p.NB.MA \geq AB.MN$$

$$\Leftrightarrow p.MA + q.MB \geq AB.\frac{MN}{NB}$$

Chú ý là điểm N là cố định, như thế p.MA + q.MB đã được đánh giá thông qua MN.
Ý tưởng này là chìa khoá để giải hàng loạt các bài toán cực trị hình học. Ta xem xét một số ví dụ:

Vd 1: Cho điểm M nằm trong góc nhọn xOy. Hai điểm A,B lần lượt thay đổi trên Ox, Oy sao cho $2OA = 3OB$. Tìm vị trí của A, B sao cho $2MA + 3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $OAMB$, ta có

$$OA.MB + OB.MA \geq OM.AB$$

Từ đó

$$2OA..MB + 2.OB.MA \geq 2.OM.AB$$

$$\Leftrightarrow 3OB.MB + 2.OB.MA \geq 2.OM.AB$$

$$\Leftrightarrow 2MA + 3MB \geq 2.OM.\left(\frac{AB}{OB}\right)$$

Vì tam giác OAB luôn đồng dạng với chính nó nên $\frac{AB}{OB}$ là một đại lượng không đổi. Từ đó suy ra $2MA + 3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2.OM.\left(\frac{AB}{OB}\right)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác $OAMB$ nội tiếp.

Vd 2 : Một lục giác có độ dài 6 cạnh đều bằng 1. Chứng minh rằng lục giác đó có ít nhất một đường chéo nhỏ hơn hay bằng 2.

Giải :

Không ngờ gợi ý cho lời giải bài toán này lại là một đẳng thức lớp một: « 1 với 1 là 2 ». Và để thực hiện phép cộng hai cạnh thành ra đường chéo đó, ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Ptolemy.

Xét lục giác *ABCDEF*. Xét tam giác *ACE*. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử *CE* là cạnh lớn nhất trong tam giác. Áp dụng bất đẳng thức Ptlemy cho tứ giác *ACDE*, ta có

$$AC.DE + AE.CD \geq AD.CE$$

Từ đó, do $CD = DE = 1$ và $\mathrm{CE} \geq \mathrm{AC}, \mathrm{CE} \geq \mathrm{AE}$ nên ta suy ra $AD \leq 2$ (đpcm).

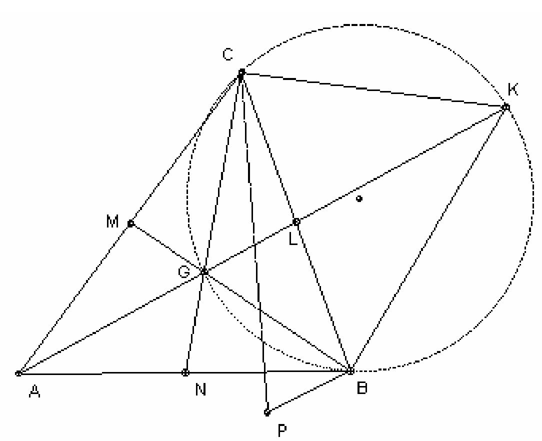
Vd3. (IMO SL 1997) Cho lục giác lồi *ABCDEF* có $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Chứng minh rằng $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác *ACDE* ta được $DE.AC + DC.AE \geq DA.CE$. Sử dụng $DE = DC$, ta được $DE(AC + AE) \geq DA.CE$ hay $\frac{DE}{DA} \geq \frac{CE}{AC + AE}$ Tương tự, ta có $\frac{FA}{FC} \geq \frac{EA}{CE + CA}$ & $\frac{BC}{BE} \geq \frac{EA}{EA + EC}$. Cộng các bất đẳng thức này lại và sử dụng bất đẳng thức Nesbitt ta thu được điều phải chứng minh.

Để có dấu bằng ta phải có dấu bằng ở ba bất đẳng thức Ptolemy và ở bất đẳng thức Nesbitt. Dấu bằng ở bất đẳng thức Nesbitt xảy ra khi tam giác *ACE* đều, như thế $\widehat{CAE} = 60^o$. Vì *ACDE* là tứ giác nội tiếp nên góc *D* phải bằng 120^o. Bây giờ các tam giác *ABC, CDE, EFA* phải bằng nhau (Tam giác *ABC* cân, vì vậy các góc của nó bằng 30^o, 120^o, 30^o và cạnh *AC* là cạnh của tam giác đều). Như thế lục giác có tất cả các cạnh đều bằng nhau và tất cả các góc bằng 120^0, vậy nó là lục giác đều. Ngược lại, hiển nhiên là với lục giác đều, ta có dấu bằng xảy ra.

Vd 4: (IMO 2001) Cho tam giác *ABC* với trọng tâm *G* và độ dài các cạnh $a = BC, b = CA, c = AB$. Tìm điểm *P* trên mặt phẳng tam giác sao cho đại lượng $AP.AG + BP.BG + CP.CG$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó theo *a, b, c*.



Giải:

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác *BGC*. Nối dài trung tuyến *AL* cắt đường tròn này tại *K*. Gọi *M, N* là trung điểm các cạnh *AC, AB* tương ứng.

Áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác *BGL*, ta có $\frac{BG}{\sin BLG} = \frac{BL}{\sin BGK}$.

Tương tự, áp dụng định lý hàm số sin cho *CGL*, ta có $\frac{CG}{\sin CLG} = \frac{CL}{\sin CGK}$. Nhưng *L* là trung điểm của *BC* và $\sin BLG = \sin CLG$, nên $\frac{BG}{CG} = \frac{\sin CGK}{\sin BGK}$. Ta có

$BK = 2R.\sin(BGK)$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Tương tự $CK = 2R\sin CGK$, do đó $\frac{CK}{BK} = \frac{BG}{CG}$, và từ đây $\frac{BG}{CK} = \frac{CG}{BK}$

Tương tự, $\frac{AG}{BG} = \frac{\sin BGN}{\sin AGN} = \frac{\sin BGN}{\sin CGK}$ (góc đối nhau). Hơn nữa

$BC = 2.R.\sin(BKC) = 2.R.\sin(BGN)$ (Vì $BGCK$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BKC} = \widehat{BGN}$. Từ đó $\frac{BC}{CK} = \frac{\sin BGN}{\sin CGK} = \frac{AG}{BG}$, từ đó $\frac{BG}{CK} = \frac{AG}{BC}$ và $BC : CK : BK = AG : BG : CG$.

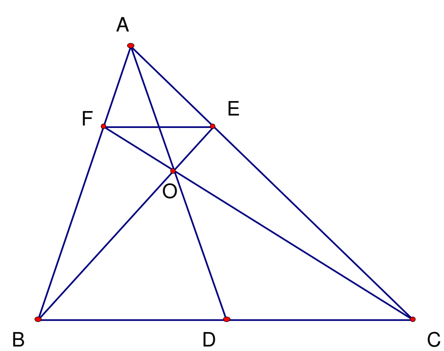
Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $PBKC$: $PK.BC \le BP.CK + CP.BK$. Từ đó $PK.AG \le BP.BG + CP.CG$. Suy ra $(AP + PK)AG \le AP.AG + BP.BG + CP.CG$ và cuối cùng $AK.AG \le AP.AG + BP.BG + CP.CG$ với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi (1) P nằm trên đường tròn giữa C và B (để có đẳng thức ở BDT Ptolemy) và (2) P nằm trên AK (để có đẳng thức trong bất đẳng thức tam giác). Do đó giá trị này đạt được khi $P = G$.

Dễ dàng tính được rằng $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

Có thể thấy đây là trường hợp đặc biệt của bài toán Toricelli tổng quát mà chúng ta đã xem xét ở phần đầu. Chú ý rằng từ ba đoạn *AG, BG, CG* có thể dựng được 1 tam giác Δ. Ta chỉ cần dựng tam giác *BCK* đồng dạng với tam giác Δ là được. Cách giải nêu trên chỉ ra cách dựng tường minh cho điểm *K*.

Vd 5: Cho tam giác *ABC*. Gọi *D* là trung điểm của *BC, E, F* lần lượt là hai điểm trên *AB* và *AC*. Chứng minh rằng nếu *AD, BF, CE* đồng quy thì *EF* song song với *BC*.

Giải :



Áp dụng định lí Ceva ta có:

$$\frac{EA}{EB}\frac{DB}{DC}\frac{FC}{FA} = 1$$

Vì $DB = DC$ nên $\frac{EA}{EB}\frac{FC}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FC}$

Vậy *EF* song song *BC*.

Vd 6:Trên các cạnh *AB, BC, CA* của tam giác *ABC*, ta lấy các điểm C_1, A_1, B_1 sao cho các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm *O*. Đường thẳng vẽ qua *O* song song với *AC* cắt các đường thẳng A_1B_1 và B_1C_1 tương ứng tại *K, M*. Chứng minh: $OK = OM$.

Giải :

Vẽ qua *B* đường thẳng song song *AC* (như hình vẽ)

Mệnh đề cần cm $BM_1 = BK_1$

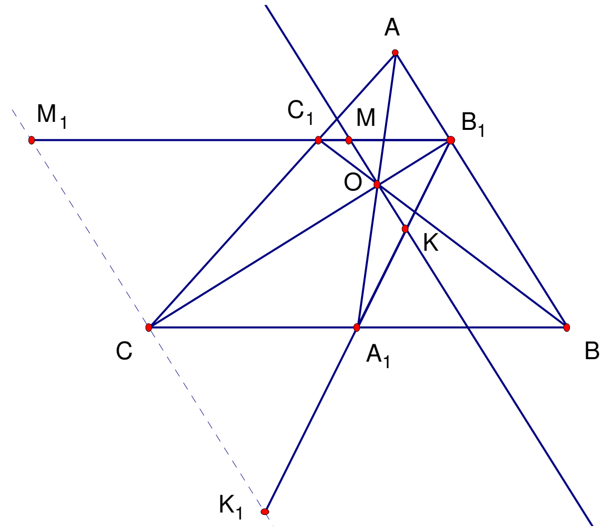
Từ các tam giác đồng dạng AB_1C_1 và BM_1C_1 suy ra

$BM_1 = AB_1 \dfrac{BC_1}{AC_1}$

Tương tự ta có: $BK_1 = CB_1 \dfrac{BA_1}{CA_1}$

Chia các đẳng thức và theo định lý Ceva ta có:

$\dfrac{BM_1}{BK_1} = \dfrac{AB_1}{CB_1}\dfrac{CA_1}{BA_1}\dfrac{BC_1}{AC_1} = 1$ (đpcm)



Vd 7: Cho tam giác *ABC*. Vẽ phía ngoài các tam giác *ABX, BCY* và *CAZ* cân tại *X, Y, Z* và đồng dạng với nhau. Chứng minh *AY, BZ* và *CX* đồng quy.

<u>Giải:</u>

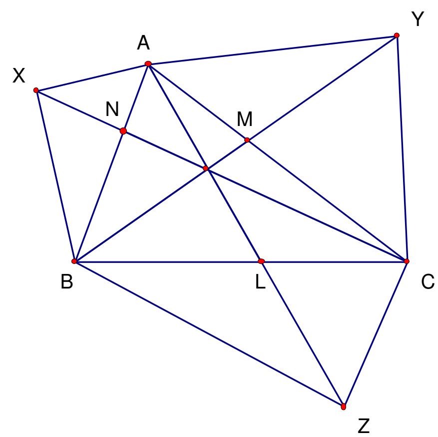
Gọi x là số đo góc đáy của tam giác cân và các giao điểm L, M, N (như hình vẽ).

Ta có: $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{S_{ABY}}{S_{ACY}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB.BY.\sin(B+x)}{\frac{1}{2}CA.CY.\sin(C+x)} = \dfrac{BA.\sin(B+x)}{CA(C+x)}$

Tương tự .

Từ đó ta có: $\dfrac{BL}{LC}\dfrac{CM}{MA}\dfrac{AN}{NB} = 1$

Vậy *AL, BM, CN* đồng quy (đpcm).



Vd 8: Cho nữa đường tròn (*C*) nằm về một phía của đường thẳng (*d*). *C* và *D* là các điểm trên (*C*) . Các tiếp tuyến của (*C*) tại *C* và *D* cắt (*d*) tại *B* và *A*, và tâm đường nằm giữa hai điểm này. Gọi *E* là giao điểm của *AC* và *BD*, *F* là điểm nằm trên (*d*) sao cho *EF* vuông góc với (*d*). Chứng minh *EF* là phân giác góc *CFD*.

<u>Giải:</u>

Gọi *P* là giao điểm của *AD* và *BC*. Qua *P* dựng *PH* vuông góc (*d*).

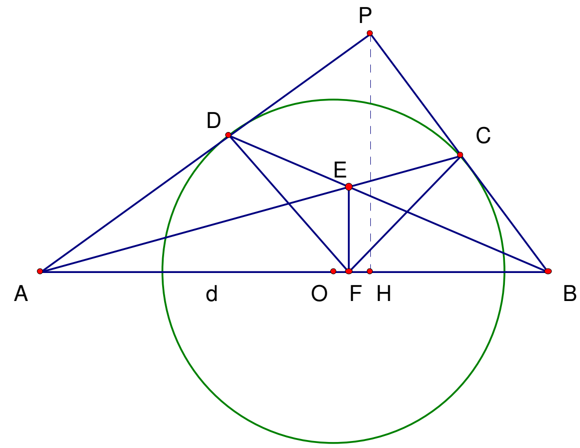
Ta có tam giác *PAH* và *ODA* đồng dạng nên $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{HP}{DO}$

Tương tự: $\dfrac{HB}{BC} = \dfrac{HP}{CO} = \dfrac{HP}{DO}$, từ đó ta có: $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{BH}{BC}$

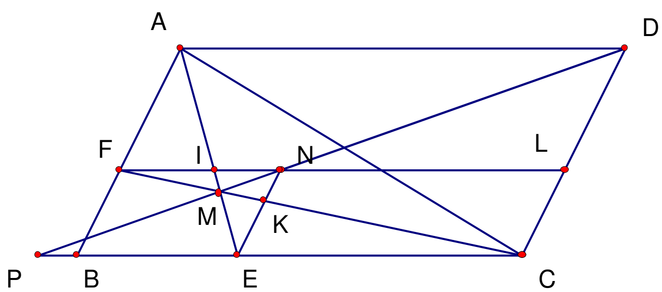
Suy ra: $\frac{AH}{HB}.\frac{BC}{CP}.\frac{PD}{DA}=1$

Theo định lý Ceva AC, BD, PH đồng quy, suy ra PH trùng FE

Dễ thấy 5 điểm P, D, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó: $\widehat{DHP}=\widehat{DOP}=\widehat{COP}=\widehat{CHP}$



Vd 9: Cho tam giác ABC. Lấy điểm M trong tam giác. AM cắt BC tại E, CM cắt AB tại F. Gọi N là điểm đối xứng của B qua trung điểm của EF. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di chuyển bên trong tam giác ABC.



Giải :

Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi các giao điểm như hình vẽ.

Ta có $BENF$ là hình bình hành.

Suy ra:

$$\frac{IF}{IN}=\frac{FA}{EN};\frac{KN}{KE}=\frac{FN}{EC};\frac{HE}{HF}=\frac{PE}{FN} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\frac{PE}{NE}=\frac{NL}{DL}=\frac{EC}{FA}\Rightarrow PE=\frac{NE.EC}{FA} \quad hay \quad \frac{PE}{FN}=\frac{NE.EC}{FN.FA}(2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\frac{IF}{IN}.\frac{KN}{KE}.\frac{HE}{HF}=1$

Theo định lý Ceva : NH, FK, EI đồng quy, suy ra D, N, M thẳng hàng. Vậy MN luôn đi qua điểm cố định D khi M di động trong tam giác ABC.

Vd 10: Cho tam giác ABC với $AB > AC$. Gọi P là giao điểm của đường trung trực BC và đường phân giác trong của góc A. Dựng các điểm X trên AB và Y trên AC sao cho PX vuông góc AB và PY vuông góc AC. Gọi Z là giao điểm của XY và BC. Xác định giá trị tỷ số $\frac{BZ}{ZC}$.

Giải:

Ta có $\Delta PAX=\Delta PAY$, suy ra $AX=AY$ và $PX=PY$

Suy ra $\Delta PYC=\Delta PXB$, suy ra $CY=BX$

Vì X, Y, Z thẳng hàng, áp dụng định lý Menelaus ta được

Vd 11: Cho $C(O,R)$ là đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.Cho điểm *M* nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của *M* lên ba cạnh *BC,AC,AB*.Chứng minh rằng:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2}$$

Giải:

Xét vị trí điểm *M* nằm trong $\widehat{BAC}$ và nằm ngoài (O) (các trường hợp khác tương tự). Ta có tứ giác MA_1CB_1 nội tiếp đường tròn đường kính *MC* nên $A_1B_1 = MC\sin C$, tương tự thì $B_1C_1 = MA\sin A$.

Gọi *D* là giao điểm của *MC* với đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Ta có:

$\widehat{MB_1A_1} = \widehat{MCA_1} = \widehat{BAD}$ và $\widehat{C_1B_1M} = \widehat{C_1AM}$.

Mặt khác:

$\widehat{A_1B_1C_1} = \widehat{MB_1A_1} - \widehat{MB_1C_1} = \widehat{DAB} - \widehat{MAC_1} = \widehat{MAD}$

Xét tam giác *ADM*, theo định lý sin ta có: $\dfrac{AM}{sin\widehat{ADM}} = \dfrac{DM}{sin\widehat{MAD}} = \dfrac{DM}{sin\widehat{A_1B_1C_1}}$

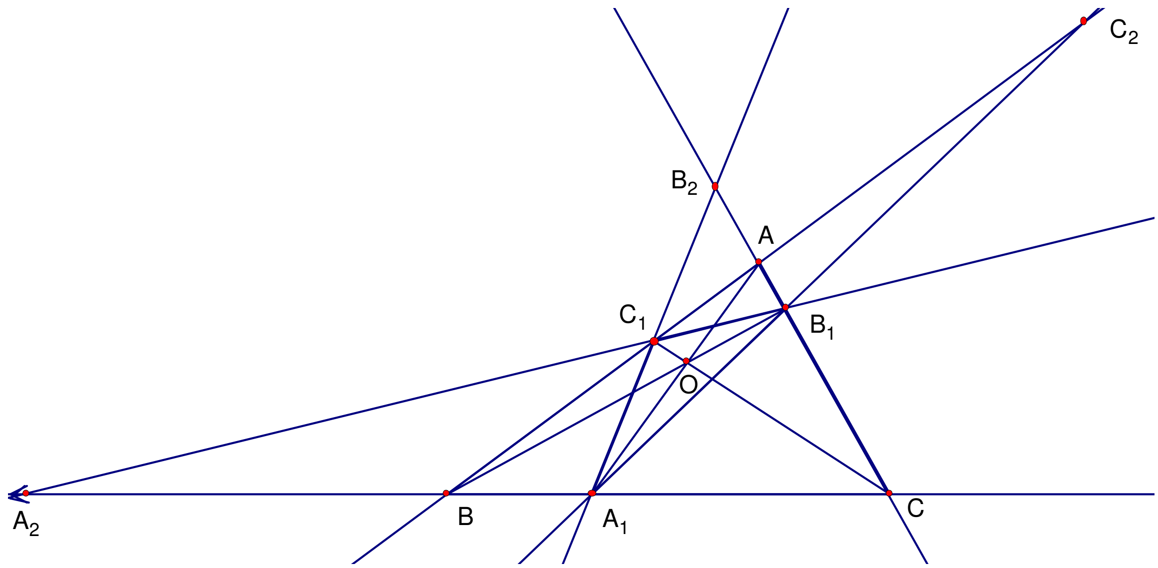
Suy ra: $AMsin\widehat{A_1B_1C_1} = DMsin\widehat{ADM}$. Từ đó ta có:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}B_1A_1.C_1B_1.sin\widehat{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}.MCsinC.MAsinA.sin\widehat{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}MC.MD.sinAsinBsinC$$

Mặt khác, ta lại có: $S_{ABC} = 2R^2 sinAsinBsinC$ và $MC.MD = P_{M/(O)} = |OM^2 - R^2|$ nên:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left|\frac{R^2 - OM^2}{4R^2}\right|$$

Vd 12: Cho tam giác và ba điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng nằm trên ba cạnh *BC, CA, AB* sao cho các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại *O*. Giả sử ba cặp *AB* và A_1B_1, BC và B_1C_1, CA và C_1A_1 lần lượt cắt nhau tại C_2, A_2, B_2. Chứng minh C_2, A_2, B_2 thẳng hàng.



Giải :

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD với các điểm

$$\Delta OAB \;\&\; A_1, B_1, C_2 : \frac{AA_1}{OA_1}\frac{OB_1}{BB_1}\frac{BC_2}{AC_2} = 1 \quad (1)$$

$$\Delta OBC \;\&\; B_1, C_1, A_2 : \frac{OC_1}{CC_1}\frac{BB_1}{OB_1}\frac{CA_2}{BA_2} = 1 \quad (2)$$

$$\Delta OAC \;\&\; A_1, C_1, B_2 : \frac{OA_1}{AA_1}\frac{CC_1}{OC_1}\frac{AB_2}{CB_2} = 1 \quad (3)$$

Nhân vế theo vế ta có: $\dfrac{BC_2}{AC_2}\dfrac{CA_2}{BA_2}\dfrac{AB_2}{CB_2} = 1$

Áp dụng định lý Menelaus (phần đảo) ta suy ra đpcm.

Vd 13: Cho ABC là một tam giác không cân. Các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại các điểm thứ hai L, M, N. Giả sử $LM = LN$, chứng minh:

$$2BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Giải :

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có:

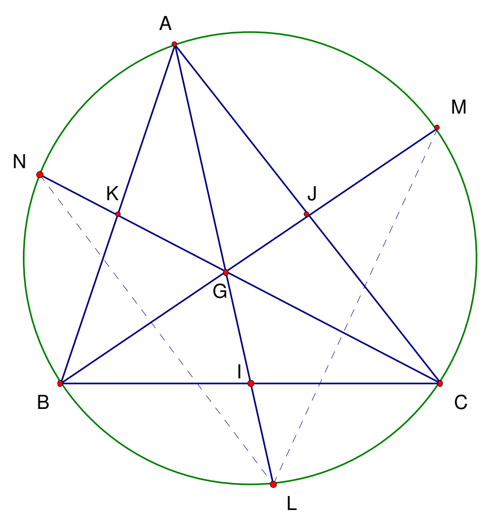
$$\Delta NLG \sim \Delta AGL \Rightarrow \frac{LN}{AC} = \frac{LG}{GC}.$$

Tương tự:

$$\frac{LM}{AB} = \frac{GL}{BG},$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BG}{CG}$$



Áp dụng định lí Stewart ta có:

$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{2AB^2+2BC^2-AC^2}{2AC^2+2BC^2-AB^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(AC^2-AB^2\right)\left(2BC^2-AB^2-AC^2\right)=0$$

Do tam giác ABC không cân nên $\Leftrightarrow 2BC^2=AB^2+AC^2$

III. Một số bài toán chọn lọc:

1. Cho tam giác ABC thoả $b=\frac{1}{2}(a+c)$ chứng minh rằng: $\cos(A-C)+4\cos B=3$

Giải:

Nếu $a=c$, kiểm tra ta thấy đúng.

Nếu $a\neq c$, lấy D trên AC sao cho DB bằng a. Đặt $AD=x$

Theo định lí Stewart ta có:

$$c^2(b+x)+(b+x)bc=a^2b+a^2x$$

$$\Leftrightarrow bx^2+\left(c^2+b^2-a^2\right)x-b\left(a^2-c^2\right)=0$$

Thay $b=\frac{1}{2}(a+c)$ ta được:

$$x^2+\frac{1}{2}(5c-3a)-\left(a^2-c^2\right)=0\Rightarrow x=2(a-c)$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABD ta có:

$$\cos(A-C)=\frac{1}{2ac}\left(a^2+c^2-x^2\right)=\frac{1}{2ac}\left(8ac-3a^2-3c^2\right)$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC ta có

$$4\cos B=4\frac{1}{2ac}\left(a^2+c^2-b^2\right)=\frac{1}{2ac}\left(3a^2+3c^2-2ac\right)$$

Từ đó suy ra: $\cos(A-C)+4\cos B=3$

2. Tam giác ABC có $\sin^2 A,\sin^2 B,\sin^2 C$ lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng $\frac{3}{2}$. Đường cao kẻ từ A và đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC cắt nhau tại *I*, *I* thuộc miền trong tam giác ABC. Chứng minh rằng: $S_{IAC}=S_{IBC}$ (S_{IAC},S_{IBC} là diện tích tam giác *IAC,IBC*)

Giải:

Vẽ đường cao *AH*, phân giác trong *BD, CI* cắt *AB* tại *M.*

Đặt : $BC=a, CA=b, AB=c$

Vì *I* thuộc miền trong tam giác *ABC*, nên các góc *B* và *C* đều nhọn.

Từ giả thiết, ta suy ra : $\sin^2 B=\frac{1}{2}\ \&\ \sin^2 A+\sin^2 C=1$

$\Rightarrow \sin B = \cos B \,\&\, \sin A = \sin C$

Theo định lý Céva :

$$\frac{MA}{MB}\frac{HB}{HC}\frac{DC}{DA} = 1 \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{HC}{HB}\frac{DA}{DB}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{b\cos C}{c\cos B}\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{BM} = \frac{\sin B \sin C}{\cos B \sin A} = 1$$

Do đó M là trung điểm của AB.

Hạ AE và BF vuông góc với CM thì $AE = BF$

Từ đó suy ra : $S_{IAC} = S_{IBC}$

3. Cho tam giác ABC. Một đường tròn bất kì cắt các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại Q, M, S, P, N, R như hình vẽ $PQ \cap RS = \{X\}, RS \cap MN = \{Y\}, PQ \cap MN = \{Z\}$ .Cmr AX, BY, CZ đồng quy.

Giải :

Áp dụng định lý Ceva cho tam giác AQR.

$$\frac{\sin A_1}{\sin A_2}\frac{\sin \widehat{XQR}}{\sin \widehat{XQA}}\frac{\sin \widehat{XRA}}{\sin \widehat{XRQ}} = 1 \quad (1)$$

tương tự cho tam giác BMS, tam giác CNP ta có:

$$\frac{\sin B_1}{\sin B_2}\frac{\sin \widehat{YSM}}{\sin \widehat{YSB}}\frac{\sin \widehat{YMB}}{\sin \widehat{YMS}} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{\sin C_1}{\sin C_2}\frac{\sin \widehat{ZNP}}{\sin \widehat{ZNC}}\frac{\sin \widehat{ZPC}}{\sin \widehat{ZPN}} = 1 \quad (3)$$

Nhân (1), (2), (3) đồng thời, lưu ý rằng $\sin \widehat{XQR} = \sin \widehat{YSB}$, ta có:

$$\frac{\sin A_1}{\sin A_2}\frac{\sin B_1}{\sin B_2}\frac{\sin C_1}{\sin C_2} = 1 \Rightarrow \text{ đpcm.}$$

4. Cho tứ giác lồi $ABCD$ thỏa điều kiện $\widehat{BAD} > 90^0$ .Chứng minh rằng nếu MN và BD cắt nhau tại I thì IA vuông góc AC.

Giải :

Nếu $M \equiv C$ (hay $N \equiv C$) thì $I \equiv D$ (hay $I \equiv B$). Lúc đó bài toán đúng.

Nếu $I \neq B$ (hay $I \neq D$), áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD với 3 điểm M, N,I ta có:

$$\frac{MB}{MC}\frac{NC}{ND}\frac{ID}{IB} = 1 \Leftrightarrow \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}}\frac{S_{ANC}}{S_{AND}}\frac{S_{AID}}{S_{AIB}} = 1 \Leftrightarrow \frac{AB\sin A_5}{AC\sin A_4}\frac{AC\sin A_3}{AD\sin A_2}\frac{AD\sin A_1}{AB\sin \widehat{IAB}} = 1$$

$\Leftrightarrow \sin A_1 \sin A_3 = \sin A_4 \sin \widehat{IAB} \left(do \quad \sin A_2 = \sin A_5 \right)$

$\Leftrightarrow \sin A_1 \sin A_3 = \cos\left(A_2 + A_3\right)\cos\left(A_1 + A_2\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos\left(A_1 - A_3\right)\cos\left(A_1 + A_3\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(A_1 + 2A_2 + A_3\right)\cos\left(A_1 - A_3\right)\right]$

$\Leftrightarrow \cos\left(A_1 + A_2 + A_3\right) = 0$

Vậy $IA \perp AC$.

5. Cho lục giác lồi $ABCDEF$ thỏa điều kiện $AB = BC, CD = DE \,\&\, EF = FA$. Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \ge \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải:

Đặt $AC = a, CE = b, AE = c$. Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $ACEF$ ta có:

$AC.EF + CE.AF \ge AE.CF$

Vì $EF = FA$ nên suy ra: $\frac{FA}{FC} \ge \frac{c}{a+b}$

Tương tự ta cũng có: $\frac{DE}{DA} \ge \frac{b}{c+a} \,\&\, \frac{CB}{BE} \ge \frac{a}{b+c}$. Từ đó suy ra:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \ge \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi các bất đẳng thức ở (1) đồng thời xảy ra, tức là khi các tứ giác $ACEF, ABCE, ACDE$ nội tiếp được, nghĩa là khi $ABCDEF$ là một lục giác nội tiếp. Ngòai ra để cho đẳng thức xảy ra, bất đẳng thức cuối cùng cũng phải trở thành đẳng thức, tức là ta phải có $a = b = c$ Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ABCDEF$ là một lục giác đều.

(Bất đẳng thức cuối cùng ta có thể chứng minh bằng nhiều cách, chúng tôi sẽ đưa ra hai cách chứng mình được coi là cơ bản và dễ hiểu:

Cách 1:

Đặt $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Ta có: $S + 3 = \left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)$

Mà theo BCS ta có:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \ge \frac{9}{2\left(a+b+c\right)}$$

Suy ra đpcm.

Cách 2:

Đặt $x = a+b, y = a+c, z = b+c$. Khi đó:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 3\right) \ge \frac{3}{2}\Bigg)$$

6. Giả sử $n(r)$ là số tất cả các điểm có tọa độ nguyên trên một đường tròn có bán kính $r>1$. Chứng minh rằng: $n(r)<6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

Giải:

Xét đường tròn bán kính r có chứa n điểm có tọa độ nguyên trên đó. Ta cần chứng minh $n<6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

Vì $r>1$ và $6\sqrt[3]{\pi}>8$ nên ta có thể giả sử $n>8$ Gọi n điểm có tọa độ nguyên nói trên là $P_1, P_2, ..., P_n$, nằm theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ. Do tổng các cung $P_1P_3, P_2P_4, ..., P_nP_2$ bằng 4π nên một trong các cung P_iP_{i+2} sẽ có số đo lớn nhất là $\frac{4\pi}{n}$, và không mất tính tổng quát, ta giả sử đó là cung P_1P_3.

Xét tam giác ABC nội tiếp trong cung chứa góc $\frac{4\pi}{n}$. Diện tích tam giác này lớn nhất khi hai điểm A,C trùng với hai đầu cung, và điểm B là giao điểm của trung trực AC với đường tròn (khi ấy, khỏang cách từ B đến đường thẳng AC lớn nhất). Tại đây, ta có:

$$\widehat{CAB}=\widehat{BCA}=\frac{\pi}{n} \;\&\; \widehat{ABC}=180^0-\frac{2\pi}{n}$$

Do đó: $[ABC]=\dfrac{abc}{4r}=\dfrac{\left(2r\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(2r\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(2r\sin\frac{\pi}{n}\right)}{4r}$

$$\leq\frac{\left(2r\frac{\pi}{n}\right)\left(2r\frac{2\pi}{n}\right)\left(2r\frac{\pi}{n}\right)}{4r}=\frac{4r^2\pi^3}{n^3}$$

Vì tam giác $P_1P_2P_3$ nội tiếp trong cung chứa góc $\frac{4\pi}{n}$ nên theo kết quả trên ta có:

$$[P_1P_2P_3]\leq\frac{4r^2\pi^3}{n^3}$$

Mà P_1, P_2, P_3 là các điểm có tọa độ nguyên nên giá trị bé nhất của $[P_1P_2P_3]$ là $\frac{1}{2}$ (có thể chứng minh điều này bằng định lí Pick). Vì vậy ta có:

$$\frac{1}{2}\leq[P_1P_2P_3]\leq\frac{4r^2\pi^3}{n^3}\Rightarrow n^3\leq 8r^2\pi^3\Rightarrow n\leq 2\pi\sqrt[3]{r^2}<6\sqrt[3]{\pi r^2}$$

IV. Bài tập tự luyện:

1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và $AC=2AB$. Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau tại P. Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung BAC.

2. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm G. Giả sử rằng $\widehat{OIA}=90^0$. Chứng minh rằng IG song song với BC.

3. (IMO Shortlist) Giả sử M,N là các điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MAB}=\widehat{NAC}$, $\widehat{MBA}=\widehat{NBC}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{AM.AN}{AB.AC}+\frac{BM.BN}{BA.BC}+\frac{CM.CN}{CA.CB}=1$$

4. (VMO 1997) Trong mặt phẳng, cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm P nằm trong được tròn $(OP=d<R)$.Trong tất cả các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) và có hai đường chéo AC và BD vuông góc và cắt nhau tại P, hãy tìm tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất này theo R và d.

5. (Bulgaria 2007) Cho tam giác ABC có $BC>AB>AC$ và $\cos A+\cos B+\cos C=\frac{11}{8}$. Xét các điểm X thuộc BC và Y thuộc AC kéo dài về phía C sao cho $BX=AY=AB$.

a) Chứng minh rằng $XY=\frac{AB}{2}$.

b) Gọi Z là điểm nằm trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác không chứa C sao cho $ZC=ZA+ZB$. Hãy tính tỷ số $\frac{ZC}{XC+YC}$

6. Cho tam giác ABC với BE, CF là các đường phân giác trong. Các tia EF, FE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{BM}+\frac{1}{CN}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CM}$$

7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') nằm trong (O) tiếp xúc với (O) tại T thuộc cung AC (không chứa B). Kẻ các tiếp tuyến AA', BB', CC' tới (O'). Chứng minh rằng: $BB'.AC=AA'.BC+CC'.AB$.

8. (Định lý Thebault) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). D là trung điểm của BC. Gọi $(O_1),(O_2)$ là các đường tròn nằm trong (O), tiếp xúc với (O), BC và AD. Khi đó đường thẳng nối tâm của $(O_1),(O_2)$ đi qua I. Hãy chứng minh.

9. (CMO 1988, Trung Quốc) Cho $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp với đường tròn ngoại tiếp có tâm O và bán kính R. Các tia AB, BC, CD, DA cắt đường tròn tâm O bán kính $2R$ lần lượt tại A',B',C',D'. Chứng minh rằng chu vi tứ giác $A'B'C'D'$ không nhỏ hơn hai lần chu vi tứ giác $ABCD$.

10. Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC của đường tròn để $AB+2AC$ đạt giá trị lớn nhất.

11. Lục giác lồi $ABCDEF$ có ABF là tam giác vuông cân tại A, $BCEF$ là hình bình hành. $AD=3$, $BC=1, CD+DE=2\sqrt{2}$. Tính diện tích lục giác.

12. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn tâm *O, P* và *Q* là hai điểm thuộc (*O*) sao cho *PQ* song song với *AB*. *AD* là đường cao của tam giác *ABC*. Gọi *a* là đường thẳng simson của điểm *P* ứng với tam giác *ABC*, *b* là đường thẳng simson của điểm *Q* ứng với tam giác *ABC*. CMR: (*a*), (*b*) và *AD* đồng quy.

13. Cho n giác đều và một điểm M chuyển động trên đường tròn ngoại tiếp đa giác ấy. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = const\,.$$

PHẦN II: BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN
CHƯƠNG I: TỨ DIỆN.
BÀI 1: ƯỚC LƯỢNG HÌNH HỌC.

1. Vài ước lượng các yếu tố của một tam giác:

Ta có nhận xét: Một tam giác đều với cạnh bằng 1, có ba đường cao bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$, diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$, và bán kính (hình tròn nội tiếp) bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nhận xét này là xuất phát điểm của bài toán sau đây về ước lượng.

Bài to¸n 1: Cho một tam giác, độ dài mỗi cạnh của nó không vượt quá 1. Chứng minh rằng tam giác ấy có:

a) Ít nhất hai đường cao với độ dài $\le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Diện tích $\le \frac{\sqrt{3}}{4}$.

c) Bán kính đường tròn nội tiếp $\le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Giải:

a) Trong một tam giác, đường cao có độ dài không vượt quá độ dài trung tuyến xuất phát cùng một đỉnh, nên để CM a) ta CM một kết quả mạnh hơn: một tam giác thỏa mãn điều kiện bài toán thì có ít nhất hai trung tuyến với độ dài $\le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Gọi độ dài các cạnh tam giác đã cho là *a, b, c*. Luôn có thể coi rằng: $0 < c \le b \le a \le 1$.

Gọi m_a, m_b, m_c, là các độ dài của các trung tuyến ứng với cạnh ấy. Theo công thức tính trung tuyến, ta có:

$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2b^2} + \frac{c^2}{21} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$2m_b^2 = c^2 + a^2 - \frac{b^2}{2c^2} + \frac{a^2}{21} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Từ đó suy ra $m_a \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $m_b \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Nhận xét:</u> Tam giác cân với độ dài ba cạnh bằng $1,1,2c$ có một đường cao (đồng thời là đường trung tuyến) có độ dài $\sqrt{1-c^2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, khi c khá nhỏ. Điều đó đã chứng tỏ không thể cải tiến hơn kết quả đã phát biểu ở a).

b) $S = \frac{a.h_a}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$

c) Ta có nhận xét: một tam giác được chứa trong một tam giác (lớn hơn) đồng dạng với nó, với tỉ số đồng dạng $k \geq 1$; hơn nữa, nếu một tam giác được chứa trong một tam giác khác (không cần đồng dạng), thì bán kinh nội tiếp của tam giác thứ nhất không vượt qua bán kính nội tiếp của tam giác thứ 2, bởi vì hình tròn nội tiếp của một tam giác là hình tròn lớn nhất được chứa trong tam giác ấy.

Nếu tam giác *ABC* có cạnh lớn nhất *a* = *BC* lớn hơn *1*, thì ta xét tam giác đồng dạng $k = \frac{1}{a} > 1$. Nên ta có thể coi rằng $a = BC = 1, b = AC \leq 1, c = AB \leq 1$

Khi đó, tam giác *ABC* được chứa trong tam giác cong *BCD* chắn bởi *BD, CD* của hai đường tròn tâm *B, C* và bán kính $BC = 1$.

(hình)

Gọi *I* là trung điểm của đoạn BC, A' là hình chiếu vuông góc của *A* lên DI, r' là bán kính nội tiếpcủa tam giác $A'BC$. Tam giác $A'BC$ được chứa trong tam giác đều *BCD* (có bán kính nội tiếp bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$) nên $r' \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vì vậy, để chứng minh c) ta chỉ việc chứng minh rằng $r \leq r'$.

Để ý rằng, A'BC là tam giác cân có cùng đáy *BC* và cùng độ dài đường cao *AI* = *AH* như tam giác *ABC*. Bđt $r \leq r'$ là hệ quả của bài toán 2 sau đây:

Bài toán 2: Giả sử tam giác *ABC* có diện tích $S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$. CMR tam giác có: a) Ít nhất một đường cao b) Bán kính nội tiếp $r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài toán 3: *CMR nếu cả ba đường cao của một tam giác là* $\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ *thì tam giác có bán kính nội tiếp* $r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài toán 4: *CMR nếu tam giác có bán kính nội tiếp* $r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ *thì nó có ít nhất 1 đường cao* $h \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>2. Vài ước lượng các yếu tố của một tứ diện:</u>

Trong không gian, tứ diện đều với độ dài cạnh bằng 1 có 4 đường cao bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$, thể tích bằng $\frac{\sqrt{2}}{12}$ và bán kính hình cầu nội tiếp bằng $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Từ nhận xét trên ta có bài toán:

> Bài toán 1: Cho tứ diện với độ dài mỗi cạnh không vượt quá 1. CMR tứ diện ấy có ít nhất 2 đường cao $\leq \frac{\sqrt{6}}{3}$.
>
> *a)* Thể tích $\leq \frac{\sqrt{2}}{12}$.
>
> *b)* Bán kính mặt cầu nội tiếp $\leq \frac{\sqrt{6}}{12}$.

<u>Giải:</u>

a) Ta có nhận xét: Độ dài trung tuyến của một tứ diện không nhỏ hơn độ dài đường cao xuất phát từ cùng đỉnh. Vậy để chứng minh ta chứng minh một kết quả mạnh hơn: Một tứ diện thoả mãn điều kiện bài toán phải có ít nhất hai trung tuyến với độ dài $\leq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Trước tiên ta biểu diễn độ dài trung tuyến *AG* của tứ diện *ABCD* theo các cạnh với *G* là trung điểm của tam giác *BCD*.

Gọi *I* là trung điểm *CD*, ta có *BG = 2GI*. Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên *BI*. Vì *H* có thể nằm trong hoặc ngoài đoạn *BI* nên ta sẽ dùng độ dài đại số.

Ta có :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = (\overline{BG} + \overline{GH})^2 = AB^2 - BG^2 - GH^2 - 2\overline{BG}\overline{GH}$$

$$\Leftrightarrow AH^2 + GH^2 = AG^2 = AB^2 - \frac{4}{9}BI^2 - 2\overline{BG}\overline{GH} \qquad (1)\left(do \quad \frac{2}{3}\overline{BI} = \overline{BG}\right)$$

$$AH^2 = AI^2 - HI^2 = AI^2 - (\overline{HG} + \overline{GI})^2$$

$$\Leftrightarrow AG^2 = AI^2 - \frac{1}{9}BI^2 - 2\overline{HG}.\overline{GI} \qquad (2) \quad \left(do \quad \frac{1}{3}\overline{BI} = \overline{GI}\right)$$

$$(1) \,\&\, (2) \Rightarrow 3AG^2 = 2AI^2 + AB^2 - \frac{2}{3}BI^2 \qquad (3)$$

Vì *AI* là trung tuyến của tam giác *ACD, BI* là trung tuyến của tam giác *BCD*, nên theo công thức trung tuyến của mét tam giác ta có:

$$2AI^2 = AC^2 + AD^2 - \frac{1}{2}CD^2 \quad (4)$$

$$2BI^2 = BC^2 + BD^2 - \frac{1}{2}CD^2 \quad (5)$$

Vậy cuối cùng, từ (3), (4), (5) ta suy ra

$$3AG^2 = \left(AB^2 + AC^2 + AD^2\right) - \frac{1}{3}\left(BC^2 + CD^2 + DB^2\right)$$

Đó là công thức tính trung tuyến của một tứ diện theo các cạnh của tứ diện ấy. Trong công thức ta đặt:

$d(A)=AB^2+AC^2+AD^2$ (là tổng bình phương các cạnh xuất phát từ đỉnh A)

$s(A)=BC^2+CD^2+DB^2$ (là tổng bình phương các cạnh của mặt đối đỉnh A).

Cũng như trên ta kí hiệu *d(B), d(C), d(D)* lần lượt là tổng bình phương các cạnh xuất phát từ đỉnh *B, C, D* và kí hiệu *s(B), s(C), s(D)* là tổng bình phương các cạnh của mặt đối diện các đỉnh *B, C, D*. Kí hiệu $2k$ là tổng bình phương 6 cạnh của tứ diện. Hiển nhiên ta có

$$d(A)+s(A)=d(B)+s(B)=d(C)+s(C)=d(D)+s(D)=2k$$

và $d(A)+d(B)+d(C)+d(D)=s(A)+s(B)+s(C)+s(D)=4k$

Đặt $d(A)=k+\alpha$; $d(B)=k+\beta$; $d(C)=k+\gamma$; $d(D)=k+\delta$ th× ta cã:

$s(A)=k-\alpha$; $s(B)=k-\beta$; $s(C)=k-\gamma$; $s(D)=k-\delta$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$

Không mất tính tổng quát, ta có thể coi rằng $d(A)\le d(B)\le d(C)\le d(D)$

Tức là $\alpha\le\beta\le\gamma\le\delta$. Thế thì $4\alpha\le\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ (6)

Và $\alpha+3\beta\le\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ do đó $4\beta\le\beta-\alpha$ (7)

Gọi $m_A\,\&\,m_B$ là độ dài các trung tuyến của tứ diện, xuất phát từ các đỉnh *A* và *B*. Theo (5) và (6), ta có

$$3m_A^2=d(A)-\frac{1}{3}s(A)=(k+\alpha)-\frac{1}{3}(k-\alpha)=\frac{2}{3}k+\frac{4}{3}\alpha\le\frac{2}{3}\le 2 \quad (8)$$

Bởi vì theo giả thiết, độ dài mỗi cạnh của tứ diện ≤ 1, vậy $2k\le 6$. Từ (8) ta suy ra $m_A\le\frac{\sqrt{6}}{3}$ theo (6) và (7) , ta lại có

$$3m_B^2=d(B)-\frac{1}{3}s(B)=(k+\beta)-\frac{1}{3}(k-\beta)=\frac{2}{3}k+\frac{4}{3}\beta\le\frac{2}{3}k+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{1}{3}(k+\beta)+\frac{1}{3}(k-\alpha)\le\frac{1}{3}d(B)+\frac{1}{3}d(A)\le 2$$

Bởi do giả thiết của bài toán, ta có $d(B)\le 3\,\&\,s(A)\le 3$. Thành thử ta có $m_E\le\frac{\sqrt{6}}{3}$ (đpcm).

Ta có thể kiểm nghiệm rằng tứ diện có 5 cạnh bằng 1, cạnh thứ 6 bằng a, với $a>0$ khá nhỏ, có 2 đường cao $>\frac{\sqrt{6}}{3}$, vì vậy không thể cải thiện hơn kết quả đã nêu ở phần a) của bài toán.

b) Theo bài toán 1, mọi mặt của tứ diện có diện tích $\le\frac{\sqrt{3}}{4}$, do đó nếu lấy mặt ứng với một đường cao $\le\frac{\sqrt{6}}{3}$, thì ước lượng được thể tích của tứ diện đã cho

$V \le \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad (1.2)$

c) Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện đã cho, thế thì $3V = rS$ với r là bánh kính mặt cầu nội tiếp của tứ diện ấy. Ta có bất đẳng thức bổ đề

Trong một tứ diện tuỳ ý với thể tích V và diện tích toàn phần S, ta có

$$216\sqrt{3}V^2 \le S^3 \qquad (9)$$

(Mở rộng của bất đẳng thức $3\sqrt{3}S \le p^2$ liên hệ diện tích S và nửa chu vi p của một tam giác)

Theo b) ta có $V \le \frac{\sqrt{2}}{12}$, vì vậy $216\sqrt{3}V^2 \le S^3 = 27\frac{V^3}{r^3}$,

do đó $r^3 \le \frac{V}{8\sqrt{3}} \le \frac{1}{48}\sqrt{6} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3$

hay $r \le \frac{\sqrt{6}}{12}$. (đpcm)

Để đi đến bất đẳng thức (9), trước tiên ta phải chứng minh

Bài toán 2: Trong tất cả các tứ diện có cùng thể tích V và có đáy ABC cho trước, hãy xác định tứ diện có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Giải: Gọi D là đỉnh thứ tư của tứ diện, H là chân đường cao hạ từ D xuống đáy ABC. Vì H có thể nằm trong hay ngoài tam giác ABC nên hãy xác định khoảng cách đại số từ H đến các đường thẳng *BC, CA, AB* như sau

$$|x| = HA', |y| = HB', |z| = HC'$$

Với A', B', C' là các hình chiếu vuông góc của H lên *BC, CA, AB*. Đối với dấu của x, ta coi rằng $x > 0$ nếu H và A ở cùng về một phía đối với đường thẳng BC, $x = 0$ nếu H nằm trên đường thẳng BC, $x < 0$ nếu H và A ở về 2 phía đối với đường thẳng BC. Tương tự với cách xét dấu của y và z.

Với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, có thể thấy rằng trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$ax + by + cz = 2S \qquad (10)$$

với S là diện tích tam giác ABC.

Theo giả thiết của bài toán, $h = DH$ là không đổi, hơn nữa

$$2dt(DBC) = BC.OA' = a\sqrt{h^2+x^2} = \sqrt{a^2h^2+a^2x^2}$$

$$2dt(DCA) = CA.OB' = b\sqrt{h^2+y^2} = \sqrt{b^2h^2+b^2y^2}$$

$$2dt(DAB) = AB.OC' = c\sqrt{h^2+z^2} = \sqrt{c^2h^2+c^2z^2}$$

Như vậy, ta phải xác định *x, y, z* thoả điều kiện (10), sao cho biểu thức

$$T = \sqrt{a^2h^2+a^2x^2} + \sqrt{b^2h^2+b^2y^2} + \sqrt{c^2h^2+c^2z^2}$$

Đạt giá trị nhỏ nhất.

Sử dụng bất đẳng thức Minkowski, ta được

$$T \ge \sqrt{(ah+bh+ch)^2 + (ax+by+cz)^2} = \sqrt{4p^2h^2+4s^2} = 2\sqrt{p^2h^2+s^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{ax}{ah}=\frac{by}{bh}=\frac{cz}{ch}$$

Tức là $x = y = z$; khi đó T đạt giá trị nhỏ nhất

$$T_{\min}=\sqrt{(a+b+c)^2h^2+(ax+by+cz)^2}=2\sqrt{p^2h^2+s^2}$$

Với p là nửa chu vi tam giác ABC.

Tóm lại ta có kết luận:

Trong tất cả các tứ diện $OABC$ có cùng thể tích V, và có cùng đáy ABC cho trước tứ diện có diện tích toàn phần nhỏ nhất là tứ diện có chân H là đường cao OH trùng với tâm nội tiếp của tam giác ABC. Diện tích toàn phần nhỏ nhất ấy bằng $S_0=s+\sqrt{p^2h^2+s^2}$ trong đó s, p là diện tích và nửa chu vi của tam giác ABC và $h=OH=\frac{3V}{s}$.

Từ bài toán 2, ta chuyển sang

Bài toán 3: Trong các tứ diện có cùng thể tích V, và có cùng diện tích đáy s cho trước, hãy xác định tứ diện có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

<u>Giải:</u>

Bài toán 3 chỉ khác bài toán 2 ở chỗ: không đòi hỏi đáy ABC là cố định mà chỉ đòi hỏi diện tích s của đáy ấy là cố định.

Với các kí hiệu của bài toán 7, ta có, như đã biết $S\ge 3\sqrt{3}s$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đáy ABC là một tam giác đều, và tứ diện là một hình chóp tam giác đều.

Cuối cùng, ta hãy giải thích vì sao ta lại có bất đẳng thức (9), chúng ta có một bất đẳng thức quen thuộc trong tam giác là $p^2\ge 3\sqrt{3}s$ và từ bài toán 2, ta có

$$S_{tp}=S_0=s+\sqrt{p^2h^2+s^2}\ge s+\sqrt{3\sqrt{3}sh^2+s^2}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(s+\sqrt{3\sqrt{3}sh^2+s^2}\right)^3\ge 216\sqrt{3}V^2=216\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}hs\right)^2=24\sqrt{3}s^2h^2$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{\frac{3\sqrt{3}h^2}{s}+1}\right)^3\ge\frac{24\sqrt{3}h^2}{s}$$

Đặt $t=\frac{h^2\sqrt{3}}{s}$ thì ta cần chứng minh

$$\left(1+\sqrt{3t+1}\right)^3\ge 24t$$

Lại đặt một lần nữa $u=\sqrt{3t+1}\Rightarrow 3t=u^2-1$ và ta chuyển bất đẳng thức thành

$$(1+u)^3\ge 8(u^2-1)\Leftrightarrow(u-3)^2(u+1)\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.

BÀI 2: CÁC ĐỊNH LÍ VÀ BÀI TOÁN VỀ GÓC TAM DIỆN BẤT ĐẲNG THỨC VỀ TỨ DIỆN

A- GÓC TAM DIỆN:

I-Các định lí:

Định lí 1:

Mỗi góc phẳng của một góc tam diện bé hơn tổng hai góc phẳng kia.

Chứng minh:

Nếu tất cả các góc phẳng của góc tam diện *SABC* đều bằng nhau thì rõ ràng định lí đúng.

Giả sử $\widehat{ASC} > \widehat{BSC}$

Trong nửa mặt phẳng (CS, A) (tức là nửa mặt phẳng xác định bởi đường thẳng *CS* và điểm *A*) dựng góc $\widehat{CSD}$, bằng góc $\widehat{CSB}$. Như vậy, tia *SD* ở giữa góc $\widehat{CSA}$. Giả sử đường thẳng *AC* cắt tia *SD* ở điểm *D* và giả sử $SB = SD$. Dễ dàng thấy rằng như vậy $BC = CD$. Vì $AC < AB + BC$, nên $AD < AB$.

So sánh 2 tam giác *ASD* và *ASB*, ta nhận thấy $\widehat{ASD} < \widehat{ASB}$

Thêm vào hai vế của bất đẳng thức đó các góc tương ứng bằng nhau *CSD* và *CSD*, ta được

$\widehat{ASC} < \widehat{ASB} + \widehat{CSB}$

đó là điều phải chứng minh.

Chú ý: Định lí về góc của tam diện trên được tương tự từ bất đẳng thức trong tam giác. Nhưng không nên nghĩ rằng sự tương tự giữa các đa giác phẳng và góc đa diện là hoàn toàn: có thể chỉ ra những tính chất của đa giác phẳng không chuyển được sang cho góc đa diện; mặt khác, có thể nhận thấy những tính chất của góc đa diện mà không có tính chất tương tự trong đa giác phẳng. Có thể xác nhận điều đó bằng ví dụ đơn giản sau đây:

Như đã biết, tổng các góc của một đa giác phẳng *n* cạnh bằng $\pi(n-2)$, cho nên tổng ấy chỉ phụ thuộc vào *n*, còn tổng của các góc ngoài của đa giác thì không phụ thuộc *n* và bằng 2π $\left(\pi n - \pi(n-2) = 2\pi\right)$. Có những ví dụ cho ta thấy rằng những sự kiện đó không thể chuyển sang các góc đa diện được. Chẳng hạn, hãy xét góc tam diện *Oxyz* tạo bởi các tia α dương của hệ tọa đọ đề-các vuông góc trong không gian. Các góc nhị diện đều vuông và có tổng bằng 3π. Công thức về tổng các góc trong mặt phẳng $\pi(n-2)$ không còn hiệu lực nữa.

Vd 1: Tia SC' nằm bên trong góc tam diện $SABC$ đỉnh S. Chứng minh rằng tổng các góc phẳng của góc tam diện $SABC$ lớn hơn tổng các góc phẳng của góc tam diện $SABC'$.

Giải:
Giả sử K là giao điểm của mặt SCB và đường thẳng AC'. Xét hai góc tam diện $SKBC'$ và $SACK$, theo định lí 2 ta có:

$$\widehat{C'SK} + \widehat{KSB} > \widehat{C'SB} \qquad (1)$$

và $\widehat{CSA} + \widehat{CSK} > \widehat{ASK} = \widehat{ASC'} + \widehat{C'SK} \qquad (2)$

Cộng (1) và (2) ta được $\widehat{CSA} + \widehat{CSK} + \widehat{KSB} > \widehat{ASC'} + \widehat{C'SB} \qquad (3)$

Mà $\widehat{\mathrm{CSK}} + \widehat{\mathrm{KSB}} = \widehat{\mathrm{CSB}}$ nên suy ra

$$\widehat{CSA} + \widehat{CSB} + \widehat{ASB} > \widehat{ASC'} + \widehat{C'SB} + \widehat{ASB} \quad \text{(đpcm)}$$

Vd 2: Một điểm O nằm trên đáy của hình chóp tam giác $SABC$. Chứng minh rằng tổng các góc giữ tia SO và các cạnh bên nhỏ hơn tổng các góc phẳng tại đỉnh S và lớn hơn một nữa tổng đó.

Giải:
Theo định lí 2 với góc tam diện $SABO$ ta có $\widehat{ASB} < \widehat{ASO} + \widehat{BSO}$ xây dựng thêm hai bất đẳng thức tương tự ta được $\widehat{ASO} + \widehat{BSO} + \widehat{CSO} > \frac{1}{2}\left(\widehat{CSA} + \widehat{BSA} + \widehat{BSC}\right)$.

Lại vì tia SO nằm bên trong góc tam diện SABC, nên $\widehat{ASO} + \widehat{BSO} < \widehat{CSA} + \widehat{BSC}$ (sử dụng kết quả (3) của bài toán ví dụ 1). Tương tự ta được $\widehat{ASO} + \widehat{BSO} + \widehat{CSO} < \widehat{CSA} + \widehat{BSA} + \widehat{BSC}$

Hay $\widehat{CSA} + \widehat{BSA} + \widehat{BSC} > \widehat{ASO} + \widehat{BSO} + \widehat{CSO} > \frac{1}{2}\left(\widehat{CSA} + \widehat{BSA} + \widehat{BSC}\right)$. (đpcm)

Định lí 2:
Tổng các góc phẳng của một góc đa diện lồi luôn bé hơn 2π.

Chứng minh: Trước tiên ta hãy xét góc tam diện $SABC$. Giả sử SA' là tia bù của tia SA. Theo định lí 1 (áp dụng vào góc tam diện $SA'BC$):

$$\widehat{BSC} < \widehat{BSA'} + \widehat{A'SC}$$

tức là:

$$\widehat{BSC} < (\pi - \widehat{BSA}) + (\pi - \widehat{ASC})$$

từ đó suy ra ngay:

$$\widehat{BSC} + \widehat{CSA} + \widehat{ASB} < 2\pi$$

Ta xét góc đa diện lồi $SA_1A_2...A_n$. Chọn hai mặt cách nhau một của góc đa diện là SA_iA_{i+1} và $SA_{i+2}A_{i+3}$. Giả sử SP là giao tuyến của 2 mặt đó, khi đó , tia này và góc đa diện đã cho nằm về hai phía khác nhau của mặt phẳng SA_iA_{i+1}.

Vì $\widehat{A_{i+1}SA_{i+2}} < \widehat{A_{i+1}SP} + \widehat{A_{i+1}SP}$

nên tổng các góc phẳng của n-diện đã cho bé hơn tổng các góc phẳng trong $(n-1)$-diện: $SA_1A_2\ldots A_iPA_{i+3}\ldots A_n$. Nếu $n-1=3$ thì định lí đã được chứng minh. Nếu $n>4$ thì có thể áp dụng phép dựng trên đây đối với góc $(n-1)$-diện có được, như vậy, số mặt của nó giảm một đơn vị, đồng thời tổng các góc phẳng của nó lại tăng lên. Sau hữu hạn phép dựng như thế, chúng ta sẽ được một góc tam diện, mà đối với một góc tam diện thì định lí đã được chứng minh.

Chú ý rằng: *yêu cầu góc đa diện phải lồi là quan trọng đối với mệnh đề nói trên. Ta có thể thấy rằng tổng các góc phẳng của một góc đa diện không lồi có thể lớn tùy ý.*

Ví dụ 3: Một đường chéo của hình hộp chữ nhật tạo với các cạnh của nó các góc α,β,γ. Chứng minh rằng $\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

Giải:

Giả sử O là tâm hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Đường cao OH của tam giác cân AOC song song với cạnh AA_1, vì vậy $\widehat{AOC}=2a$, ở đó α là góc giữ cạnh AA_1 và đường chéo AC_1. Lí luận chứng tỏ rằng các góc phẳng của góc tam diện $OACD_1$ bằng $2\alpha, 2\beta$ và 2γ với $\beta\ \&\ \gamma$ là góc giữa cạnh AB và AD với đường chéo AC_1. Áp dụng định lí ta có $2\alpha+2\beta+2\gamma<2\pi$ hay $\alpha+\beta+\gamma<\pi$ (đpcm)

Chú ý: Một sự tương tự hoàn toàn về tính chất sẽ được thực hiện, nếu so sánh góc đa diện, không phải với đa giác phẳng mà là đa giác cầu, được tạo nên tại giao của các mặt của góc đa diện với mặt cầu có tâm ở đỉnh của nó. Có thể giải thích sự tương tự đó, nếu chú ý rằng, với $R=1$ thì mỗi cạnh của một đa giác cầu có số đo bằng góc phẳng tương ứng của góc đa diện, và mỗi góc của đa giác cầu có số đo bằng góc nhị diện giữa các mặt tương ứng vì nó được đo bởi góc giữa các tiếp tuyến với cạnh của đa giác cầu tại đỉnh chung của chúng.

Để rút ra những tính chất quan trọng nhất của góc tam diện, nhiều khi ta dùng tới góc tam diện bù. Góc tam diện $SA'B'C'$ được gọi là bù với góc tam diện $SABC$ nếu: tia SA' (tương ứng SB', SC') vuông góc với mặt phẳng SBC (tương ứng SCA, SAB) và nằm cùng phía với tia SA (tương ứng SB, SC) đối với mặt phẳng đó.

Ta có những tính chất quan trọng nhất về góc tam diện và góc tam diện bù với chúng:

1) Nếu $SA'B'C'$ là góc tam diện bù của $SABC$ thì $SABC$ là góc tam diện bù của $SA'B'C'$ (tính tương hỗ)

2) Mỗi góc phẳng của một góc tam diện sẽ bù với góc phẳng của góc nhị diện tương ứng (nghĩa là góc nhị diện có cạnh vuông góc với mặt phẳng của góc phẳng) của góc bù.

3) Nếu hai góc tam diện bằng nhau (có thể trùng khít với nhau) thì các góc bù của chúng cũng bằng nhau.

Định lí 3:

Tổng các góc nhị diện của một tam diện luôn $>\pi$ và $<3\pi$

Chứng minh*:*

Cho α,β,γ là những góc nhị diện của một góc tam diện cho trước; α',β',γ' là góc phẳng tương ứng của góc tam diện bù. Theo tính chất 2):

$\alpha'=\pi-\alpha,\beta'=\pi-\beta,\gamma'=\pi-\gamma,$

và theo định lí 2:

$0<\alpha'+\beta'+\gamma'<2\pi$,

Vậy $0<(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)<2\pi,$

từ đó suy ra ngay:

$\pi<\alpha+\beta+\gamma<3\pi$

và đó là điều phải chứng minh

Bổ sung thêm vào định lí ấy, chúng ta nhận thấy rằng tổng các nhị diện của một góc tam diện có thể gần 3π tùy ý. Thật vậy, chẳng hạn tưởng tượng đỉnh *S* của hình chóp tam giác *SABC*, chuyển động teo đường cao *SP* của hình chóp ấy và tiến gần vô hạn đến mặt phẳng đáy, thì rõ ràng mỗi nhị diện của một góc tam diện *SABC* trong khi tăng dần sẽ tiến dần vô hạn đến một góc bẹt.

Vd: a) Chứng minh rằng tổng các góc giữ các cạnh của góc tam diện đối với các mặt đối của nó không vượt qua tổng các góc phẳng của nó.

b) Chứng minh rằng nếu các góc nhị diện của một góc tam diện là các góc nhọn, thì tổng các góc giữ các cạnh của nó với các mặt đối không nhỏ hơn nữa tổng các góc phẳng của nó.

Giải:

a)Giả sử α,β,γ là các góc giữ các cạnh *SA, SB* và *SC* với các mặt của chúng. Vì góc giữa mặt phẳng l với mặt phẳng π không vượt quá góc giữa đường thẳng l với một đường thẳng bất kì của mặt phẳng π, nên $\alpha\le\widehat{ASB},\beta\le\widehat{BSC}\ \&\ \gamma\le\widehat{CSA}$.

Bài toán này cho ta cho ta một kết quả mạnh hơn là: góc giữa cạnh của góc tam diện đối với mặt đối của nó nhỏ hơn góc phẳng nhỏ nhất của góc tam diện kề với cạnh đó.

b)Các góc nhị diện của góc tam diện *SABC* là các góc nhọn, vì vậy hình chiếu SA_1 của tia *SA* trên mặt phẳng *SBC* mằn bên trong góc *BSC*.

Vì vậy từ các bất đẳng thức $\widehat{ASB} \le \widehat{BSA_1} + \widehat{ASA_1}$ và $\widehat{ASC} \le \widehat{CSA_1} + \widehat{ASA_1}$

suy ra rằng $$\widehat{ASB} + \widehat{ASC} - \widehat{BSC} \le 2\widehat{ASA_1}$$

Viết các bất đẳng thức tương tự đối với các cạnh *SC* và *SD* rồi cộng chúng lại, ta được điều phải chứng minh.

II-Dấu hiệu bằng nhau của góc tam diện

Trên các cạnh của một góc tam diện chọn 3 điểm tương ứng: *A*, *B*, *C*. Nếu từ đỉnh của góc tam diện ta thấy chiều quay của ΔABC theo chiều kim đồng hồ, thì ta nói rằng góc tam diện đã cho có hướng thuận, ngược lại ta nói nó có hướng nghịch.

Nhận xét trên cần thiết cho những phần sau: nếu đỉnh *S* và hai cạnh *SA*, *SB* của góc tam diện cố định, còn cạnh thứ ba *SC* thay đổi trong không gian, thì hướng của góc tam diện sẽ thay đổi khi và chỉ khi tia *SC* chuyển từ nữa không gian này, đối với mặt phẳng *ASB*, sang nửa không gian kia.

Xét hai góc tam diện có định hướng *SABC* và $S'A'B'C'$. Gọi các phần tử tương ứng là các phần tử được đánh dấu bởi cùng một chữ. Ta có định lí sau đây nói về dấu hiệu bằng nhau của góc tam diện cùng hướng

Định lí 4:

Hai góc tam diện cùng hướng sẽ bằng nhau trong mỗi trường hợp sau đây:

1) Nếu một góc phẳng của góc tam diện này bằng góc phẳng tương ứng của góc tam diện kia, còn các góc nhị diện mà cạnh là cạnh của hai góc phẳng bằng nhau, tương ứng bằng nhau.

2)Nếu một nhị diện của góc tam diện này bằng góc nhị diện tương ứng của góc tam diện kia và những góc phẳng, của chúng là những mặt của góc nhi diện bằng nhau tương ứng bằng nhau.

3)Nếu các góc phẳng của góc tam diện này bằng các góc phẳng tương ứng của góc tam diện kia.

4)Nếu các góc nhị diện của góc tam diện này bằng các góc nhị diện tương ứng của góc tam diện kia.

B- CÔNG THỨC CÔ-SIN TRONG GÓC TAM DIỆN :

Trong hình học phẳng ta biết rằng cho trước hai cạnh $AB = c, AC = b$ của tam giác *ABC* và góc *A* thì cạnh thứ ba $BC = a$ được tính theo công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (1). Đó là công thức côsin cho tam giác.

Tương ứng với tam giác, trong góc tam diện có bài toán: Trong một góc tam diện *SABC*, cho trước hai mặt $\widehat{ASB} = \gamma, \widehat{ASC} = \beta$ và nhị diện *A* của cạnh *SA*, hãy tính mặt thứ ba $\widehat{BSC} = \alpha$.

Giải:

Ta chọn ABC sao cho $SA=1$, AB và AC vuông góc với SA hay $\widehat{BAC}$ là góc nhị diện của cạnh SA nên có độ lớn bằng A. Áp dụng công thức côsin cho các tam giác BSC và BAC ta được:

$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB\cdot SC\cos\alpha$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos A$

Nhưng $SB=\dfrac{1}{\cos\gamma}$, $SC=\dfrac{1}{\cos\beta}$, $AB=\tan\gamma, AC=\tan\beta$. Thay vào hai đẳng thức trên, ta rút ra:

$$\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}-\frac{2\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}=\tan^2\gamma+\tan^2\beta-2\tan\beta\tan\gamma\cos A$$

từ đó dễ dàng đưa đến công thức $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$ (2)

Đó là công thức côsin cho các góc tam diện. Công thức đó có thể viết thành:

$$\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \qquad (2')$$

Công thức (2') cho phép ta tính được các góc nhị diện của góc tam diện khi biết các mặt của góc tam diện đó. Từ công thức đó có thể suy ra dấu hiệu bằng nhau 3) của 2 góc tam diện.

Một bài toán ngược được đặt ra là: *cho biết các góc nhị diện của một góc tam diện, hãy tính các mặt của góc tam diện đó.*

Giải:

Ta dựng tam diện bù $SA'B'C'$ của góc tam diện $SABC$ cho trước và viết công thức cho góc tam diện bù đó $\cos A'=\dfrac{\cos\alpha'-\cos\beta'\cos\gamma'}{\sin\beta'\sin\gamma'}$

với α',β',γ' là góc của tam diện bù $SA'B'C'$ tương ứng với α,β,γ.

Theo tính chất 2) của góc tam diện bù ta có $\alpha'=\pi-A, \beta'=\pi-B, \gamma'=\pi-C, A'=\pi-\alpha$.

Thay vào ta được:

$$\cos\alpha=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B.\sin C} \qquad (3)$$

Công thức này là lời giải của bài toán trên. Công thức này cũng có thể suy ra dấu hiệu bằng nhau.

Định lí của góc tam diện.

Các công thức (2) và (3) xác định mỗi quan hện giữa mặt và nhị diện của một tam diện. Đó là công thức cơ bản của hình học tam diện.

Định lí sin đối với góc tam diện : Giả sử α, β, γ.là góc phẳng của một góc tam diện; *A*, *B* và *C* là các góc nhị diện đối diện của chúng. Chứng minh rằng: $\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$.

Giải :

Lấy trên cạnh *SA* của góc tam diện một điểm *M* tùy ý. Giả sử M' là hình chiếu của *M* trên mặt phẳng *SBC, P* và *Q* là hình chiếu của *M* trên mặt phẳng *SB* và *SC*. Theo định lí 3 đường vuông góc $M'P \perp SB$ và $M'Q \perp SC$. Nếu $SM = a$, thì $MQ = a\sin\beta$ và $MM' = MQ\ \sin C = a\sin\beta\sin\ C$ (vì *C* là góc giữa QM' và *QM*).

Tương tự $MM' = MP\ \sin\ B = a\sin\ \gamma.\sin B$

Do đó $\frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$. Đẳng thức thứ hai chứng minh hoàn toàn tương tự.

Các bài toán bất đẳng thức về góc

Bài toán 1: Chứng minh rằng không thể có nhiều hơn một đỉnh của tứ diện có tính chất là tổng của bất kì hai góc phẳng nào tại đỉnh này lớn hơn 180^0.

Giải:

Ta giả thiết rằng các đỉnh *A* và *B* của tứ diện *ABCD* có tính chất đã nêu. Tức là nhiều hơn một đỉnh của tứ diện luôn có tính chất tổng bất kì của hai góc phẳng lớn hơn 180^0.

Khi đó $\widehat{CAB} + \widehat{DAB} > 180^0 \& \widehat{CBA} + \widehat{DBA} > 180^0$

Mặt khác $\widehat{CAB} + \widehat{CBA} = 180^0 - \widehat{ACB} < 180^0$

Khi đó ta có $\widehat{DBA} + \widehat{DAB} > 180^0$. Vô lí

Nên ta có điều phải chứng minh.

Bài toán góc đa diện

Bài toán 1: Chứng minh rằng tổng một góc tứ diện lồi bất kì tồn tại một thiết diện là hình bình hành, đồng thời các thiết diện như thế song song nhau.

Chứng minh rằng một góc tứ diện lồi với các góc phẳng bằng nhau tồn tại thiết diện là hình thoi.

Bài toán 2: Một trong hai góc đa diện lồi với đỉnh chung nằm trong góc đa diện kia. Chnứg minh rằng tổng của các góc phẳng của góc đa diện nằm bên trong nhỏ hơn tổng của các góc phẳng của đa diện nằm bên ngoài.

Bài toán 3: Chứng minh rằng tổng của các góc nhị diện của một góc n_diện lồi lớn hơn $(n-2)\pi$

Bài toán 4: Nếu tất cả các góc phẳng của góc tam diện là tù thì tất cả các góc nhị diện của nó đều tù.

Bài toán 5: Nếu tất cả các góc nhị diện trong một tam diện là nhọn thì tất cả các góc phẳng của nó cũng nhọn.

Bài toán 6: Chứng minh rằng tổng các góc có đỉnh là một điểm tùy ý nằm bên trong tứ diện, còn các cạnh đi qua các đỉnh của tứ diện, lớn hơn 3π.

Giải:

Giả sử O là một điểm nằm bên trong tứ diện $ABCD$; α, β, γ. là góc nhìn từ O đến các cạnh DA, DB và DC; *a, b* và *c* là các góc nhìn từ O đến các cạnh *AB, BC* và *CA; P* là giao điểm của mặt phẳng ABC với đường thẳng DO. Vì tia OP nằm trong góc tam diện $OABC$, nên $\widehat{AOP}+\widehat{BOP}<\widehat{AOC}+\widehat{BOC}$ (1) (sử dụng kết quả (3) của bài toán ví dụ 1).

Mà $\widehat{\mathrm{AOP}}=\pi-\widehat{\mathrm{AOB}}\&\widehat{\mathrm{BOP}}=\pi-\widehat{\mathrm{BOD}}$ nên ta có

$(1)\Leftrightarrow \pi-\alpha+\pi-\beta<a+b\Leftrightarrow a+b+\beta+\alpha>2\pi$

Tương tự, $\beta+\gamma+b+c>2\pi, \gamma+\alpha+a+c>2\pi$. Nếu cộng các bất đẳng thức này lại ta có điều phải chứng minh.

C- BẤT ĐẲNG THỨC VỀ TỨ DIỆN:

I- Lí thuyết tứ diện:

Tứ diện bất kì:

Tứ diện là một hình chóp tam giác. Đó là hình chóp duy nhất mà mọi mặt đều có thể lấy làm đáy.

Thể tích tứ diện: $V=\frac{1}{3}S_Ah_A=\frac{1}{3}S_Bh_B=\frac{1}{6}abd\,\mathbf{sin}\,\alpha$ trong đó S_x, h_x là diện tích mặt đáy đối diện với đỉnh X và đường cao xuất phát từ đỉnh *X; a, b* là hai cạnh đối và d, α là khoảng cách và góc giữa hai cạnh đó.

Trong một tứ diện bất kì 7 đoạn thẳng này sau đây luôn đồng qui tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện:

- 4 đoạn nối một đỉnh đến trọng tâm mặt đối diện.
- 3 đoạn nối trung điểm 2 cạnh đối.

Gọi M và N lần lượt là trung điểm CD và $AB, A'\,\&\,B'$ là trọng tâm của các tam giác BCD và ACD.

Với G là trọng tâm tứ diện, ta có $\begin{cases}GM=GN\\GA=3GA'\end{cases}$

$AA'(hay\ \ BB')$ thường được gọi là trọng tuyến tứ diện.

Tứ diện đều :

Tứ diện $ABCD$ được gọi là đều nếu và chỉ nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau.

Một tứ diện đều thì có : $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ trong đó a là cạnh của tứ diện, h là chiều cao tứ diện

$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ V là thể tích của tứ diện

$r = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ r, R là bán kính mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp

$$R = 3r = \frac{3a\sqrt{6}}{4}$$

Số đo goc của một cạnh bất kì bằng $\mathbf{arccos}\dfrac{1}{3}$

Tứ diện gần đều

Tứ diện gần đều là tứ diện có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau.
Tính chất và điều kiện cần và đủ để một tứ diện là tứ diện gần đều:
Tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh góc tam diện bằng 180^0
Hai góc phẳng tam diện nào đó của tứ diện bằng 180^0 đồng thời có một cặp cạnh đối bằng nhau.
Các đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh đối diện là đường vuông góc chung của hai cạnh đó.
Bốn mặt là tam giác có diện tích bằng nhau.
Tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau.
Tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm trùng nhau.
Tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau.
Các góc phẳng nhị diện ứng với các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

1. Cho tứ diện đều $ABCD$. Hãy tìm trên các mặt phẳng $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$ các điểm X,Y,Z,T sao cho tổng độ dài các cạnh của tứ diện $XYZT$ nhỏ nhất.

Giải:
Gọi O là tâm của tứ diện đều $ABCD$. H,I,J,K theo thứ tự là hình chiếu của O trên mặt phẳng $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$.
Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên:

$$\left(\frac{\overrightarrow{HI}}{HI}+\frac{\overrightarrow{HJ}}{HJ}+\frac{\overrightarrow{HK}}{HK}\right)\perp(BCD)$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{IJ}}{IJ}+\frac{\overrightarrow{IK}}{IK}+\frac{\overrightarrow{IH}}{IH}\right)\perp(CDA)$$

$\left(\frac{\overrightarrow{JK}}{JK}+\frac{\overrightarrow{JH}}{JH}+\frac{\overrightarrow{JI}}{JI}\right)\perp(DAB)$

$\left(\frac{\overrightarrow{KH}}{KH}+\frac{\overrightarrow{KI}}{KI}+\frac{\overrightarrow{KJ}}{KJ}\right)\perp(ABC) \quad (*)$

Giả sử X,Y,Z,T là các điểm bất kì, theo thứ tự thuộc mp $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$.

Ta thấy:

$$XY+XZ+XT+ZT+TY+YZ=\frac{XY.HI}{HI}+\frac{XZ.HJ}{HJ}+\frac{XT.HK}{HK}+\frac{ZT.JK}{JK}+\frac{TY.KI}{KI}+\frac{YZ.JI}{JI}$$

$$\geq\frac{\overrightarrow{XY}.\overrightarrow{HI}}{HI}+\frac{\overrightarrow{XZ}.\overrightarrow{HJ}}{HJ}+\frac{\overrightarrow{XT}.\overrightarrow{HK}}{HK}+\frac{\overrightarrow{ZT}.\overrightarrow{JK}}{JK}+\frac{\overrightarrow{TY}.\overrightarrow{KI}}{KI}+\frac{\overrightarrow{YZ}.\overrightarrow{JI}}{JI}=S$$

Mà

$\overrightarrow{SY}=\overrightarrow{XH}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IY};\overrightarrow{XT}=\overrightarrow{XH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KT}$

$\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{XH}+\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JZ};\overrightarrow{ZT}=\overrightarrow{ZJ}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KT}$

$\overrightarrow{TY}=\overrightarrow{TK}+\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IY};\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{YI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JZ}$

$$\Rightarrow S=HI+HJ+HK+JK+KI+IJ+\overrightarrow{XH}\left(\frac{\overrightarrow{HI}}{HI}\frac{\overrightarrow{HJ}}{HJ}+\frac{\overrightarrow{HK}}{HK}\right)+$$

$$+\overrightarrow{IY}\left(\frac{\overrightarrow{IJ}}{IJ}+\frac{\overrightarrow{IK}}{IK}+\frac{\overrightarrow{IH}}{IH}\right)+\overrightarrow{ZI}\left(\frac{\overrightarrow{JK}}{JK}+\frac{\overrightarrow{JH}}{JH}+\frac{\overrightarrow{JI}}{JI}\right)+\overrightarrow{TK}\left(\frac{\overrightarrow{KH}}{KH}+\frac{\overrightarrow{KI}}{KI}+\frac{\overrightarrow{KJ}}{KJ}\right)$$

Vì XH,YI,ZJ,TK theo thứ tự thuộc $mp(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$ nên theo (*) ta có:

$XY+YZ+ZT+TX+XZ+YT\geq HI+JI+HK+JK+KI+JH \quad (1)$

Nếu đẳng thức ở (1) xảy ra thì

$\overrightarrow{XY}\uparrow\uparrow\overrightarrow{HI};\overrightarrow{YZ}\uparrow\uparrow\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{ZT}\uparrow\uparrow\overrightarrow{JK};\overrightarrow{TX}\uparrow\uparrow\overrightarrow{KH}\Rightarrow\exists\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$

Sao cho

$\alpha\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{XY};\beta\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{YZ};\gamma\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{ZT};\delta\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{TX}$

$\Rightarrow\alpha\overrightarrow{HI}+\beta\overrightarrow{IJ}+\gamma\overrightarrow{JK}+\delta\overrightarrow{KH}=\vec{0}$

Lại có: $\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KH}=\vec{0}$ và 3 vectơ bất kì trong 4 vectơ này không đồng phẳng nên $\alpha=\beta=\gamma=\delta$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{XZ}\\ \alpha\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{ZX}\end{cases}$$

$\alpha(HI+JI+HK+JK+KI+JH)=XY+YZ+ZT+TX+XZ+YT \quad (2)$

So sánh (1) và (2) ta có $\alpha=1$.

Suy ra: $\overrightarrow{HX}=\overrightarrow{IY}=\overrightarrow{JZ}=\overrightarrow{KT}$

Đặt $\overrightarrow{HX}=\overrightarrow{IY}=\overrightarrow{JZ}=\overrightarrow{KT}=\vec{a}$

Ta thấy tứ diện $XYZT$ là ảnh của $HIJK$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{a}}$. Nếu $\vec{a}\neq\vec{0}$ thì $H\neq X$, $I\neq Y$, $HX//IY\Rightarrow\vec{a}//\overrightarrow{CD}$. Tương tự $\vec{a}//\overrightarrow{DB}$. Mâu thuẫn.

Vậy $\vec{a}=\vec{0}$. Suy ra X,Y,Z,T tương ứng trùng với H,I,J,K dễ thấy đẳng thức xảy ra ở (1).

Kết luận: Tổng độ dài các cạnh của tứ diện *XYZT* nhỏ nhất khi và chỉ khi *X,Y,Z,T* tương ứng trùng với *H,I,J,K*.

2. Cho tứ diện *ABCD*, trọng tâm *G*. *M* là điểm bất kì, *N* là điểm thỏa $NM = 4MG$. Chứng minh và tìm dấu bằng xảy ra khi nào của bất đẳng thức sau:

$$NA + NB + NC + ND \le 2MN + MA + MB + MC + MD \quad (1)$$

Giải:

*Trường hợp 1:

$M \equiv G \Rightarrow M \equiv N \Rightarrow (1)$ đúng và dấu bằng xảy ra.

*Trường hợp 2:

$M \ne G$. Gọi *O* là trung điểm của *MN*.

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AO} \\ -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AN^2 - AM^2 = 2\overrightarrow{AO}\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow -AM + AN = \frac{2\overrightarrow{AO}\overrightarrow{MN}}{AM + AN} \le \frac{2\overrightarrow{AO}\overrightarrow{MN}}{MN}$$

Tương tự với *BN,CN,DN*.

$$\Rightarrow (AN + BN + CN + DN) - (AM + BM + CM + DM) \le \frac{2\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}\right)\overrightarrow{MN}}{MN}$$

$$= \frac{2.4\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{2MN^2}{MN} = 2MN$$

đpcm. "=" xảy ra ở trường hợp 1.

Ngòai cách trên ta còn có thể sử dụng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối:

$$\left|\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\right| + \left|\vec{y} + \vec{z} + \vec{t}\right| + \left|\vec{z} + \vec{t} + \vec{x}\right| + \left|\vec{x} + \vec{y} + \vec{t}\right| \le 2\left|\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{t}\right| + \left|\vec{x}\right| + \left|\vec{y}\right| + \left|\vec{z}\right| + \left|\vec{t}\right|$$

Tổng quát lên:

Cho n điểm $A_i (n \ge 3)$. Các điểm M,N,N thỏa: $\sum \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}, \overrightarrow{MN} = n\overrightarrow{MG}$. Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^{n} NA_i \le \sum_{i=1}^{n} MA_i + (n-2)MN$$

3. Cho tứ diện *OABC* vuông tại *O*. Gọi α, β, γ là góc tạo bởi đường cao xuất phát từ đỉnh *O* với các cạnh *OA, OB, OC*. Chứng minh:

$$3^{\sin^2\alpha} + 3^{\sin^2\beta} + 3^{\sin^2\gamma} \ge \cos^2\alpha.3^{2-\cos^2\alpha} + \cos^2\beta.3^{2-\cos^2\beta} + \cos^2\gamma.3^{2-\cos^2\gamma}$$

Giải:

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

nên $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{OH^2}{OA^2} + \dfrac{OH^2}{OB^2} + \dfrac{OH^2}{OC^2} = 1$

Đặt $a=\cos^2\alpha, b=\cos^2\beta, c=\cos^2\gamma$ thì $a+b+c=1$ và
$\sin^2\alpha=1-a, \sin^2\beta=1-b, \sin^2\gamma=1-c$
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{3}{3^a}+\frac{3}{3^b}+\frac{3}{3^c}\geq\frac{9a}{3^a}+\frac{9b}{3^b}+\frac{9c}{3^c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^a}(1-3a)+\frac{1}{3^b}(1-3b)+\frac{1}{3^c}(1-3c)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^a}(b+c-2a)+\frac{1}{3^b}(c+a-2b)+\frac{1}{3^c}(a+b-2c)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3^a}-\frac{1}{3^b}\right)(b-a)+\left(\frac{1}{3^b}-\frac{1}{3^c}\right)(c-b)+\left(\frac{1}{3^c}-\frac{1}{3^a}\right)(a-c)\geq 0$$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì ta có $y=\frac{1}{3^x}$ là hàm số nghịch biến nên:

$$\left.\begin{array}{l} a\geq b\Rightarrow \frac{1}{3^a}\leq\frac{1}{3^b} \\ a\leq b\Rightarrow \frac{1}{3^a}\geq\frac{1}{3^b}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{1}{3^a}-\frac{1}{3^b}\right)(b-a)\geq 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\cos^2\beta=\cos^2\gamma$ hay tứ diện *OABC* vuông cân tại *O*.

4. Cho tứ diện vuông *OABC* với *OA* = *OB* = *OC* = *a*.
   a) Xác định mặt phẳng *(P)* sao cho tổng diện tích hình chiếu các mặt của tứ diện lên *(P)* đạt giá trị lớn nhất.
   b) *(P)* hợp với $(BOC),(COA),(AOB)$ các góc nhọn α,β,γ .Chứng tỏ: $\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

Giải:

a) Xét một pháp tuyến của *(P)* là đường thẳng *d* qua *O*. *(P)* hợp với *(BOC), (COA), (AOB)* các góc α, β, γ tương ứng là góc hợp bởi d với *OA, OB, OC*.

Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k},\vec{e}$ lần lượt là các véctơ đơn vị của *OA, OB,OC* và *d*.

Ta có: $\vec{e}=\cos\alpha'.\vec{i}+\cos\beta'.\vec{j}+\cos\gamma'.\vec{k}$

với $\alpha'=\left(\vec{i},\vec{e}\right),\beta'=\left(\vec{j},\vec{e}\right),\gamma'=\left(\vec{k},\vec{e}\right)$

$\Rightarrow 1=\vec{e}^2=\cos^2\alpha'.\vec{i}+\cos^2\beta'.\vec{j}+\cos^2\gamma'.\vec{k}$ (1)

Mà α, β, γ $\leq 90^0$ nên α bằng hay bù với $\alpha', \cos^2\alpha'=\cos^2\alpha$. Tương tự đối với β,γ nên từ (1) $\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (2)

Do $S_{OAB}=S_{OBC}=S_{OCA}=\frac{a^2}{2}$, nên tổng diện tích hình chiếu các mặt tứ diện lên *(P)* là

$S = \frac{a^2}{2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + S_{ABC}\cos\varphi$ với φ là góc hợp bởi *(P)* với *(ABC)*.

Mà $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)} = \sqrt{3}$

Và $\cos\varphi \le 1$, nên $S \le \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + S_{ABC}$.

$S_{\max} \Leftrightarrow \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma, \cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (P)//(ABC) \\ P \equiv (ABC) \end{cases}$

b) Từ $(2) \Rightarrow \cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos^2\gamma = 0$

Giả sử $\alpha + \beta + \gamma \ge \pi, \frac{\pi}{2} \ge \gamma \ge \pi - (\alpha + \beta) \ge 0$

$\Rightarrow \cos\gamma \le \cos(\pi - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta) \quad (4)$

Nên từ (3) suy ra $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos^2(\alpha + \beta) \ge 0$

$\Rightarrow 2\cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \ge 0$

$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta)\cos\alpha\cos\beta \ge 0 \qquad (5)$

Mà $(4) \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \le -\cos\gamma < 0$

Và $\cos\alpha > 0, \cos\beta > 0$ nên (5) không thể xảy ra. Suy ra $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

5. Trong không gian cho một tứ diện đều. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ một điểm nào đó đến các đỉnh của tứ diện là nhỏ nhất nếu và chỉ nếu điểm đó trùng với tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện đều đã cho.

Giải:

Giả sử *ABCD* là tứ diện đều có *O* là tâm hình cầu ngoại tiếp và *P* là điểm tùy ý trong không gian. Gọi *X* là trung điểm *CD*. Cho P' là chân đường vuông góc hạ từ *P* xuống mặt phẳng *(AXB)*. Ta sẽ chứng minh rằng nếu P không trùng với P' thì

$PA + PB + PC + PD > P'A + P'B + P'C + P'D$.

Thật vậy, giả sử *P* không trùng với P', ta có $PA > P'A$ vì góc PP'A vuông; cũng vậy, ta có PB > P'B. Do *BX* và *AX* vuông góc *CD* nên *(BAX)* là mặt phẳng trung trực của *CD*. Suy ra P'CD là tam giác cân tại P', còn *PCD* thì không cân tại *P* (nếu ngược lại thì *P* trùng P' bởi khi ấy *P* cũng thuộc mặt phẳng *(ABX))*

Mặt khác, PP' và *CD* nằm trên hai mặt phẳng song song nhau nên khoảng cách giữa *P* và *CD* cũng bằng khoảng cách giữa P' và *CD*. Điều này kéo theo

$PC + PD > P'C + CD$. Để thấy điều này, ta gọi $C' \& D'$ lần lượt là các điểm đối xứng của *C* và *D* qua đường thẳng PP', ta có:

$$PC + PD = PC' + PD > C'D' = P'C' + P'D = P'C + P'D.$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Từ chẳng minh trên, ta suy ra được rằng nếu *P* là điểm sao cho *PA* + *PB* + *PC* + *PD* nhỏ nhất, *P* phải nằm trong mặt phẳng *(ABX);* hoàn toàn tương tự, nó cũng phải nằm trong mặt phẳng *(CDY),* với *Y* là trung điểm của *AB*. Suy ra rằng P phải nằm trên *XY*, đường nối trung điểm của các cặp cạnh đối *AB* và *CD*.
Lặp lại lí luận một cách tương tự như trên, *P* cũng nằm trên đường nối trung điểm hai cặp cạnh còn lại của tứ diện *ABCD*; nói cách khác, *P* trùng với tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện.

6. Chứng minh rằng mọi tứ diện đều có một đỉnh mà 3 cạnh xuất phát từ đỉnh đó có độ dài thích hợp để lập thành một tam giác.

Giải.
Ta xét cạnh dài nhất của tứ diện. Giả sử *AB* là cạnh dài nhất của tứ diện *ABCD*. Giả sử ngược lại, khẳng định của bài toán là sai, nghĩa là không có đỉnh nào trong tứ diện *ABCD* để cho 3 cạnn xuất phát từ đỉnh đó có độ dài thích hợp để lập thành một tam giác.
Lúc đó ta phải có:
$AB > AC + AD$ (xét đỉnh *A*),
$BA > BC + BD$ (xét đỉnh *B*)
Từ đó ta suy ra $2AB > AC + AD + BC + BD$, (*)
Nhưng trong tam giác *ABC* và *ABD* ta lạ có:
$AB < AC + CB; AB < AD + DB$ nên ta được $2AB < AC + AD + BC + BD$, (**)
Mâu thuẫn giữa (*) và (**) cho ta điều phải chứng minh.

7. Tứ diện *ABCD* có góc $BCD = 90^0$ và chân đường vuông góc hạ từ *D* xuống mặt phẳng *(ABC)* trùng với trực tâm tam giác *ABC*. Chứng minh rằng: $(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$

Giải:
Trước tiên ta sẽ chứng minh rằng $\widehat{CDA} = 90^0$
Thật vậy, gọi *H* là hình chiếu của *D* xuống mặt phẳng (ABC), giả sử *CH* cắt *AB* tại *E*.
Do $AB \perp CE$ & $AB \perp DH$ nên $AB \perp (DEC)$, suy ra $AB \perp DE$. Từ đó, các tam giác vuông *BED* và *CED* cho ta:
$$BD^2 = DE^2 + BE^2, CB^2 = CE^2 + BE^2.$$
Trừ vế theo vế cả hai đẳng thức trên ta được: $CB^2 - BD^2 = CE^2 - DE^2$.
Nhưng vì tam giác *BCD* vuông nên ta lại có $CB^2 - BD^2 = CD^2$, suy ra $CE^2 = CD^2 + DE^2$, tức là tam giác *CDE* vuông tại *D*. Tóm lại, ta có $CD \perp DB$ và $CD \perp DE$ nên $CD \perp AD$. Nói cách khác, $\widehat{CDA} = 90^0$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\widehat{ADB} = 90^0$.

Từ đó ta được: $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2\left(AD^2 + BD^2 + CD^2\right)$. (1)

Mặt khác bất đẳng thức AM-GM cho ta :

$\left(AB + BC + CA\right)^2 \le 3\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được $\left(AB + BC + CA\right)^2 \le 6\left(AD^2 + BD^2 + CD^2\right)$

Dấu bằng xảy ra khi $AB = BC = CA$.

8. Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD*. Gọi G_a, G_b, G_c, G_d là trọng tâm các tam giác *BCD, CDA, DAB, ABC*. Đặt: $G_a = m_a; G_b = m_b; G_c = m_c; G_d = m_d$.

Chứng minh rằng: $R \ge \frac{3}{16}\left(m_a + m_b + m_c + m_d\right)$

<u>Giải.</u>

Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD*. Ta có:

$$4R^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \ldots + \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GD}\right)^2$$

(với G là trọng tâm tứ diện *ABCD*).

Do: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Rightarrow 4R^2 = 4\overrightarrow{OG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + \overrightarrow{GD}^2 + 2\overrightarrow{OG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 = 4OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$

Theo tính chất trọng tâm tứ diện:

$$GA = \frac{3}{4}m_a; GB = \frac{3}{4}m_b; GC = \frac{3}{4}m_c; GD = \frac{3}{4}m_d;$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 = 4OG^2 + \frac{9}{16}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2\right)$$

$$\Rightarrow 4R^2 \ge \frac{9}{16}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2\right)$$

Mặt khác theo cauchy-schwarz:

$$4\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2\right) \ge \left(m_a + m_b + m_c + m_d\right)^2$$

$$\Rightarrow 4R^2 \ge \frac{9}{16}\frac{1}{4}\left(m_a + m_b + m_c + m_d\right)^2$$

$$\Leftrightarrow R \ge \frac{3}{16}\left(m_a + m_b + m_c + m_d\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} G \equiv O \\ m_a = m_b = m_c = m_d \end{cases} \Rightarrow$ *ABCD* là tứ diện đều.

9. Chứng minh rằng tồn tại khối tứ diện *ABCD* mà các mặt của nó là các tam giác vuông đồng dạng với các góc nhọn tại các đỉnh *A* và *B*. Hãy xác định cạnh nào của

tứ diện là lớn nhất, còn cạnh nào là nhỏ nhất và hãy tính độ dài cạnh nhỏ nhất nếu độ dài cạnh lớn nhất là một.

10. Chứng minh rằng nếu một tứ diện có cạnh a nội tiếp trong tứ diện đều cạnh b sao cho trên mỗi mặt của khối tứ diện cạnh b có đúng một đỉnh của khối tứ diện nội tiếp, thì 3a ≥ b.

11. Trong tứ diện *ABCD* các cạnh *AD, BC* và *CD* vuông góc lẫn nhau, còn độ dài tương ứng của chúng là *a, b, c*. Chứng minh rằng với mỗi điểm *M* nằm trên mỗi cạnh của tam giác *ABC*, tổng *S* các khoảng cách từ các đỉnh *A, B* và *C* đến đường thẳng *DM* thỏa mãn bất đẳng thức:

$S \le \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$. Khi nào xảy ra đẳng thức?

Giải

Để xác định, giả sử *M* nằm trên cạnh *AB* và $\widehat{MND} = \varphi$ khi đó $S = c + a\cos\varphi + b\sin\varphi$

Kí hiệu $d = a\cos\varphi + b\sin\varphi,\ y = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ta có bất đẳng thức

$$d = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos y\cos\varphi + \sin y\sin\varphi\right) = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\varphi - y\right) \le \sqrt{a^2+b^2}$$

Đồng thời đẳng thức cũng xảy ra khi và chỉ khi $\varphi = y$, nghĩa là khi

$\cos\varphi = \dfrac{AD}{AB} = \cos\widehat{DAB}$ *hay* $DM \perp AB$. Mặt khác ta có bất đẳng thức

$S = c + d \le \sqrt{2\left(c^2+d^2\right)}$ và đẳng thức xảy ra khi $c = d$ hay các cạnh *AD, BD, CD* có thể làm cạnh của một tam giác vuông. Còn *DM* là đường cao hạ xuống cạnh bé nhất của tam giác *ABC*

12. Cho tứ diện *ABCD* có trọng tâm *G* vànội tiếp trong mặt cầu tâm *O*. Các đường thẳng *AG, BG, CG, DG* lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A', B', C', D'. Chứng minh rằng:

$$AA' + BB' + CC' + DD' \ge \frac{2}{\sqrt{6}}\left(AB + CA + AD + BC + CD\right)$$

Giải

Đặt $S = AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$

Ta có $AA'.AG = \left(AG + GA'\right)AG = AG^2 + AG.GA'$

Mặt phẳng qua tâm *O* và AA' cắt mặt cầu theo đường tròn lớn bán kính *R*.

Dễ thấy $GA.GA' = R^2 - OG^2$

Vì thế: $AA'.AG = AG^2 + \left(R^2 - OG^2\right) \ge 2\sqrt{AG^2\left(R^2 - OG^2\right)}$

Hay $AA' \ge \sqrt{4R^2 - 4OG^2}$ (1)

Do G là trọng tâm tứ diện nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Từ đó $GA^2+GB^2+GC^2+GD^2=\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\cdots+\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OD}\right)^2$

$$=4GO^2+4R^2+2\overrightarrow{GO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

$$=4GO^2+4R^2+2\overrightarrow{GO}\cdot 4\overrightarrow{OG}$$

Vậy $GA^2+GB^2+GC^2+GD^2=4GO^2+4R^2-8GO^2=4\left(R^2-OG^2\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $AA'\ge\sqrt{GA^2+GB^2+GC^2+GD^2}$

Ta có công thức tính trung tuyến tứ diện

$$3AG^2=\left(AB^2+AC^2+AD^2\right)-\frac{1}{3}\left(BC^2+CD^2+DB^2\right)$$

$$\Rightarrow GA^2+GB^2+GC^2+GD^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+CD^2+DB^2\right)$$

Nhờ thế: $AA'\ge\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+\cdots+CD^2}\ge\frac{1}{2\sqrt{6}}(AB+\cdots+CD)$

$$\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}(AB+\cdots+CD)^2}$$

Nên $AA'\ge\frac{1}{2\sqrt{6}}(AB+\cdots+CD)$.

Tương tự,

$$BB'\ge\frac{1}{2\sqrt{6}}(AB+\cdots+CD);CC'\ge\frac{1}{2\sqrt{6}}(AB+\cdots+CD);DD'\ge\frac{1}{2\sqrt{6}}(AB+\cdots+CD).$$

Cộng 4 bất đẳng thắc trên ta có:

$$AA'+BB'+CC'+DD'\ge\frac{2}{\sqrt{6}}(AB+AC+AD+BC+BD+CD)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} AG^2=\left(R^2-OG^2\right) \\ AB=AC=AD=BC=BD=CD \end{cases}$ hay $ABCD$ là tứ diện đều.

13. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB = CD = a$; $BC = AD = b$; $AC = BD = c$. M là điểm tùy ý trong không gian. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB + MC + MD$.

Giải.

Vì tứ diện $ABCD$ là tứ diện gần đều nên trọng tâm của tứ diện trùng với tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Do đó ta có:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$OA=OB=OC=OD=R$ (bán kính mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$)

Ta có:

$$MA=\frac{1}{R}\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|\ge\frac{1}{R}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{R}(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{R}\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA}+R.$$

Tương tự: $MB \geq \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB}+R$

$MC \geq \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OC}+R.$

$MD \geq \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OD}+R.$

Do đó: $MA+MB+MC+MD \geq \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)+4R=4R$

Ta có tứ diện gần đều với 3 kích thước *a, b, c* thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp

$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$

Vậy $MA+MB+MC+MD \geq \sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv O$.

CHƯƠNG II: THIẾT DIỆN.

I. Một số khái niệm:

- Thiết diện: là một mặt cắt của một hình đa diện hoặc hình cầu.
- Muốn tính diện tích thiết diện có nhiều cách: Nếu thiết diện là một tam giác thì việc tính sẽ trở nên dễ dàng hơn. Nó được tính dựa trên các phương pháp cơ bản sau:
    + Áp dụng lượng giác hay lượng giác hóa bài tóan.
    + Áp dụng hệ thức lượng.
    + Áp dụng tọa độ.
- Nếu thiết diện là một đa giác từ 4 đỉnh trở lên ta có các phương pháp:
    + Chia thành các tam giác để tính.
    + Áp dụng lượng giác hay lượng giác hóa bài tóan.
    + Áp dụng hệ thức lượng.
    + Áp dụng tọa độ.
- Từ đó để tìm cực trị hay chứng minh các bất đẳng thức diện tích thiết diện ta có các phương pháp sau:
    + Áp dụng lượng giác hay lượng giác hóa bài tóan.
    + Áp dụng hệ thức lượng.
    + Áp dụng tọa độ.
    + Áp dụng các bất đẳng thức cổ điển(Cauchy, Bunhia, ..)
    + Phân tích đi lên bài toán để tìm hướng giải.
    + Liên tưởng tới những bài tương tự.
    + Dựa vào các đại lượng bất biến.

* Một số định nghĩa, định lí:

Định nghĩa 1:

Mặt phẳng tạo bởi trung điểm của 1 cạnh trong tứ diện và đoạn thẳng đối diện với cạnh đó gọi là mặt trung diện.

Một tứ diện có sáu mặt trung diện và sáu mặt trung diện này đồng quy tại trọng tâm của tứ diện.

Định nghĩa 2:

Mặt phẳng đối xứng với mặt trung diện qua mặt phân giác được gọi là mặt đối trung.

Một tứ diện có sáu mặt đối trung và các mặt này đồng quy tại điểm đối trọng tâm của tứ diện.

Định lí 1:

Cho tứ diện $ABCD$. M là 1 điểm nằm trong tứ diện, H,I,J,K là hình chiếu của M xuống các $mp(BCD), mp(CDA), mp(DAB), mp(ABC)$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

1) M là đối trọng tâm của tứ diện ABCD.

2) $\dfrac{V_{(MBCD)}}{S_A^2} = \dfrac{V_{(MCDA)}}{S_B^2} = \dfrac{V_{(MDAB)}}{S_C^2} = \dfrac{V_{(MABC)}}{S_D^2}$

3) M là trọng tâm tứ diện $HIJK$.

(S_A, S_B, S_C, S_D là diện tích của các mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$).

Định lí 2:

Trong goác tam diện, mối mặt nhỏ hơn tổng hai mặt kia.

Hệ quả của định lí 2:

Hiệu hai mặt của góc tam diện nhỏ hơn mặt thứ ba. Mối quan hệ về số đo của các mặt góc tam diện giống như mối quan hệ về dộ dài các cạnh của một tam giác.

Định lí 3:

Tổng các mặt của một góc đa diện lồi nhỏ hơn 2π .

Định nghĩa:

Tam diện bù với một góc tam diện bất kì: Cho góc tam diện *OABC*, dựng nửa mặt phẳng OA' vuông góc với $mp(OBC)$ và nằm cùng phía với OA đối với $mp(OBC); OB', OC'$ cũng được dựng tương tự. Ta có tam diện $OA'B'C'$ là góc tam diện bù với góc tam diện *OABC* đã cho.

Tức là góc tam diện tạo bởi các nửa đường thẳng xuất phát từ đỉnh của góc tam diện ban đầu, vuông góc với một trong 3 mặt phẳng tạo thành góc tam diện ban đầu và cùng phía với cạnh (xuất phát từ *O*) còn lại.

Các tính chất của góc tam diện bù:

- Quan hệ tam diện bù có tính chất đối xứng. Có nghĩa là nếu $OA'B'C'$ là góc tam diện bù của *ABCD* thì điều ngược lại cũng đúng.
- Tổng của mỗi mặt của một góc tam diện với nhị diện tương ứng (nhị diện có cạnh vuông góc với mặt đó trong góc tam diện bù) bằng π.
- Nếu 2 góc tam diện bằng nhau thì 2 góc tam diện bù chúng cũng bằng nhau.

Sử dụng góc tam diện bù ta có định lí sau:

- Tổng các nhị diện trong một góc tam diện lớn hơn π và nhỏ hơn 3π .

Định lí 4: Định lí trung bình:

Cho các số dương $a_i, \left(i=\overline{1,n}\right)$, ta có:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_i = a_{i+1}$

*<u>**Một số ví dụ:**</u>

Vd1: a) Chứng minh rằng diện tích của một thiết diện tam giác bất kì của tứ diện không vượt quá diện tích của một trong các mặt của nó.

b) Chứng minh rằng diện tích của một thiết diện tứ giác bất kì của tứ diện không vượt quá diện tích của một trong các mặt của nó.

<u>Giải:</u>

a) Nếu thiết diện tam giác không đi qua một đỉnh của tứ diện, thì tồn tại thiết diện tam giác song song với một mặt của nó, khi đó diện tích thiết diện không lớn hơn. Vì vậy chỉ cần xét trường hợp khi thiết diện đi qua một đỉnh của tứ diện.

Giả sử điểm *M* nằm trên cạnh *CD* của tứ diện *ABCD*. Độ dài đường cao hạ từ điểm *M* xuống đường thẳng *AB,* bao gồm giữa các độ dài của hai đường chéo hạ từ các điểm *C* và *D* xuống đường thẳng này.

Vì vậy: $S_{ABM} \le S_{ABC}$ hoặc $S_{ABM} \le S_{ABD}$

Giả sử các điểm *M* và *N* nằm trên các cạnh *CD* và *CB* của tứ diện *ABCD*. Có thể áp dụng điều khẳng định vừa được chứng minh cho thiết diện *AMN* của tứ diện *AMBC*.

Vì vậy: $S_{AMN} \le S_{ACM} \le S_{ACD}$ hoặc $S_{MNA} \le S_{ABM}$

b) Giả sử mặt phẳng cắt cạnh *AB,CD,BD* và *AC* của tứ diện *ABCD* tại các điểm *K,L,M,N* tương ứng. Ta xét hình chiếu trên mặt phẳng vuông góc với đường thẳng *MN*. Vì $K'L' = KL\sin\alpha$, ở đó α là góc giữa các đường thẳng *KL,MN* nên diện tích của thiết diện bằng $\dfrac{K'L'.MN}{2}$

Vì vậy cần chứng minh rằng $K'L' \le A'C'$ hoặc $K'L' \le B'D'$.

Còn lại chứng minh điều khẳng định sau đây trong hình học phẳng: " Độ dài đoạn thẳng *KL*, đi qua giao điểm hai đường chéo của tứ giác lồi *ABCD*, không vượt quá độ dài của một trong các đường chéo của nó (các đầu mút của đoạn thẳng nằm trên các cạnh của tứ giác)". Ta kẻ qua các đầu mút của đoạn thẳng *KL* các đường vuông góc với nó, và xét hình chiếu của các đỉnh tứ giác trên chúng, và cũng như giao điểm của các đường thẳng *AC* và *BD* với chúng.

Giả sử, để xác định, điểm *A* nằm bên trong dải được cho bởi các đường thẳng này, còn điểm *B* nằm bên ngòai dải. Khi đó có thể coi rằng *D* nằm trong dải, vì nếu khác đi thì *BD>KL* và chứng minh xong. Vì:

$$\frac{AA'}{BB'} \le \frac{A_1K}{B_1K} = \frac{C_1L}{D_1L} \le \frac{CC'}{DD'}$$

Thì hoặc là $AA' \le CC'$(và khi đó *AC>KL*), hoặc là $BB' \ge DD'$(và khi đó *BD>KL*).

Vd 2: Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C) có đường kính $AB = 2R$. Vẽ SA vuông góc với α; $SA = 2R$. Gọi *M* là điểm di động trên (C), β là mặt phẳng qua *A* và vuông góc với *SB*. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện do β cắt hình chóp *SABM*. Suy ra vị trí của *M* khi đó.

<u>Giải:</u>

Dễ dàng tìm được thiết diện chính là tam giác *AIN*. Ta có $BM \perp AM$ & $BM \perp SA$ nên $BM \perp (SAM) \Rightarrow BM \perp AN$. Mặt khác, $\beta \perp SB$ nên $SB \perp AN$. Do vậy $AN \perp (SBM)$, suy ra $AN \perp NI$. Như thế, tam giác *ANI* vuông tại *I* nên $NH \le \dfrac{AI}{2}$ (với *NH* là đường cao trong tam giác *ANI*). Ta có: $S_{ANI} = \dfrac{1}{2}AI.NH$, vì *AI* cố định $(AI \perp SB)$ nên diện tích tam giác *NI* lớn nhất khi *NH* lớn nhất, nghĩa là khi *H* trùng với trung điểm O' của *AI* và: $NH = \dfrac{AI}{2} = \dfrac{SB}{4} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Vậy $(S_{ANI})_{\max} = \dfrac{1}{2}R\sqrt{2}\dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R^2}{2}$. Lúc này, tam giác *ANI* vuông cân tại *I* nên $AN = \dfrac{AI}{\sqrt{2}} = R$.

Từ hệ thức: $\dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2}$, ta suy ra $AM = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Tóm lại, diện tích thiết diện lớn nhất khi điểm M nằm trên đường tròn và ở vị trí cách A một đoạn bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHUNG TRONG CÁC BÀI BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

I Giới thiệu về phương pháp:

Những bài toán cực trị về diện tích và thể tích đều quy về việc tìm cực trị của độ dài đoạn thẳng hay độ lớn của góc. Nên người ta thường dùng phương pháp hình học để giải quyết. Một số bài bất đẳng thức hình học hóc búa cũng vậy. Người ta sử dụng các tính chất, các bất đẳng thức hình học cơ bản để chứng minh.

- Định lí về đường vuông góc và đường xiên.
- Bất đẳng thức tổng quát của bất đẳng thức tam giác :

$AB \leq \sum A_i A_{i+1} + A_n B$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A_{i+1} \in AB\left(i = \overline{0, n-1}\right)$

- Định lí về so sánh cạnh và góc trong một hình tam giác.
- Định lí về so sánh cạnh và góc trong 2 hình tam giác.
- Các bất đẳng thức trong một góc tam diện hay góc đa diện lồi.
- Bất đẳng thức liên hệ giữa cạnh và đường chéo trong hình hộp:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{d^2}{3}$$

(a,b,c là 3 độ dài của hình hộp, d là độ dài đường chéo).

- Có một hình lập phương cạnh 1 thì ta có tổng các khỏang cách từ một điểm tùy ý đến tất cả các đỉnh của nó không nhỏ hơn $4\sqrt{3}$.
- Một đoạn thẳng nằm bên trong một đa diện lồi thì độ dài của nó không vượt quá độ dài đoạn thẳng lớn nhất với các đầu mút là các đỉnh đa diện.
- Bên trong một đa diện lồi có 2 điểm thì tồn tại một trong các đỉnh của đa diện gần một trong hai điểm hơn điểm kia.
- Tổng độ dài từ một điểm nằm trong tứ diện đến các đỉnh của tứ diện không lớn hơn tổng độ dài các cạnh của tứ diện.
- Định lí Cosin tổng quát: Giả sử *A,B,M* là ba điểm tùy ý trong không gian. Thế thì:

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 + MB^2 - AB^2$$

(Các bất đẳng thức hình học cơ bản này bạn đọc có thể tự tìm tòi cách chứng minh cho riêng mình vì nó hòan tòan cơ bản và dễ dàng).

II Một số ví dụ:

Vd 1: Cho d và Δ là hai đường thẳng chéo nhau. Gọi *A,B* là hai điểm cố định trên *d* và *CD=l* (không đổi) di động trên Δ. Hãy tìm vị trí của *CD* để diện tích toàn phần của tứ diện *ABCD* là nhỏ nhất.

Giải:

Để ý: S_{ACD} & S_{BCD} không đổi.

$(S_{TP}) \to \min \Leftrightarrow (S_{CAB} + SDAB) \to \min$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB[CE + DF] \to \min$

$\Leftrightarrow (CE + DF) \to \min$

Xét mặt phẳng $(\alpha) \perp d$ tại *O*, chiếu *CD* xuống (α) thành $C'D'$. (*E,F* nằm trên d sao cho *CE* và *DF* vuông góc với *d*.).

$CE // = C'O; DF // = D'O$, suy ra $(S_{TP} \to \min \Leftrightarrow (C'O + D'O) \to \min)$.

Vẽ $OI // = C'D' \Rightarrow OC' + OD' = OD' + D'I \geq O''I$ (O'' đối xứng của *O* qua $C'D'$). Suy ra rằng $OC' + OD$ đạt giá trị nhỏ nhất khi D' trùng với *M*, giao điểm của $C'D'$ và $O''I$.

Từ đó ta suy ra cách dựng điểm *D* trên Δ để diện tích toàn phần của tứ diện *ABCD* nhỏ nhất:

Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với d tại điểm *O* bất kì. Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên (α). Hạ $OM \perp \Delta'$. Từ *M* kẻ đường vuông góc với (α), cắt Δ tại *D*. Suy ra vị trí của *C*.

Vd2: Cho chóp đều *(P)*, có đáy là một đa giác đều n cạnh, mà diện tích bằng diện tích mỗi mặt bên. Đối với mỗi điểm *M* ở bên trong hình chóp *(P)*, người ta dựng *(n+1)* hình chóp đồng dạng với *(P)*, có đáy thuộc mặt của *(P)* còn đỉnh là điểm *M*. Hãy tìm vị trí của điểm *M* bên trong *(P)* để tổng diện tích các mặt của *(n+1)* hình chóp đó đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Giải:</u>

Xét (*n+1*) hình chóp có đỉnh tại *M* và đáy của chúng lần lượt nằm trên (*n+1*) mặt của *(P)*, là những hình chóp này đồng dạng với *(P)*.

Gọi $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_{n+1}$ là độ dài các đường cao của *(n+1)* hình chóp trên được kẻ từ đỉnh *M*.

Ta có: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{3} Sh_i = \frac{1}{3} Sh$

Trong đó h là đường cao của *(P)* còn *S* là diện tích của một mặt của *(P)*.

Suy ra $\sum_{i=1}^{n+1} h_i = h$

Gọi tỉ số đồng dạng của hình chóp đỉnh *M* thứ *i* (nói trên) với hình chóp *(P)* là K_i. Khi đó ta có:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{h_i}{h} = 1 = \sum_{i=1}^{n+1} K_i = \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{\frac{S_i}{S}}$$

Trong đó S_i là diện tích mỗi mặt của hình chóp thứ *i* đồng dạng với *(P)*.

Theo bất đẳng thức BCS ta có:

$$S = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{S_i}\right)^2 \leq (n+1)\sum_{i=1}^{n+1} S_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} S_i \geq \frac{S}{n+1},$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các S_i bằng nhau, do đó các h_i cũng bằng nhau, nên *M* trùng với tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp *(P)*. Đó là vị trí điểm *M* thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vd 3: Tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BCD}=90^o$ và chân đường vuông góc hạ từ D xuống mặt phẳng (BCA) trùng với trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$(AB+BC+CA)^2\le 6\left(AD^2+BD^2+CD^2\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Giải:

Trước tiên ta sẽ chứng minh rằng $\widehat{CDA}=90^o$.

Thật vậy, gọi H là hình chiếu của D xuống mặt phẳng (ABC), giả sử CH cắt AB tại E. Do $AB\perp CE\ \&\ AB\perp DH$ nên $AB\perp(DEC)$, suy ra $AB\perp DE$. Từ đó, các tam giác vuông $BED\ \&\ CEB$ cho ta:

$$BD^2=DE^2+BE^2$$

$$CB^2=CE^2+BE^2$$

Trừ vế theo vế hai đẳng thức trên ta được:

$$CB^2-BD^2=CE^2-DE^2$$

Nhưng vì tam giác BDC vuông nên ta lại có:

$$CB^2-BD^2=CD^2$$

Suy ra $CE^2=CD^2+DE^2$, tức là tam giác CDE vuông tại D.

Tóm lại, ta có: $CD\perp DB\ \&\ CD\perp DE$ nên $CD\perp AD$. Nói cách khác, $\widehat{CDA}=90^o$. Hòan tòan tương tự ta cũng có: $\widehat{ADB}=90^o$. Từ đó, ta được:

$$AB^2+BC^2+CA^2=2\left(AD^2+BD^2+CD^2\right) \qquad (1)$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(AB+BC+CA)^2=AB^2+BC^2+CA^2+2(AB.BC+AB.AC+BC.CA)\le 3\left(AB^2+BC^2+CA^2\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$(AB+BC+CA)^2\le 6\left(AD^2+BD^2+CD^2\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $AB=BC=CA$.

Vd 4: Giả sử G là trọng tâm tam giác ABC và B là một điểm tùy ý trong không gian. Thế thì $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\dfrac{AB^2+BC^2+CA^2}{3}$ (hệ thức Leibniz).

Giải:

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}\Rightarrow\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2=9MG^2$$

$$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}=9MG^2$$

Sử dụng định lí cosin tổng quát, chẳng hạn $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2+MB^2-AB^2$, ta suy ra điều phải chứng minh.

Tổng quát hóa bài toán này lên ta sẽ có bài toán sau:

Vd 4: Giả sử G là trọng tâm của hệ n điểm A_i và M là một điểm tùy ý trong không gian. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = n.MG^2 + \frac{1}{n}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} A_iA_j^2$$

Phương pháp chứng minh vd 4 hòan toàn tương tự phương pháp chứng minh vd3. Và từ kết quả vd4 ta có thể giải quyết dễ dàng 2 vd sau:

Vd5: Cho hệ điểm A_i cố định. Tìm một điểm M trong không gian sao cho $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Vd 6: Cho hệ điểm A_i cố định và k là độ dài cho trước. Tìm tập hợp những điểm M trong không gian thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = k^2$

Vd7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, CD = a_1, AC = bBD = b_1, AD = c, BC = c_1, \alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$, $\beta = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right), \gamma = \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right)$. Tính $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ theo các cạnh của tứ diện.

<u>Giải:</u>

Từ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ suy ra

$2aa_1\cos\alpha = 2\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= \left(AB^2 + AD^2 - BD^2\right) - \left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

$= \left(a^2 + c^2 - b_1^2\right) - \left(a^2 + b^2 - c_1^2\right) = c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2$

Do đó: $\cos\alpha = \dfrac{c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2}{2aa_1}$

Tương tự ta có thể suy ra được $\cos\beta, \cos\gamma$

Từ ví dụ này ta có thể suy ra các hệ quả sau:

Hệ quả 1: Tứ diện đều là tứ diện trực giao.

Hệ quả 2: Điều kiện cần và đủ để tứ diện $ABCD$ là tứ diện trực giao là $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

Hệ quả 3: Giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$, $\alpha = (AB, CD), \beta = (AC, BD), \gamma = (AD, BC)$. Khi đó một trong ba giá trị $a^2\cos\alpha, b^2\cos\beta, c^2\cos\gamma$ bằng tổng hai giá trị còn lại.

Vd 8: Cho tam diện $Oxyz$ có Ox,Oy,Oz vuông góc nhau từng đôi một. Gọi I là điểm trong tam diện và a,b,c là khỏang cách từ I đến các mặt $(Oyz),(Ozx),(Oxy)$. Mặt phẳng α (di động) qua I cắt Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C.

a) Chứng minh: $\frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}+\frac{c}{OC}=1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của V_{OABC}, cho biết vị trí của I đối với tam giác ABC lúc đó.

Giải:

a) Ta có: $V_{OABC}=V_{IOAB}+V_{IOBC}+V_{IOCA}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}(OB.OC.a+OC,OA.b+OA.OB.c)$

$\Leftrightarrow \frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}+\frac{c}{OC}=1$

b) Vì I cố định nên a,b,c không đổi. Do ta có: $\frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}+\frac{c}{OC}=1$, suy ra tích $\frac{a}{OA}.\frac{b}{OB}.\frac{c}{OC}$ đạt giá trị lớn nhất khi: $\frac{a}{OA}=\frac{b}{OB}=\frac{c}{OC}=\frac{1}{3}$. Lúc đó, $\frac{OA.OB.OC}{a.b.c}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tức là OA,OB,OC đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà $V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC$ nên điều này có nghĩa là thể tích $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{2}abc$ khi $OA=3a,OB=3b,OC=3c$. Khi đó dễ thấy rằng I là trọng tâm của tam giác ABC.

III. Bài tập tự luyện:

1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

$a) m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$

$b) m_a^4+m_b^4+m_c^4=\frac{3}{4}(a^4+b^4+c^4)$

2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD.

a) Tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

b) Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AB và CD khi và chỉ khi $AC=BD$ và $AD=BC$.

3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. $M\&N$ thứ tự chuyển động trên $AC\ \&\ A'B$ sao cho $AM=A'N=c\left(0\le x\le a\sqrt{2}\right)$

a) Chứng minh rằng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

c) Tính độ dài MN theo $a\&x$. Tìm x để MN đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

d) Gọi $\alpha \& \beta$ thứ tự là các góc tạo bởi MN với AC và $A'B$. Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{1}{2}$.

BÀI 2: PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG VÀ MẶT

I. Kiến thức cơ bản:

1. Liên quan giữa cặp vecto chỉ phương và pháp vecto của mặt phẳng (α):

Giả sử $\overrightarrow{a_1}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{a_2}=(x_2,y_2,z_2)$ là cặp vecto chỉ phương và $\vec{n}=(A,B,C)$ là pháp vecto của mặt phẳng (α). Ta sẽ có:

$$A=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};B=\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix};C=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\vec{n}\neq\vec{0}\right)$$

2. Điều kiện để hai điểm khác phía đối với một mặt phẳng (α):

Định lí: Cho (α) có phương trình:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$$

Điều kiện cần và đủ để hai điểm $M=(x_1,y_1,z_1),N=(x_2,y_2,z_2)$ ở khác phía đối với mặt phẳng (α) là $f(M)f(N)<0$ (Trong đó $f(M)=Ax_1+By_1+Cz_1+D$).

II. Một số ví dụ:

Vd 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. *M,N,I* di động trên $AA',BC,C'D'$ sao cho $A'M=BN=C'I=a\,(0\leq a\leq 1)$.

a) (α) là mặt phẳng qua *M,N,I*. Chứng minh (α) luôn tự song song.

b) Tính $d\left(A,(\alpha)\right)$ theo *a*.

c) Tính diện tích tam giác *MNI* theo *a* và xác định *M* để diện tích đó nhỏ nhất.

Giải:

a) Chọn hệ trục tọa độ: $A(0,0,0),B(1,0,0),D(0,1,0),A'(0,0,1)$.

Từ đó ta có tọa độ của các điểm còn lại của hình lập phương cạnh 1.

Để chứng minh (α) tự song song ta cần chứng minh pháp vecto của (α) là xác định. Thật vậy $\overrightarrow{MN}=(1,a,a-1),\overrightarrow{MI}=(1-a,1,a)$ là cặp vecto chỉ phương của (α) thì pháp vecto là

$$\vec{n}=\left(\begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ a & 1-a \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1-a & 1 \end{vmatrix}\right)$$ hay $\vec{n}=\left(a^2-a+1\right)(1,-1,1)$. Ta có thể chọn vecto $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)$ là pháp vecto của (α) (đpcm).

b)Trước hết ta lập phương trình (α) biết pháp vecto $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)$ và qua điểm $M(0,0,1-a)$ là $x-y+z+a-1=0$.

Vậy $d(A,\alpha)=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{1-a}{\sqrt{3}}$

c) Ta có:

$S_{MNI}=\dfrac{1}{2}\sqrt{MN^2MI^2-\left(\overrightarrow{MN}\overrightarrow{MI}\right)^2}\quad(1)$

$MN^2=2(a^2-a+1)\quad(2)$

$MI^2=2(a^2-a+1)\quad(3)$

$\overrightarrow{MN}\overrightarrow{MI}=a^2-a+1\quad(4)$

Thay (2),(3),(4) vào (1) ta được:

$S_{\Delta MNI}=S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2-a+1\right)$

Rõ ràng $S_{\min}\Leftrightarrow a^2-a+1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\min\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$ tức là M là trung điểm của AA'.

Vd2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Lấy M thuộc đoạn AD', N thuộc đoạn BD với $AM = DN = x$. $\left(0<x<a\sqrt{2}\right)$. Chứng minh rằng với $x=a\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ thì đoạn MN ngắn nhất.

Giải:

$A(0,0,0),B(a,0,0),C(a,a,0),D(0,a,0),A'(0,0,a),B'(a,0,a),C'(a,a,a),D'(0,a,a)$

$\Rightarrow M\left(0,\dfrac{x}{\sqrt{2}},\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right),N\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}},a-\dfrac{x}{\sqrt{2}},0\right)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}},a-x\sqrt{2},\dfrac{-x}{\sqrt{2}}\right)$

Ta có:

$MN^2=3\left[\left(x-\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2+\dfrac{7a^2}{9}\right]$

Suy ra đpcm.

BÀI 3: PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

I Lý thuyết:

Để chứng minh các bất đẳng thức hình học, ngòai phương pháp hình học thuần nhất chúng ta còn có thể chứng minh bằng cách sử dụng các tính chất đại số, các bất đẳng thức cổ điển,…

* Một số bất đẳng thức cổ điển thường dùng để chứng minh:

- Bất đẳng thức AM-GM:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \geq n^n \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \left(x_i > 0, n \geq 2, i = \overline{1,n}\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_i = x_{i+1}$

- Bất đẳng thức BCS:

Cho trước hai bộ số thực tùy ý x_i & y_i $\left(i = \overline{1,n}, n \geq 1\right)$ ta có bất đẳng thức:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$ với đẳng thức chỉ khi $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_{i+1}}{y_{i+1}}$

- Bất đẳng thức Minkowski:

+ $$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}$$

+ $$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2} \geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2}$$

Tổng quát lên ta sẽ có bất đẳng thức với k bộ.

II Một số ví dụ:

Vd1: Trong mặt phẳng *(P)* cho đường thẳng *(D)* cố định. *A* là một điểm cố định nằm trên *(P)* và không thuộc đường thẳng *(D)*. Một góc vuông *xAy* quay quanh *A*, hai tia *Ax* và *Ay* lần lượt cắt *(D)* tại *B* và *C*. Trên đường thẳng *(L)* qua *A* và vuông góc với *(P)*, lấy điểm *S* cố định khác *A*. Gọi *H,K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* lên *SB,SC*.
a) Chứng minh rằng năm điểm *A,B,C,H,K* cùng nằm trên một mặt cầu.
b) Đặt *SA=h* và *d* là khỏang cách từ *A* đến *(D)*. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện *SABC* khi *xAy* quay quanh *A*.

Giải:

a) Ta có: $AB \perp (SAC)$ nên $AB \perp SC$, ta có $AM = d$ theo giả thiết. Thể tích tứ diện *SABC* là:

$$V = \frac{1}{6}SA.AM.BC = \frac{1}{6}hdBC.$$

Vậy *V* nhỏ nhất khi độ dài của *BC* nhỏ nhất. Nhưng ta lại có:

$$BA = \frac{AB.AC}{d} \le \frac{AB^2 + AC^2}{2d} = \frac{BC^2}{2d} \quad hay \quad BC \ge 2d$$

Nên giá trị nhỏ nhất của *BC* là *2d*.

Tóm lại thể tích tứ diện *SABC* đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{hd^2}{6}$, khi *BC* = *2d*, lúc ấy, *M* là trung điểm *BC* và tam giác *BAC* vuông cân tại *A*.

Vd 2: Cho hình chóp *S.ABC* trong đó *SA,SB,SC* vuông góc nhau từng đôi một. Lấy A', B', C' tương ứng trên *SA,SB,SC* sao cho $SA'.SA = SB'.SB = SC'.SC$. Vẽ $SH \perp (A'B'C')$; *SH* cắt *(ABC)* tại *G*.

a) Chứng minh *G* là trọng tâm tam giác *ABC*.

b) Cho $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp *S.ABC*. Chứng minh:

$$r = \frac{S_{SAB} + S_{SAC} + S_{BC} - S_{ABC}}{a+b+c}$$

c) Giả sử $a = \max\{a,b,c\}$. Chứng minh: $a \ge \left(3+\sqrt{3}\right)r$

Giải:

a) Để ý $SH \perp (A'B'C')$, ta có *H* là trực tâm của tam giác $A'B'C'$. Vì $SB'.SB = SC'.SC$ nên tứ giác BB’C’C nội tiếp, do đó: $\widehat{B'BC} = \widehat{SC'B'}$. Mà $\widehat{B'SN} = \widehat{SC'B'}$ (góc có cạnh vuông góc) nên $\widehat{B'SM} = \widehat{CBB'}$, từ đó $SM = MB$. Tương tự: $SM = MC$, suy ra *AM* là trung tuyến của tam giác *ABC*. Lí luận hòan toàn tương tự để có được *G* nằm trên một trung tuyến khác và suy ra điều phải chứng minh.

b) $$r = \frac{3V}{S_{TP}} = \frac{abc}{2(S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} + S_{ABC})} = \frac{abc(S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} - S_{ABC})}{2\left((S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA})^2 - S_{ABC}^2\right)} \quad (1)$$

Mà $S_{SAB}^2 + S_{SBC}^2 + S_{SAC}^2 = S_{ABC}$ và $S_{SAB} = \frac{1}{2}ab, S_{SBC} = \frac{1}{2}bc, S_{SCA} = \frac{1}{2}ca$ thay vào (1) ta suy ra điều phải chứng minh.

c) Từ câu (b) ta có được: $r = \frac{abc}{ab+bc+ca+2S_{BAC}}$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{abc\left(3+\sqrt{3}\right)}{ab+bc+ca+2S_{BAC}} \le a \Leftrightarrow ab+bc+ac+2S_{ABC} \ge bc\left(3+\sqrt{3}\right) \quad (2)$$

Từ giả thiết ta có:

$$ab+bc+ca \ge 3bc \quad (3)$$

Mặt khác, có ít nhất một góc trong tam giác *ABC* lớn hơn hoặc bằng 60^o nên ta có $\widehat{BAC} \ge 60^o$, suy ra:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}\sin\widehat{BAC}\ge\frac{1}{2}\sqrt{2ab}\sqrt{ac}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow 2S_{ABC}\ge\sqrt{3}abc \quad (4)$

Từ (3) và (4) ta suy ra (2), đpcm.

Vd 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng có 2 đầu nằm trên hai đường thẳng AB' & BC' đồng thời hợp với mặt phẳng $ABCD$ một góc 60^o .

Giải:

Gọi M',N' là hình chiếu của *M,N* xuống *(ABCD),* xét hệ trục gốc *B* trong mặt phẳng *(ABCD)*. Đặt:

$\overline{BN'}=x,\overline{BM'}=y$.

Ta có: $M'N'^2=x^2+y^2, MN^2=x^2+y^2+\left[a-(x+y)\right]^2$

MN hợp với *(ABCD)* một góc 60^o nên $MN=2M'N'$. Suy ra:

$$x^2+y^2+\left[a-(x+y)\right]^2=4\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+y^2\right)=\left[a-(x+y)\right]^2$$

Đặt $S = x + y$, $P = xy$.

Ta phải tìm $\min(S^2-2P) \quad (1)$ với điều kiện:

$$\begin{cases}3\left(S^2-2p\right)=(a-b)^2 & (2)\\ S^2\ge 4p & (3)\end{cases}$$

$$(2)\Rightarrow P=\frac{2S^2+2aS-a^2}{6}$$

$$(3)\Rightarrow S^2-2\frac{2S^2+2aS-a^2}{3}\ge 0\Leftrightarrow S^2-4Sa-2a^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(2+\sqrt{6}\right)a\le S\le\left(-2+\sqrt{6}\right)a$$

Xét: $F(S)=\dfrac{(S-a)^2}{3}\Rightarrow \min F(S)=\dfrac{\left(\sqrt{6}-3\right)^2a^2}{3}$

Vậy: $\min M'N'=\dfrac{\left|\sqrt{6}-3\right|a}{\sqrt{3}}=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)a$

Vd 4: Giả sử G là trọng tâm của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong mặt cầu tâm O. Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng GA_i với mặt cầu *(O)* là $A_i'\left(i=\overline{1,4}\right)$. Chứng minh rằng : $a) GA_1.GA_2.GA_3.GA_4\le GA_1'.GA_2'.GA_3'GA_4' \quad (1)$ $b) \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i'}\le\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i} \quad (2)$

Giải:

a) Do $GA_iGA_i^{'} = R^2 - OG^2$ nên (1) tương đương với :

$$\left(R^2 - OG^2\right)^2 \geq GA_1GA_2GA_3GA_4 \quad (1')$$

Và (2) tương đương với:

$$\left(R^2 - OG^2\right)\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i} \geq \sum_{i=1}^{4} GA_i \quad (2')$$

Ta có:

$$\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{4}\left(\overrightarrow{GA_i} - \overrightarrow{GO}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 = \sum_{i=1}^{4} GA_i^2 + 4GO^2 + 2\overrightarrow{GO}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{GA_i}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(R^2 - GO^2\right) = \sum_{i=1}^{4} GA_i^2 \geq 4\sqrt[4]{\prod_{i=1}^{4} GA_i^2} = 4\sqrt{\prod_{i=1}^{4} GA_i}$$

$$\Leftrightarrow \left(R^2 - GO^2\right)^2 \geq \prod_{i=1}^{4} GA_i$$

Vậy (1) được chứng minh xong.

b) Theo bất đẳng thức BCS ta có:

$$4\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{4} GA_i^2\right)^2,$$

$$\sum_{i=1}^{4} GA_i \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i} \geq 16$$

Suy ra: $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 \sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{GA_i} \geq \dfrac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{4} GA_i\right)^2 \sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{GA_i} \geq \sum_{i=1}^{4} GA_i$

Do đó: $\left(R^2 - OG^2\right)\sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{GA_i} \geq \sum_{i=1}^{4} GA_i$

Vậy (2) được chứng minh.

Vd 5: Tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong hình cầu bán kính R với tâm O. Gọi giao điểm của các đường thẳng AO, BO, CO, DO lần lượt với các mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ tại A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 \geq \frac{16}{3}R$$

Giải:

Ta có: $V_{ABCD} = V_{OABC} + V_{OBCD} + V_{OCDA} + V_{ODAB}$.

$$\Rightarrow \frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} + \frac{OD_1}{DD_1} = 1$$

Do đó:

$\sum_{cyc}\frac{AA_1-R}{AA_1}=1\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{1}{AA_1}=\frac{3}{R}$

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$(AA_1+BB_1+CC_1+DD_1)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{AA_1}\right)\geq 4^2=16$

Nên: $AA_1+BB_1+CC_1+DD_1\geq\frac{16}{3}R$

Dấu bằng xảy ra khi tứ diện đều.

Vd 6: Xét tập hợp T gồm tất cả các tứ diện $ABCD$ có tính chất là tổng diện tích các mặt ABD, ACD, BCD không vượt quá 1. Hãy tìm tất cả các tứ diện thuộc tập hợp T sao cho tứ diện đó có thể tích lớn nhất.

Giải:

Gọi P là chân đường cao kẻ từ đỉnh C đến mặt (ABD) của tứ diện $ABCD$ thuộc T. Đặt:

$DA=a, DB=b, DC=c, Cp=h, \sin\widehat{ADB}=l$ và x, y là khỏang cách từ P đến AD và DB.

Khi đó ta có:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}abhl,$$

$$S_{ABC}=\frac{a}{2}\sqrt{h^2+x^2}\geq\frac{ah}{2}, S_{DBC}=\frac{b}{2}\sqrt{h^2+y^2}\geq\frac{bh}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và giả thiết ta có:

$$2\geq abl+ah+bh\geq 3\left(a^2b^2h^2l\right)^{\frac{1}{3}}$$

Do $l\leq 1$ nên: $\left(a^2b^2h^2l\right)^{\frac{1}{3}}=(6V)^{\frac{2}{3}}l^{-\frac{1}{3}}\geq(6V)^{\frac{2}{3}}$.

Vậy: $V\leq\frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}$

Dấu bằng xảy ra khi tất cả các dấu bằng bất đẳng thức trên xảy ra dấu bằng nghĩa là khi:

$x=y=0, l=1, a=b=h=\sqrt{\frac{2}{3}}$, khi đó tứ diện vuông tại D và $DA=DB=DC=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Vd 7: Cho lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao $AA'=\frac{AB}{2}$.Gọi M là điểm tùy ý trên AD. Tìm giá trị lớn nhất có thể đạt được của góc $\widehat{A'MC'}$.

Giải:

Đặt $AA'=\frac{AB}{2}=1\ \&\ AM=x, \alpha=\widehat{A'MC'}$.

Ta có: $\cos\alpha=\frac{A'M^2+C'M-A'C'^2}{2A'M.C'M}$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{(1+x)^2\left[5+(2-x)^2\right]}} \geq 0, \forall x \in [0,2]$$

α lớn nhất khi $\cos\alpha = 0$, lúc đó $\alpha = 90^0$ và $x = 1$, điểm M trở thành trung điểm AB.

Vd 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 1, AA' = x$. Tìm giá trị lớn nhất (tùy theo giá trị x) có thể có của góc tạo bởi BD' với mặt phẳng (BDC').

Giải:

Khỏang cách từ B đến mặt phẳng $(D'DC')$ cũng bằng BC.

Do đó ta có: $V_{BDD'C'} = \frac{1}{3}S_{DD'C'}.BC = \frac{1}{6}x \quad (1)$

$V_{BDD'C'} = V_{D'BDC'} = \frac{1}{3}S_{BDC'}BD'\sin\alpha \quad (2)$

($\alpha = \widehat{D'BH}, H$ là hình chiếu của D' lên mặt phẳng (BDC')).

Từ (1) và (2) ta được: $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{(2+x^2)(1+2x^2)}}$

$$\sin^2\alpha = \frac{x^2}{2x^4+5x^2+2} = \frac{1}{2x^2+\frac{2}{x^2}+5} \leq \frac{1}{9}$$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên suy ra $\sin\alpha \leq \frac{1}{3}, \sin\alpha$ lớn nhất là $\frac{1}{3}$ khi $x = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất có thể đạt được của $\alpha = g\left(BD', mp(BDC')\right)$ là $\arcsin\frac{1}{3}$, điều này xảy ra khi $x = AA' = 1$.

III. Bài tập tự luyện:

1. Trong tứ diện $ABCD$, các cạnh AD, BD, CD vuông góc lẫn nhau, còn các độ dài tương ứng của chúng là a,b,c. Chứng minh rằng với mỗi điểm M nằm trên một cạnh của tam giác ABC, tổng S các khỏang cách từ các đỉnh A,B,C đến đường thẳng DM thỏa mãn bất đẳng thức:

$$S \leq \sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

2. Xét các khối lập phương có tâm trùng với tâm đối xứng của khối hộp chữ nhật cho trước với cạnh $a < b < c$, còn các mặt thì song song với các mặt của khối hộp chữ nhật. Tìm cạnh của khối lập phương mà hiệu thể tích giữa hợp và giao của nó với khối hộp chữ nhật là nhỏ nhất.

3. Kí hiệu S và V lần lượt là diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp đều n-giác.
a) Với các giá trị cho trước n và S, hãy tìm giá trị lớn nhất của V.
b) Tính các cạnh đáy và đường cao của tất cả các hình chóp với $n = 4, S = 114, V = 64$.

4. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 1$, giữa tất cả các lăng trụ đều $2n$-giác $A_1,....,A_{2n},A_1^{'},....,A_{2n}^{'}$ với bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy bằng R cho trước, góc lớn nhất giữa đường chéo $A_1A_{n+1}^{'}$ và mặt phẳng $\left(A_1A_3A_{n+1}^{'}\right)$ đạt được khi ta có:

$$A_1A_1^{'} = 2R\frac{\cos 180^o}{n}$$

5. Cho Ox,Oy,Oz vuông góc nhau từng đôi một. Lấy $A \in Ox, B \in Oy, C \in Oz$ sao cho $OA = a, OB = b, OC = c$.
   a) Tính diện tích tam giác ABC theo a,b,c.
   b) Giả sử A,B,C thay đổi nhưng luôn luôn có: $OA + OB + OC + AB + BC + CA = k$ không đổi. Hãy xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $OABC$.

6. Cho tam giác đều ABC, gọi S là điểm ở trên trục tam giác của tam giác ABC, $SA = a, \widehat{BSC} = 2\alpha$.
   a) Chứng minh: $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$ khi S di động trên tam giác và S không trùng với O.
   b) Xét hình hộp có ba cạnh là SA,SB,SC. Chứng minh rằng hình hộp có sáu mặt đều là hình thoi bằng nhau. Xác định góc α để thể tích hình hộp lớn nhất. Nhận xét?

BÀI 4: CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Bài toán cực trị: *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một đại lượng hình học biến thiên f (độ dài đoạn thẳng, diện tích đa giác, thể tích khối đa diện…) yêu cầu phải tìm được các giá trị f_1, f_2 cố định luôn thỏa mãn bất đẳng thức:*

$$f_1 \le f \le f_2$$

Đồng thời chỉ rõ các vị trí hình học của đại lượng biến thiên đang xét, để tại đó f đạt giá trị nhỏ nhất f_1 hay giá trị lớn nhất f_2. Đôi khi bài toán chỉ có thể tìm được 1 trong hai giá trị này.

Trong quá trình tìm kiếm lời giải nhiều bài toán cực trị hình học, sẽ có lợi nếu chúng ta xem xét các phần tử biên, phần tử giới hạn nào đó, tức là phần tử mà tại đó mỗi đại lượng hình học có thể nhận giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất. Những tính chất của phần tử cực biên, phần tử giới hạn nhiều khi giúp chúng ta tìm được lời giải thu gọn của bài toán . Phương pháp tiếp cận bài toán như vậy được gọi là nguyên tắc cực hạn.

Cơ sở của phương pháp là cần kết hợp giữa các quan niệm cực trị như sau:

I. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG DỤNG

Bất đẳng thức AM-GM cho các biến đại lượng không âm.

$$\left[\begin{array}{ll} f(x)=A(x)+B(x)\ge 2\sqrt{A(x).B(X)}=const;\forall x\in D & (1)\\ g(x)=A(x).B(x)\le\left[\dfrac{A(x)+B(x)}{2}\right]^2=const;\forall x\in D & (2)\end{array}\right.$$

Nếu $\exists x_0\in D$, để đẳng thức trong (1) hoặc (2) xảy ra $\Leftrightarrow A(x_0)=b(x_0)$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\min\limits_{x\in D} f(x)=f(x_0)\\ \max\limits_{x\in D} g(x)=g(x_0)\end{array}\right.\qquad (ycbt)$$

Bất đẳng thức Cauchy cho các biến đại lượng tùy ý.

$$p(x)=a(x).\alpha(x)+b(x)\beta(x)\le\sqrt{\left[a^2(x)+b^2(x)\right]\left[\alpha^2(x)+\beta^2(x)\right]}=\textbf{const; }\forall x\in D\quad (3)$$

$$q(x)=\left[a^2(x)+b^2(x)\right]\left[\alpha^2(x)+\beta^2(x)\right]\ge\left[a(x)\alpha(x)+b(x)\beta(x)\right]^2=\textbf{const; }\forall x\in D\quad (4)$$

Nếu ; để đẳng thức trong (3) hoặc (4) xảy ra:

$$\Leftrightarrow\frac{a(x_0)}{\alpha(x_0)}=\frac{b(x_0)}{\beta(x_0)}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\max\limits_{x\in D} p(x)=p(x_0)\\ \min\limits_{x\in D} q(x)=q(x_0)\end{array}\right.\qquad (ycbt)$$

II. SỬ DỤNG TÍNH BỊ CHẶN CỦA HÀM LƯỢNG GIÁC

$h(x)=\sin u(x),\cos u(x)\le 1;$ nếu $\exists x_0\in D:\left[\begin{array}{l}\sin u(x_0)=1\\ \cos u(x_0)=1\end{array}\right.\Rightarrow \exists \max\limits_{x\in D} h(x)=h(x_0)=1$

III. SỬ DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ LẬP BẢNG BIẾN THIÊN

IV. SỬ DỤNG CÁC NGUYÊN LÍ HÌNH HỌC CỰC HẠN

Các bài toán cực trị của độ dài đoạn thẳng

(đoạn thẳng với các đầu mút trên hai đường thẳng chéo nhau, khoảng cách)

Đối với bài toán cực trị về độ dài đoạn thẳng ta sử dụng các kết quả

Bài toán 1: Tất cả các cạnh của lặng trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ có độ dài *a*. Các điểm *M* và *N* nằm trên đường thẳng BC_1 và CA_1, đồng thời đường thẳng *MN* song song với mặt phẳng AA_1B. Độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng *MN* như thế là bao nhiêu?

Giải:

Nếu M' & N' là hình chiếu của điểm *M* và *N* trên mặt phẳng *ABC*, thì $M'N'//AB$. Giả sử CM' = *x*, còn độ dài hình chiếu của đoạn thẳng *MN* trên đường thẳng CC_1 bằng $|a - 2x|$. Do đó:

$MN^2=x^2+(a-2x)^2=5x^2-4ax+a^2$

Độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng *MN* bằng $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

Bài toán 2: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ với cạnh *a*. Các đầu mút của đoạn thẳng cắt cạnh C_1D_1 nằm trên hai đường thẳng AA_1 và *BC*. Đoạn thẳng đó có thể có độ dài nhỏ nhất là bao nhiêu?

Giải:

Giả sử điểm *M* và *N* nằm trên các cạnh AA_1 và *BC* tương ứng và đoạn thẳng *MN* cắt cạnh C_1D_1 tại điểm *L*. Khi đó các điểm *M* và *N* nằm trên các tia AA_1 và *BC*, đồng thời $x=AM>a$ và $y=BN>a$. Nếu xét phép chiếu trên mặt phẳng AA_1B và *ABC*. Ta được tương ứng:

$$\frac{C_1L}{LD_1}=\frac{(y-a)}{a} \text{ và } \frac{C_1L}{LD_1}=\frac{a}{(x-a)}$$

Vì vậy $(x-a)(y-a)=a^2$, tức là $xy=(x+y)a$, còn có nghĩa là $(xy)^2=(x+y)^2a^2\ge 4xya^2$, tức là $xy\ge 4a^2$. Do đó,

$$MN^2 = x^2 + y^2 + a^2 = (x+y)^2 - 2xy + a^2 =$$

$$= \frac{(xy)^2}{a^2} - 2xy + a^2 = \frac{(xy - a^2)^2}{a^2} \geq 9a^2$$

Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng $3a$, nó xảy ra khi $AM = BN = 2a$.

Bài toán 3: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ với cạnh a. Các đầu mút của đoạn thẳng nghiêng trên mặt phẳng $ABCD$ góc 60^0 nằm trên đường thẳng AB_1 và BC_1. Đoạn thẳng đó có thể có độ dài nhỏ nhất là bao nhiêu?

Giải:

Xét hệ tọa độ, hướng của các trục *Ox, Oy* và *Oz* theo các tia *BC, BA* và BB' tương ứng, giả sử điểm *M* của đương thẳng BC_1 có tọa độ (x,0,x), còn điểm *N* của đường thẳng B_1A có tọa độ $(0, y, a-y)$. Khi đó tổng bình phương độ dài đoạn thẳng *MN* bằng $x^2 + y^2 + (a - x - y)^2$, còn bình phương độ dài hình chiếu M_1N_1 của nó nằm trên mặt phẳng chứa mặt *ABCD* bằng $x^2 + y^2$. Vì góc giữa các đường thẳng *MN* và M_1N_1 bằng 60^0, nên $MN = 2M_1N_1$, tức là $(a-x-y)^2 = 3(x^2 + y^2)$.

Giả sử $u^2 = x^2 + y^2$ & $v = x + y$. Khi đó $MN = M_1N_1 = 2u$.

Ngoài ra $(a-v)^2 = 3u^2$ theo điều kiện và $2u^2 \geq v^2$

Do đó, $(a-v)^2 \geq \frac{3v^2}{2}$, nghĩa là $v \leq a\left(\sqrt{6}-2\right)$

Vì vậy $u^2 = \frac{(a-v)^2}{3} \geq \frac{a^2\left(3-\sqrt{6}\right)}{3} = a^2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$,tức là $MN \geq 2a\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

Đẳng thức đạt được khi $x = y = \frac{a\left(\sqrt{6}-2\right)}{2}$

Bài toán 4: a) Ta xét mỗi điểm ở bên trong tứ diện đều, tổng khoảng cách từ nó đến tứ diện. Chứng minh rằng tổng này sẽ nhỏ nhất đối với tâm tứ diện.

b) Hai cạnh đối nhau của tứ diện bằng *b* và *c*, các cạnh còn lại bằng *a*. Giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm tùy ý trong không gian đến các đỉnh của tứ diện này bằng bao nhiêu?

Giải:

a) Ta dựng qua các đỉnh của tứ diện đều *ABCD* các mặt phẳng song songvới các mặt đối . Các mặt phẳng này cũng tạo thành các tứ diện đều. Vì tổng khoảng cách của chúng tới điểm X trong tứ diện *ABCD* là không đổi. Khoảng cách từ điểm X đến một mặt phẳng như thế không vượt quá khoảng cách từ điểm X đến đỉnh tương ứng của tứ diện, hơn nữa,tổng các khoảng cách từ điểm X đến tứ diện bằng tổng khoảng cách từ điểm X đến các mặt phẳng này, chỉ nếu X là tâm của tứ diện.

b) Giả sử trong tứ diện *ABCD* cạnh *AB* và *CD* bằng *b* và *c*, các cạnh còn lại bằng *a*. Nếu *M* và *N* là trung điểm của các cạnh *AB* và *CD*, thì đường thẳng *MN* là trục đối xứng của tứ diện *ABCD*. Giả sử *X* là một điểm tùy ý trong không gian, điểm *Y* đối xứng với nó qua *MN*; *K* là trung điểm của *XY*, (tất nhiênk nằm trên *MN*).
Khi đó $XA + XB = XA + YA > 2KA = KA + KB$
Tương tự $XC + XD \ge KC + KD$. Vì vậy chỉ cần xác định giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ các đỉnh của tứ diện đối với các điểm của đường thẳng *MN* là bao nhiêu. Đối với các điểm của đường thẳng này tổng các khoảng cách đến các đỉnh của tứ diện *ABCD* không bị thay đổi, nếu đường thẳng *AB* quay quanh đường thẳng này sao cho nó trở nên song song với *CD*, khi đó ta được hình thang cân*ABCD* với các đáy *b* và *c*, đường cao $MN = \sqrt{\dfrac{a^2 - (b^2 + c^2)}{4}}$ Đối với một tứ giác lồi bất kì , tổng khoảng cách từ một điểm đến các đỉnh đạt giá trị nhỏ nhất tại giao điểm của hai đường chéo; khi đó nó sẽ bằng tổng độ dài các đường chéo. Dễ dàng kiểm nghiệm rằng tổng độ dài các đường chéo của hình thang cân thu được *ABCD* bằng $\sqrt{4a^2 + 2bc}$

Bài toán 5: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ với cạnh *a*. Trên các tia A_1A, A_1B_1 & A_1D_1 lấy các điểm tương ứng *E, F* và *G* sao cho $A_1E = A_1F = A_1G = b$ .Giả sử *M* là điểm của đường tròn S_1 nội tiếp trong hình vuông *ABCD*, còn *N* là điểm của đường tròn S_2, đi qua *E, F* và *G*. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng *MN* bằng bao nhiêu?

Bài toán 6: Các độ dài của ba đoạn thẳng đôi một vuông góc với nhau *OA, OB* và *OC* bằng *a, b* và $c, a \le b \le c$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất có thể nhận được của tổng khoảng cách từ các điểm *A, B* và *C* đến đường thẳng l đi qua điểm *O* là bao nhiêu?

Bài toán 7: Cho khối tứ diện *ABCD*.
a) Một mặt phẳng song song với cạnh *BC* cắt cạnh *AB, AC, DC, DB* ở các điểm *M, N, P* và *Q*. Chứng minh rằng tứ giác *MNPQ* là hình thang. Điều kiện nào để *MNPQ* là hình bình hành ? là một hình vuông?
b) Cho biết các góc *BAC, CAD, DAB* là vuông, còn *BCD* là một tam giac đều cạnh *a*. Tính thể tích khối tứ diện theo *a*.
c) Cho biết *BCD* là một m giác đều cạnh *a* có tâm là điểm *O*. Tình đoạn *OA* theo *A* sao cho mặt cấu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* nhận đường tròn (*BCD*) làm đường tròn lớn. Xác định vị trí của đỉnh *A* trên mặt cầu ấy để thể tích tứ diện *ABCD* lớn nhất.

Giải:

a) Ta có $\text{mp}(P)//BC=(ABC)\cap(BCD)\Rightarrow MN//PQ$

Vậy thiết diện *MNPQ* là một hình thang.

Muốn cho *MNPQ* là hình bình hành; tương tự như trên cũng phải có thêm điều kiện *NP*//*MQ*, (*P*)//*AD*.

Vậy điều kiện để *MNPQ* là hình bình hành là mặt phẳng (*P*) phải song song đồng thời với *BC* và *AD*.

Hơn nữa để *MNPQ* là hình chữ nhật thì ta phải có $MN\perp NP$, vì $BC//MN$ và $AD//NP\ \Rightarrow BC\perp AD$.

Vậy điều kiện để *MNPQ* là hình chữ nhật là $BC\perp AD$

b) Tứ diện *ABCD* là tứ diện vuông ở $A\Rightarrow\begin{cases}BC=CD=DB=a\\ AB=AC=AD=\dfrac{CD\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Vậy khối tứ diện *ABCD* đó bằng :

$$V=\frac{1}{3}AB\left(\frac{1}{2}AC.AD\right)=\frac{1}{6}AB^3=\frac{1}{6}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

c)Để ý rằng đường tròn (*BCD*) là một đường tròn lớn của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* và có *O* là tâm của tam giác *BCD* cạnh *a*, nên tâm *O* cũng là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD*.

$$\Rightarrow OA=OB=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Từ đó diện tích *S* mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* bằng :

$$S_c=4\pi OA^2=4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}\pi a^2$$

Gọi *AH* là đường cao của tứ diện *ABCD* hạ từ đỉnh *A* xuống mặt đáy (*BCD*)

$$\Delta HOC\left(\widehat{H}=90^0\right)\Rightarrow AH\le OA$$

Và tính được thể tích khối tứ diện *ABCD* bằng:

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.AH=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\right).AH$$

$$=\frac{\sqrt{3}.a^2}{12}.AH\le\frac{\sqrt{3}a^2}{12}OA\qquad(1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow\exists\max\text{V}=\dfrac{\sqrt{3}.a^3}{12}.OA$

Bài toán 8: Trong mặt phẳng (*P*), cho hình vuông *ABCD* có cạnh bằng *a*. Trên đường thẳng *Ax* đi qua *A* và vuông góc với (*P*), người ta lấy một điểm *S* tùy ý, rồi dựng mặt phẳng (*Q*) qua *A* cắt *SB, SC* và *SD* lần lượt tại B',C',D'. Biết $(Q)\perp SC$.

a) Chứng minh rằng SB vuông góc góc AB' và SD vuông góc với AD'.

b) Xác định vị trí của S trên Ax sao cho hình chóp $C'ABCD$ có thể tích lớn nhất và tính thể ấy.

Giải:

a)Ta có: $\left.\begin{matrix} CB\perp AB \\ CB\perp SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow CB\perp (SAB)\supset AB'\Rightarrow CB\perp AB'$

Mặt khác ta có: $SC\perp AB'$ (vì AB' nằm trong mặt phẳng (Q)mà $SC\perp (Q)$). Do đó $AB'\perp (SBC)\supset AB'\Rightarrow AB'\perp SB$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $AD'\perp SD$.

Bài toán 9: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi SA đoạn thẳng góc với mặt phẳng ($ABCD$) và $SA = a$ và M là một điểm di động trên đoạn SD. Đặt $SM = x$.

a)Mặt phẳng (ABM) cắt đọan SC tại N. Chứng minh tứ giác $MABN$ là một hình thang vuông.

b)Đặt $y = AM^2$. Tính y theo a và x.

c)Khảo sát sự biến thiên và vẽ đường biểu diễn của $y = AM^2$ khi M vẽ đoạn SD.

Giải:

a) Ta có:

$AB // CD \Rightarrow AB // (SCD); AB\subset (ABMN)$

$\Rightarrow (ABMN)\cap(SDC) = MN // AB // CD$

Lại có: $\left.\begin{matrix} AB\perp AD \\ AB\perp SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp (SAD)\Rightarrow AB\perp AM \Rightarrow MN\perp (SAD)\Rightarrow MN\perp AM$

Vậy $AMNB$ là một hình thang vuông với hai đáy là AB và MN

b)Gọi H là hình chiếu của M xuống cạnh CD.

$$\Rightarrow \frac{MH}{SA}=\frac{MD}{DS}=\frac{a\sqrt{2}-x}{a\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{MH}=\frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta AHM \Rightarrow AM^2 = AH^2 + HM^2$$

HMD vuông cân $\Rightarrow HD = BM = \dfrac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}} \Rightarrow AH = AD - HD = a-\left(a-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

Do đó: $AM^2 = \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\left(a\sqrt{2}-x\right)^2}{2}=\dfrac{x^2+2a^2+x^2-2a\sqrt{2}.x}{2} \Rightarrow AM^2 = x^2 - a\sqrt{2}x + a^2$

Vậy $y = x^2 - a\sqrt{2}x + a^2; \forall x\in \left[0; a\sqrt{2}\right]$

c)Miền xác định của y, ta có: $D_f = \left[0; a\sqrt{2}\right]$

$$\Rightarrow y' = 2x - a\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

Lập bảng biến thiên ta sẽ có được đpcm.

Bài toán 10: Trong không gian cho ba tia Ox,Oy,Oz từng đôi một tạo với nhau một góc $\alpha\left(0<\alpha<90^0\right)$ trên Ox,Oy,Oz lấy lần lượt các điểm A,B,C sao cho: $OA=a,OB=b,OC=c$.

a) *a, b, c* phải thỏa hệ thức gì để tam giác ABC có góc A vuông ? Hãy tìm điều kiện cần và đủ rằng buộc *a, b, c* để tìm được *a* thỏa mãn hệ ấy.

b)Giả sử α cố định $\left(0<a<90^0\right)$ và $b=\text{const}$. Xác định *a* để tam giác ABC có góc A lớn nhất. Giá trị lớn nhất ấy của góc A bằng bao nhiêu.

c)Với các giả thiết của b). Hãy tính thể tích của tứ diện $OABC$ ứng với giá trị lớn nhất của góc A.

Giải:

a) ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ (1)

Định lí hàm số cosin trong tam giác:

$\Delta OAB, \Delta OBC \& \Delta OAC$ cho:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \quad (2)$$

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad (3)$$

$$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha \quad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1):

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b+c)\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a(b+c)\cos\alpha + bc\cos\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow g(a) = a^2 - \left[(b+c)\cos\alpha\right]a + bc\cos\alpha = 0 \quad (5)$$

Để tìm được *a* thỏa điều kiện (2) thì

$$\Leftrightarrow \Delta = (b+c)^2\cos^2\alpha - 4bc\cos\alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = \cos\alpha\left[(b+c)^2\cos\alpha - 4bc\right] \geq 0 \left(0<\alpha<90^0 \Rightarrow \cos\alpha > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2\cos\alpha - 4bc \geq 0 \quad (6)$$

(6) là điều kiện cần và đủ ràng buộc *b, c* và *a* để tìm được *a* thỏa mãn (5)

b) Xét giả thiết: $b = c \Leftrightarrow \Delta OAB = \Delta OAC$

Gọi $HB \perp OA \Leftrightarrow CH \perp OA \Rightarrow BH = CH$

Xét hai tam giac cân ABC và HBC; chúng có cạnh chung BC.

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \geq HB \\ AC \geq HC \end{cases} \Rightarrow \widehat{BAC} \leq \widehat{BHC}$$

$\Rightarrow \max \widehat{BAC} = \widehat{BHC}$ tương ứng $A \equiv H$.

$$\Delta OBH \Rightarrow \begin{cases} OH = b\cos\alpha \\ HB = HC = b\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Delta HBC \Rightarrow BC^2 = HB^2 + HC^2 - 2HB.HC\cos H$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 2b^2\sin^2\alpha - 2b^2\sin^2\alpha\cos H \qquad (7)$$

$$\Delta OBC \Rightarrow BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB.OC\cos\alpha \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\alpha$$

So sánh (7) và (8) theo vế:

$$\Rightarrow 2b^2 - 2b^2\cos\alpha = 2b^2\sin^2\alpha - 2b^2\sin^2\alpha\cos H$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos H$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha\cos H = \sin^2\alpha + \cos\alpha - 1 = \cos\alpha - \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos H = \frac{\cos(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha.2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow H = \arccos\left(\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là:

$$\min A = H = \arccos\left(\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

c) Thể tích V của tứ diện $OABC$ là:

$$V = \frac{1}{3}dt(\triangle HBC).OH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.HB.HC\sin H.OH$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}.b^2\sin 2\alpha.\sin H.b\cos\alpha$$

Bài toán 11: Trên cạnh AD của hình vuông $ABCD$ cạnh a, người ta lấy điểm M với $AM = x$ $(0 \leq x \leq a)$, và nữa trên đường thẳng Ax vuông góc tại A với mặt phẳng của hình vuông, người ta lấy điểm S với $SA = y$ $(y > 0)$ a)Chứng minh rằng nhì diện cạnh SB tạo bởi các mặt phẳng (SAB) và (SBC) là một nhị diện vuông.

b)Gọi *I* là trung điểm của *SC*, *H* là hình chiếu vuông góc của *I* lên *CM*, với giả thiết $x^2 + y^2 = a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp *SABCM*.

Bài toán 12: Trong không gian, cho hình chóp *S.ABCD*, đáy *ABCD* là hình chữ nhật với $AB = a, AD = b$; cạnh *SA* của hình chóp vuông góc với đáy, $AS = 2a$.

a) *M* là một điểm trên cạnh *AS*, với *AM* bằng $x(0 \le x \le 2a)$. Mặt phẳng *MBC* cắt hình chóp theo thiết diện gì? Tính diện tích thiết diện ấy theo *a, b, x.*

b)Xác định *x* sao cho thiết diện trên có diện tích lớn nhất.

c)Xác định *x* sao cho mặt phẳng (*MBC*) chia hình chóp ra làm hai phần có thể tích bằng nhau.

Bài toán 13:Cho tứ diện *SABC*, đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, $AB = 2a$, $AC = 3a$, cạnh *SB* vuông góc với đáy $\mathrm{SB} = \mathrm{a}\sqrt{3}$.

a) chỉ rõ tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *SABC*.

b) *M* là một điểm di động trên cạnh *SC,* đặt $MC = x$. Gọi *H* và *K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *M* lên các mặt phẳng *ABC* và *SAB*. Mặt phẳng *KMN*, cắt *AB* tại *L*. Chứng minh rằng: *KMHL* là một hình chữ nhật, với giá trị nào của x thì KMHL là một hình vuông.

c) Tính theo *a* và *x* độ dài đường chéo *ML* của hình chữ nhật *KMHL*. Với giá trị nào của *x* thì *ML* có độ dại nhỏ nhất? Ứng với giá trị nào của *x*, hãy nêu lên đặc tính hình học của *ML.*

d)Hãy tính theo *a* và *x* thể tích *V* của hình chóp đỉnh *A,* đáy *KMHL*. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm *V*

e)Xác định sao cho: $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.

BÀI 5: PHƯƠNG PHÁP VECTO

I.Sơ lược về phương pháp:

Phương pháp vecto là một vấn đề hay và được sử dụng phổ biến trong việc giải toán. Để sử dụng phương pháp vecto ta cần một số kiến thức cơ bản sau:

- Quy tắc hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$
- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng: $\exists k,l\in\mathbb{R}:\vec{a}=k\vec{b}+l\vec{c}$
- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng: $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=0\Rightarrow k=l=m=0$.
- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, khi đó với mọi $\vec{d}$ luôn tồn tại ba số thực x,y,z sao cho: $d=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.
- Muốn chứng minh hai đường thẳng $\vec{a},\vec{b}$ phân biệt song song ta chỉ cần chứng minh $\vec{a}=k\vec{b}$.
- Muốn chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng, ta chứng minh hai vecto $\overrightarrow{AB}\ \&\ \overrightarrow{AC}$ cộng tuyến nghĩa là có dạng $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$. Ngoài ra ta còn có thể dùng cách khác là chọn một điểm O nào đó rồi chứng minh: $OC=n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}$ với $n+m=1$.
- Muốn chứng minh đường thẳng a có vecto chỉ phương là $\vec{a}$ song song với mặt phẳng P hoặc nằm trên (P) ta lấy trong P hai vecto $\vec{m},\vec{n}$ không cộng tuyến rồi chứng minh ba vecto $\vec{m},\vec{n},\vec{a}$ đồng phẳng. Sau đó tùy theo đường thẳng a có điểm chung với mặt phẳng P hay không có điểm chung mà ta kết luận $a\subset P$ hoặc $a//P$.
- Muốn chứng minh bốn điểm A,B,C,D trong không gian cùng nằm trong một mặt phẳng ta chứng minh ba vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng, tức là: $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$. Hoặc bằng cách khác ta có thể chọn một điểm O nào đó rồi chứng minh $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC}+m\overrightarrow{OD}\quad(k+l+m=1)$.
- Muốn chứng minh đường gấp khúc $A_0A_1...A_{n-1}A_n$ khép kín nghĩa là $A_n\equiv A_0$ ta chứng minh:

$$\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\vec{0}$$

- $|\vec{a}||\vec{b}|\ge|\vec{a}\vec{b}|$ đẳng thức xảy ra khi $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương.
- $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge|\vec{a}+\vec{b}|$ đẳng thức xảy ra khi $\vec{a},\vec{b}$ cùng chiều.
- $|\vec{a}|-|\vec{b}|\ge|\vec{a}-\vec{b}|$ đẳng thức xảy ra khi $\vec{a},\vec{b}$ cùng chiều.
- $\left|\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|\vec{a}_i|$ đẳng thức xảy ra khi tất cả các vecto cùng chiều.

II. Một số ví dụ:

Vd1: Chứng minh trong ΔABC:
a) $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$

b) $R^2 + a^2 + b^2 \ge c^2$

Giải:

a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp, ta có: $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2 \ge 0$

$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}\right) \ge 0$ (1)

Với $2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2R - c^2$

Tương tự $2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2; 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 2R^2 - b^2$

Nên (1) trở thành: $9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge 0$. Suy ra đpcm.

b)Tương tự như câu a, nhưng ta sẽ khai triển $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)^2 \ge 0$.

Vd2: Chứng minh trong các tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu (O,R) cho trước thì hình có góc tam diện đỉnh A vuông khi và chỉ khi: $AB^2 + AC^2 + AD^2 - BC^2 - CD^2 - DB^2$ min.

Giải:

Khai triển: $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)^2 \ge 0$

Ta có:

$OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2 + 2\left(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\overrightarrow{OA}\right) \ge 0$

Với $2\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC} = 2R^2 - BC^2$

Khai triển tương tự và thế vào bất đẳng thức ở trên ta có:

$AB^2 + AC^2 + AD^2 - BC^2 - CD^2 - DB^2 \ge -4R^2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AA'}$

(A' là đối tâm của A trên mặt cầu (O))

Tức là $ABD'C.DC'A'B'$ nội tiếp mặt cầu (O,R) $\Leftrightarrow$ Góc tam diện đỉnh A là tam diện vuông.

$\le \dfrac{d - kd}{1-k} = d \quad \left(d = m\cdot\{AB, CD\}\right)$

Vd3: Tứ diện $ABCD$, trọng tâm G, bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp là R,r, độ dài các cạnh là a,b,c,d,e,f. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \le 16R^2$

b) $GA + GB + GC + GD \ge \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2}{4R}$

c) $8R^2 r \ge 3\sqrt{3}V$

Giải:

a) Khai triển $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\right)^2 \ge 0$ (như ví dụ 2)

b) Ta có: $GA.R \ge \overrightarrow{GA}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{GA}\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}\right) \Rightarrow GA.R \ge GA^2 + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{OG}$

Viết tương tự với $GB.R, GC.R, GD.R$, ta suy ra:

$R\left(GA+GB+GC+GD\right) \ge GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+\overrightarrow{OG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$ (1)

Mà $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (2)

Nên $(1) \Rightarrow R\left(GA+GB+GC+GD\right) \ge GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$ (3)

Bình phương 2 vế của (2) ta suy ra:

$GA^2+GB^2+GC^2+GD^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}{4}$. Do đó (3) suy ra đpcm.

c) Trong tam giác có 3 cạnh a,b,c thì $a^2+b^2+c^2 \ge 4S\sqrt{3}$.

Cộng 4 bđt như vậy ứng với 4 mặt và kết hợp câu a ta suy ra đpcm.

Vd 4: Tứ diện *ABCD*, trọng tâm *G*, bán kính mặt cầu ngoại tiếp *R*. Các đường thẳng AG, BG, CG, DG lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A', B', C', D'. Đặt $a = DA, b = DA, c = DC, a' = BC, b' = CA, c' = AB$. Chứng minh:

$$\frac{4}{R} \le \frac{1}{GA'}+\frac{1}{GB'}+\frac{1}{GC'}+\frac{1}{GD'} \le \frac{4\sqrt{6}}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right)$$

<u>Giải:</u>

Do: $GA.GA' = GB.GB' = GC.GC' = R^2 - OG^2 = \dfrac{GA^2+GB^2+GC^2+GD^2}{4}$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{GA'} = \frac{\sum GA}{R^2-OG^2} = 4\frac{\sum GA}{\sum GA^2} \quad (1)$$

Theo vd trên: $\sum GA^2 \le R\sum GA$ nên $(1) \Rightarrow \sum \dfrac{1}{GA'} \ge \dfrac{4}{R}$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right)^2 \ge \frac{36^2}{\left(a+b+c+a'+b'+c'\right)^2} \ge \frac{216}{a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2} \quad (2)$$

Cũng theo ví dụ trên ta có: $\sum GA^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2}{4}$

Nên $(2) \Rightarrow \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a'}+\dfrac{1}{b'}+\dfrac{1}{c'}\right)^2 \ge \dfrac{54}{GA^2+GB^2+GC^2+GD^2}$

$$= \frac{54\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)}{\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)^2} \ge \frac{27\left(GA+GB+GC+GD\right)^2}{2\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)^2}$$

Suy ra: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a'}+\dfrac{1}{b'}+\dfrac{1}{c'} \ge \dfrac{3\sqrt{6}\left(GA+GB+GC+GD\right)}{2\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}\sum\dfrac{1}{GA'}$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{GA'} \le \frac{4\sqrt{6}}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right)$$

Vd 5: Tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu (O,R). Gọi m_a, m_b, m_c, m_d là độ dài các trọng tuyến vẽ từ các đỉnh A,B,C,D. Chứng minh rằng:

$$R \ge \frac{3}{16}(m_a + m_b + m_c + m_d)$$

Giải:

Gọi G là trọng tâm tứ diện $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Ta có: $4R^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$

$$=\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GD}\right)^2$$

$$=4GO^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+2\overrightarrow{OG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$$

$$=4GO^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$$

$$\Rightarrow GA^2+GB^2+GC^2+GD^2 \le 4R^2 \qquad (1)$$

Mà $GA=\frac{3}{4}m_a, GB=\frac{3}{4}m_b, GC=\frac{3}{4}m_c, GD=\frac{3}{4}m_d$

Nên $(1) \Rightarrow 4R^2 \ge \frac{9}{16}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2\right) \qquad (2)$

Theo bất đẳng thức BCS:

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2 \ge \frac{1}{4}(m_a+m_b+m_c+m_d)^2$$

Nên (2) suy ra đpcm.

Vd 6: Tứ diện $ABCD$ vuông tại A và điểm M tuỳ ý. Chứng minh:
$2MA^2 \le MB^2 + MC^2 + MD^2$

Giải:

Gọi A' là điểm sao cho $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{A'D}-2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AA'}$

A' là đỉnh đối A của hình hộp 3 cạnh AB, AC, AD $\quad (1)$.

$MB^2+MC^2+MD^2-2MA^2=$

$$=\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B}\right)^2+\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'C}\right)^2+\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'D}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'A}\right)^2$$

$$=MA'^2+A'B^2+A'C^2+A'D^2-2A'A^2+2\overrightarrow{MA'}\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{A'D}-2\overrightarrow{A'A}\right)$$

$$=MA'^2+A'B^2+A'C^2+A'D^2-2A'A^2 \qquad (2)$$

Từ $(1) \Rightarrow 2AA'^2 = 2\left(AB^2+AC^2+AD^2\right)=A'B^2+A'C^2+A'D^2$

Nên $(2) \Rightarrow MB^2+MC^2+MD^2-2MA^2 \ge 0$

Vd 7: Cho tứ diện gần đều. $\left(AB = CD = a, BC = AD = b, AC = BD = c\right)$

a) Chứng minh với mọi điểm M thì: $MA^2 \le MB^2 + MC^2 + MD^2$

b) Chứng minh: $MA + MB + MC + MD \ge 4R$

<u>Giải:</u>

a) Gọi A' là điểm sao cho $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D} - \overrightarrow{A'A} = \vec{0}$

Ta làm tương tự như ví dụ trên, ta có đpcm.

b) Ta có: $MA.R \ge \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA}$ (O là mặt cầu ngoại tiếp)

$MA.R \ge \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}\right)\overrightarrow{OA} = OA^2 - \overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{OA} = R^2 - \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}$

PHẦN III: CÁC VẤN ĐỀ NGOÀI LỀ
HÌNH HỌC HÓA CÁC BÀI BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

Trong một số bất đẳng thức đại số ta có thể giải nhanh hơn bình thường bằng cách hình học hóa nó. Tùy theo dữ kiện ta có thể liên tưởng tìm ra các đặc điểm hình học của nó, và từ đó có thể tìm được cách giải ngắn gọn độc đáo. Các ví dụ sau sẽ cho các bạn thấy rõ hiệu quả của phương pháp này:

Vd 1: Cho $0 < x,\ y,\ z < 1$. Chứng minh: $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$

Giải:

Mỗi tích ở vế trái của bất đẳng thức ta có thể xem là tích của 2 cạnh của 1 tam giác. Không mất tính tổng quát ta chọn tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB,BC,CA lần lượt lấy các điểm M,N,P sao cho $AM = x, BN = z, CP = y$. Ta có bất đẳng thức diện tích:

$S_{\Delta AMP} + S_{\Delta MBN} + S_{\Delta NCP} < S_{\Delta ABC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}s(1-y)\sin 60^o + \frac{1}{2}z(1-x)\sin 60^o + \frac{1}{2}y(1-z)\sin 60^o < \frac{1}{2}\sin 60^o$

Vậy ta có đpcm.

Vd 2: Chứng minh rằng với mọi giá trị của x,y ta đều có: $$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2(x-y)}+\sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2(x-y)} \geq 2$$

Giải:

Nhìn các căn thức này chúng ta có thể liên tưởng tới gì? Đó là các công thức độ dài của một đường thẳng. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy lấy các điểm

$M\left(2\cos x.\cos y;\sin(x-y)\right)$; $N\left(2\mathrm{s}\,\mathrm{inx}.\sin y;\sin(x-y)\right)$. Ta có :

$OM = \sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2\left(x-y\right)}$

$ON = \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2\left(x-y\right)}$

Dựng hình bình hành ONPM

Ta có: $OM + ON = OM + PM \geq OP$

Cũng dễ thấy P có tọa độ là: $\left\{2\left(\cos x\cos y+\sin x\sin y\right);2\sin\left(x-y\right)\right\}$;

Do đó

$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2\left(x-y\right)}+\sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2\left(x-y\right)} \geq \sqrt{4\cos^2\left(x-y\right)+4\sin^2\left(x-y\right)}=2$

Vd 3: Chứng minh rằng nếu $x^2+y^2=u^2+v^2=1\,\&\,xu+yv=0$ thì: $x^2+u^2=y^2+v^2=1\,\&\,xy+uv=0$

Giải:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phương trình $x^2+y^2=1$ là phương trình đường tròn có tâm $O(0,0)$ bán kính bằng 1. Nhưng đồng nhất mặt phẳng tọa độ Oxy với mặt phẳng tọa độ Ouv thì đường tròn đó cũng có phương trình $u^2+v^2=1$. Trên đường tròn đó lấy hai điểm $M(x,y), N(u,v)$ và xét hai vecto $\overrightarrow{OM}=(x,y), \overrightarrow{ON}=(u,v)$. Từ giả thiết ta có: $xu+yv=\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{ON}=0$ nên $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON}$. Nếu M thuộc cung vuông *(I)* thì N hoặc nằm trong cung vuông thứ *(*II*)* hoặc nằm trong cung vuông(IV). Nhưng dù nằm trong cung vuông nào đi nữa ta cũng có: $|x|=|v|\,\&\,|u|=|y|$. Bình phương 2 vế các đẳng thức trên ta có: $\begin{cases} x^2=v^2 \\ y^2=u^2 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2+u^2=y^2+v^2=1\,\&\,xy+uv=0$

Sau đây là một số bài tập tự luyện dành cho bạn đọc:

1. Cho 3 số *x,y,z* dương thỏa $xyz(x+y+z)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $(x+y)(z+x)=1$.

Gợi ý: Sử dụng liên hệ giữa các công thức tính diện tích tam giác.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$F=\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1}+\sqrt{2x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x+1}$$

Gợi ý: Sử dụng mặt phẳng tọa độ.

3. Cho $a+b+c=2\,\&\,\mathrm{ax}+by+cz=6$ tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\sqrt{16a^2+a^2x^2}+\sqrt{16b^2+b^2y^2}+\sqrt{16c^2+c^2z^2}$$

4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3x}+1}$$

BÀI TOÁN ĐẲNG CHU

I. Những kiến thức cơ bản về bài toán đẳng chu

Giả sử trong mặt phẳng có miền đóng D nào đó, và giả sử L là đường biên của nó. Ta kí hiệu độ dài đường biên của nó là L và gọi đó là chu vi của D. Hai miền như thế có chu chu vi bằng nhau gọi là đẳng chu. Ta k/h diện tích của miền D là $S(D)$.

Bây giờ bài toán đẳng chu được đặt ra như sao: *Trong lớp cho trước K các tấm đẳng chu, hãy chỉ ra các tấm có diện tích lớn nhất.*

Định lý đẳng chu chính:

Trong tất cả những tấm phẳng có chu vi cho trước, hình tròn có diện tích lớn nhất

Để chứng minh định lý trên, ta sẽ phân phép chứng minh ra làm mấy phần sau:

I- Tâm ϕ với chu vi cho trước (l) mà có diện tích lớn nhất thì phải là hình lồi.

thật vậy, nếu nó không lồi thì ắt phải có có một dây AB có các đầu mút thuộc tấm còn các điểm trong nó nằm ngoài tấm. ta thực hiện phép đối xứng cung AmB qua đường thẳng AB và sẽ có cung AnB. Xét tấm phẳng $ApBnA$. Nó cùng chu vi nhưng diện tích lại lớn hơn tấm cũ.

II- Nếu 1 tấm lồi ϕ, với chu vi cho trước, có diện tích lớn nhất và dây cung AB chia chu vi ra làm hai phần có độ dài bằng nhau thì AB cũng chia tấm thành hai phần coa diện tích bằng nhau.

Thật vậy, giả sử diện tích tấm ϕ bằng S và giả sử tồn tại dây AB phân tấm ϕ thành hai phần : $AmBrA$ và $ApBrA$, đồng thời các AmB và AoB bằng nhau về độ dài (mỗi cung có độ dài bằng $\frac{l}{2}$) nhưng diện tích của các phần đó không bằng nhau. Giả sử $AmBrA$ có diện tích lớn hơn (vì vậy diện tích của nó lớn hơn $\frac{S}{2}$). Ta thực hiện phép đối xứng $AmBrA$ qua đường thẳng AB ta thu được đường thẳng $AmBnA$ cũng có chu vi l, nhưng lại có diện tích lớn hơn S. Do đó tấm ϕ không phải là tấm có diện tích lớn nhất, với chu vi l cho trước (tấm $AmBnA$ có diện tích lớn hơn). Suy ra ta có điều mâu thuẫn.

III- Nếu tấm lồi ϕ, với chu vi lồi đã cho, có diện tích lớn nhất (S) thì đường chu vi của nó là đường tròn.

Thật vậy, ta hãy dựng một dây AB chia chu vi của hình ϕ thành hai cung có độ dài bằng nhau. Khi đó. mỗi phần mà dây AB chia tấm ϕ có diện tích $\frac{S}{2}$. Nếu đường chu vi không là đường tròn htì ta sẽ tìm được trrên chu vi một điểm $\widehat{APB} \neq \frac{\pi}{2}$. Cung APB sẽ gồm hai phần AmP và PnB.

Ta hãy dựng tấm ϕ' như sau:

1) Trước hết dựng $\Delta A'P'B'$ sao cho $\widehat{A'P'B'} = \frac{\pi}{2}, P'A' = PA, P'B' = PB$ (dựng tam giác vuông theo hai cạnh góc vuông)

2) Đắp thêm ở phía ngoài $\Delta A'P'B'$ các hình $A'm'P'A'$ và $P'n'B'P'$ tương ứng bằng các hình $AmPA$ và $PnBP$.

3) Thực hiện phép đối xứng $\Delta A'P'B'$ cùng với các hình dựng trên các cạnh góc vuông của nó qua đường thẳng $A'B'$ và khi đó, ta tạo được thành tấm ϕ', ta hãy so sánh diện tích hai tam giác $A'P'B'$ và APB:

$S_{A'P'B'} = \frac{1}{2} A'P' \cdot P'B' > \frac{1}{2} AP \cdot PB \sin \widehat{APB} = S_{APB}$

tức là $S_{A'P'B'} > S_{APB}$

Nhưng khi đó rõ ràng diện tích của hình ϕ' lớn hơn diện tích hình ϕ. Như vậy nếu ϕ không phải là hình tròn thì tồn tại tấm ϕ' có cùng chu vi nhưng có diện tích lớn hơn.

IV – Từ các mệnh đề I, II, III suy ra rằng: tấm ϕ, với chu vi 1 cho trước, có diện tích lớn nhất phải là hình tròn.

(Đây là chứng minh của Staine)

Ta có bài toán Crame về đa giác có khớp.

Khi xét một lớp K gồm toàn bộ các đa giác đơn (?) có độ dài và thứ tự các cạnh cho trước, hãy chỉ ra trong chúng có diện tích lớn nhất.

Có thể hình một cách trực quan hình ảnh sau: cần phải truyền cho một đa giác có khớp, cấu tạo bởi những thanh cứng, một hình dạng sao cho nó choán một diện tích lớn nhất.

Kết quả của bài toán trên là, trong các đa giác được xét, đa giác có diện tích lớn nhất là đa giác có thể ngoại tiếp được một đường tròn.

Ngoài ra ta còn có một số mệnh đề nhỏ sau đây:

Mệnh đề 1:

Trong tất cả các hình bình hành có chu vi cho trước thì hình vuông là hình có diện tích lớn nhất.

Mệnh đề 2:

Trong tất cả các hình bình hành có chu vi và chiều dài của một đường chéo cho trước thì hình thoi là hình có diện tích lớn nhất.

Mệnh đề 2 tương đương với mệnh đề sau

Mệnh đề 2’:

trong tất cả các tam giác có chu vi và chiều dài của một cạnh cho trước thì tam giác cân là hình có diện tích lớn nhất.

Mệnh đề 3:

Trong tất cả các tam giác có chu vi cho trước thì tam giác đều là hình có diện tích lớn nhất.

Các mệnh đề 1-3 trên là lời giải của bài toán: Trong số những hình có hình dạng xác định và chu vi cho trước hãy tìm hình có diện tích lớn nhất. Mệnh đề 1 và 3là những trường hợp đặc biệt của mệnh đề tổng quát hơn: *Trong tất cả những hình N cạnh có chu vi cho trước thì hình N cạnh đều là hình có diện tích lớn nhất.*

Những bài toán tương tự với bài toán đẳng chu cũng có thể đặt ra trng không gian. Đây là một trong những bài toán quan trọng nhất:

Trong tất cả các thể có diện tích bề mặt cho trước, hãy chọn ra một hình có thể tích lớn nhất.

Ta có thể tiên đoán đáp án là hình cầu

Bây giờ ta không giải quyết bài toán lơnd trên mà đi giải quyết bài toán trong không gian được khái quát lên tứ bài toán 1-3, trong đó hình bình nành được thay bằng hình hộp, tam giác được thay bằng tứ diện

Bài toán 1:

Trong tất cả những hình hộp có tổng chiều dài của các cạnh cho trước, hãy tìm hình hộp có thể tích lớn nhất.

Bài toán 2:

Trong tất cả những hình hộp có tổng chiều dài của các cạnh và chiều dài của một đường chéo cho trước, hãy tìm hình hộp có thể tích lớn nhất.

Ta thống nhất một số định nghĩa.

Tứ giác ghềnh: Một đường gấp khúc kín gồm 4 cạnh mà những đỉnh không nằm trong cùng một mặt phẳng được gọi là một *tứ giác ghềnh*. Nếu những đỉnh của một tứ diện trùng với những đỉnh của một *tứ giác ghềnh* thì ta nói rằng nó trương tứ giác đó.

Ta có: thể tích của một tứ diện trương một tứ giác ghềnh mà các cạnh là một đường chéo và ba cạnh kề liên tiếp của hình hộp thì bằng $\frac{1}{6}$ thể tích hình hộp (dễ thấy).

Vì vậy, bài toán 2 tương đương với bài toán sau:

Bài toán 2’:

Trong tất cả những tứ giác ghềnh có chu vi cho trước bằng $2p$ và chiều dài một cạnh cho trước bằng h, hãy tìm tứ giác ghềnh sao cho tứ diện trương nó có thể tích lớn nhất.

Bài toán 3:

Trong tất cả các tam giác ghềnh có chu vi cho trước bằng $2p$, hãy tìm tứ sao cho hình tứ diện trương nó có thể tích lớn nhất.

Giải bài toán 1.

Giả sử hình hộp đã cho có ba kích thước a,b,c ứng với 3 ba cạnh xuất phát từ một đỉnh là *AB*, *AD*, AA'. Gọi góc giữa *AB* và *AD* là α, góc giữa AA' và (*ABD*) là β.

Ta có thể tích của hình hộp

$$V = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha \cdot AA' \cdot \sin\beta = abc\sin\alpha \cdot \sin\beta \le abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \le \left(\frac{p}{6}\right)^3$$

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b=c \\ \alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ hay hình hộp phải tìm là hình lập phương.

Từ đó ta có định lý:

Định lý 1:

Trong tất cả những hình có tổng các cạnh cho trước thì hình lập phương là hình có thể tích lớn nhất.

Giải bài toán 2':

Để giải bài toán này, ta sẽ dùng bổ đề sau.

Gọi *P* là mặt phẳng vuông góc với cạnh *AB* của một tứ giác ghềnh *ABCD*.

Chiếu vuông góc *ABCD* lên mặt phẳng *P*, ta được Δ*BEF*.

Bổ đề

Thể tích V của một tứ diện trương tứ giác ABCD được tính công thức

$$V = \frac{1}{3}hS \qquad (1)$$

Trong đó h là chiều dài AB, S là diện tích ΔBEF

Chứng minh:

Ta có $\begin{cases} S_{ABC} = S_{ABE} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BE \\ d\left(D,\left(ABEC\right)\right) = d\left(F,\left(ABEC\right)\right) \end{cases}$

vì $DF\,//\left(ABEC\right)$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = V_{ABEF} = \frac{1}{3}hS$$

Công thức (1) gợi ý cho ta cách giải bài toán 2': Cần xác định độ dài và và vị trí các cạnh *BC*, *CD* và *AD* sao cho diện tích Δ*BEF* là lớn nhất.

Để đạt được điều đó, trước nhất cần làm sao cho chu vi của nó có giá trị lớn nhất. Ta trải các mặt *ABFD*, *FDCE* và *CEB* lên một mặt phẳng. Trên hình phẳng mà ta thu được, chiều dài cạnh B_1B_2 bằng chu vi của tam giác *BEF*, từ đó ta thấy rằng chu vi đó sẽ lớn nhất khi *A*, *D*, *C* và B_2 thẳng hàng trên mặt phẳng đã được trãi phẳng, hay khi các đoạn *AD*, *DC* và *CB* chỉ tạo với cạnh *AB* một góc $\alpha = \arccos\dfrac{h}{2p-h}$ mà thôi (2). Do đó tứ giác ghềnh có cạnh $AB = h$ và chu vi 2*p* sao cho ΔBEF có chu vi lớn nhất có thể dựng theo cách sau đây:

Gấp một hình chữ nhật có cạnh $AB_1 = h$ và đường chéo $AB_2 = 2p-h$ thành mặt xung quanh của một lăng trụ đáy tam giác sao cho điểm B_1 đến trung với điểm B_2 và đoạn AB_1 là một cạnh bên của nó. Khi đó, đường B_1ADCB_2 trở thành tứ giác ghềnh mà ta muốn có.

Bằng cách đó, bài toán của chúng ta đã được đưa về bài toán đẳng chu đối với ΔBEF.

Như chúng ta đã biết, với một chu vi cho trước, tam giac này có diện tích lớn nhất khi $BF = FE = EB$, do đó tứ giác ghềnh *ABCD* đáp ứng yêu cầu của bài toán 2’, phải có các cạnh *AD*, *DC* và *CB* bằng nhau. Với điều kiện này và điều kiện (2), tứ giác ghềnh *ABCD* sẽ được xác định một cách duy nhất.

Và như vậy là ta đã chứng minh xong và ta có định lí:

<u>Định lí:</u>

Trong tất cả những tứ diện trương tứ giác ghềnh ABCD có chu vi cho trước bằng 2p và chiều dài của cạnh AB cho trước bằng h thì tứ diện có thể tích lớn nhất là tứ diện trương tứ giác mà các cạnh AD, DC và CB bằng nhau và làm thành với cạnh AB những góc bằng nhau.

Ta có được cách dựng trương tứ diện lớn nhất: ta lấy một hình chữ nhật có một cạnh bằng h và đường chéo bằng $2p-h$ và gấp nó thành xung quanh của một hình lăng trụ đều.

Ta để ý rằng với kích thước của ba cạnh tứ giác ghềnh tương ứng với ba kích thước của hình hộp bằng nhau khi và chỉ khi hình hộp đó có các mặt bằng nhau và bằng hình thoi. Nên đáp án của bài 2 là hình hộp có các mặt là hình thoi.

<u>Giải bài toán 3:</u>

Ta hãy tính thể tích cực đại nói tới trong định lí 2.

Từ hình 5, ta thấy chu vi của ΔBEF bằng $\sqrt{\left(2p-h^2\right)-h^2} = 2\sqrt{p\left(p-h\right)}$

nghĩa là diện tích cực đại của nó bằng $\left[\dfrac{2\sqrt{p\left(p-h\right)}}{3}\right]^2 . \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{p\left(p-h\right)}{3\sqrt{3}}$

cuối cùng, thể tích lớn nhất của hình tứ diện được trương, theo công thức (1) bằng:

$$V = \frac{1}{3}h\cdot\frac{p\left(p-h\right)}{3\sqrt{3}} = \frac{ph\left(p-h\right)}{9\sqrt{3}} \qquad (3)$$

Để giải bài toán này, cần lấy giá trị h trong bài toán trên sao cho vế phải của công thức (3) có giá trị lớn nhất. Giá trị h đó được xác định từ bất đẳng thức AM-GM:

$$h\left(p-h\right) \le \left[\frac{h+\left(p-h\right)}{2}\right]^2 = \frac{p^2}{4}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $h=\dfrac{p}{2}$.

Từ đó ta suy ra lời giải của bài toán 3:

Định lí 3:

Trong tất cả những tứ diện trương các tứ giác ghềnh có chu vi cho trước thì tứ diện có thể tích lớn nhất là tứ diện trương tứ giác trong đó các cạnh bằng nhau và góc giữa mọi cặp cạnh cũng bằng nhau.

Thật vậy, nếu $h=\dfrac{p}{2}$ thì chiều dài của mỗi cạnh còn lại sẽ bằng $\dfrac{p}{2}$; có thể chứng minh sự bằng nhau của các góc bằng cách trực tiếp (vì $h=\dfrac{p}{2}$ nên tất cả các góc đều bằng $\arccos\dfrac{1}{3}$); tuy nhiên một cách đơn giản hơn, có thể chú ý rằng trong tứ diện mà ta đang xét tất cả các cạnh có vai trò như nhau.

POLYTOPE 4 CHIỀU

1. Polytope là cái gì?

Polytope là tên gọi tổng quát của tất cả các đa diện lồi trong không gian n chiều, $n \geq -1$. Ví dụ trong không gian 2 chiều thì các Polytope chính là các đa giác, trong không gian 3 chiều thì là các đa diện 3 chiều. Ngày nay khái niệm Polytope được hiểu luôn thành convex polytope tức là các đa diện lồi. Trong tòan bộ chủ đề này tớ cũng chỉ nói đến các đa diện lồi. Định nghĩa cụ thể của một Polytope bất kỳ như sau:

a) Một Polytope P thuộc R^n là một bao lồi của một số hữu hạn các điểm trong không gian R^n. Tức là $P = conv(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i, a_i \geq 0, \forall i, n \geq 1 \right\}$ với $S \subset R^{nd}$. Cách định nghĩa này gọi là V-description, Polytope được định nghĩa theo kiểu này được gọi là V-Polytope.

Cách dưới đây là một cách định nghĩa khác cho P, gọi là H-description:

b) $P = P(A, z) = \{ x \subset R^n \mid Ax \leq z \}$ với $A \subset R^{nm}$

Giải nghĩa cho dễ hiểu thì thế này cách định nghĩa V-polytope nói rằng: một bao lồi 2 chiều của một tập hợp S là một hình đa giác, trong đó 1 số điểm của S là các đỉnh, số còn lại nằm bên trong đa giác tạo bởi các đỉnh kia. Các đỉnh này chính là các phần tử của bao lồi của S, viết là conv(S).

Còn cách định nghĩa H-Polytope nói rằng: một polytope 2 chiều là phần giao của ít nhất 3 nửa mặt phẳng sao cho hình được tạo ra là một đa giác. Ví dụ hình vuông đơn vị có trung điểm là tâm gốc tọa độ (0,0) là phần giao của 4 nửa mặt phẳng $-1 \leq x, y \leq 1$.

2. Thế nào là một mặt (face) của một Polytope:

Định nghĩa tổng quát của Polytope dẫn đến một vấn đề đơn giản: với đa diện 3 chiều chúng ta gọi các thành phần của nó là : đỉnh, cạnh, mặt. Vậy với đa diện 4 chiều chúng ta gọi các thành phần của nó là đỉnh, cạnh, mặt, nhưng các thành phần 3 chiều của nó gọi là gì? Người ta gọi nó là các mặt 3 chiều, và tổng hợp lại cách gọi các thành phần của một đa diện n chiều như sau:

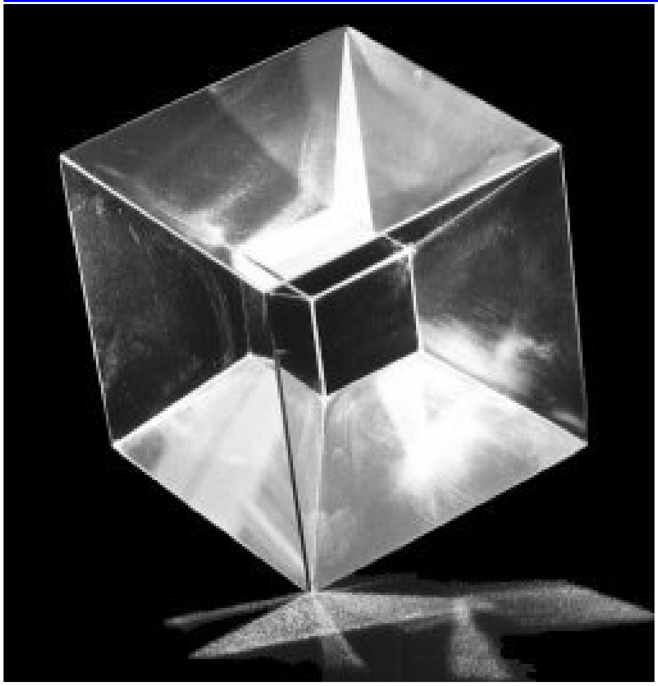
Các đỉnh thì gọi là mặt 0 chiều- hay 0-faces, các cạnh là mặt 1 chiều- tức là 1-faces..., cho tới (n-1)-faces. Để ký hiệu nó cho gọn, người ta gọi chúng lần lượt là các $f0, f1, f2, ..., fn-1$ (hay còn gọi là các f- vectors của một Polytope n chiều).

3. Hệ thức Euler cho đa diện 3 chiều: $D - C + M = 2$

Trong đó D là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt của đa diện 3 chiều. Hoặc nếu biểu diễn theo cách gọi tổng quát, chúng ta có : $f0 - f1 + f2 = 2$

Chúng ta ai cũng biết công thức Euler cho các đa diện 3 chiều ở trên. Leonhard Euler tìm ra công thức này vào năm 1750, nhưng chứng minh của ông ấy bị khiếm khuyết. Mãi cho đến năm 1794- Legendre mới đưa ra được một chứng minh hòan chỉnh đầu tiên. Sau đó, nếu tớ không nhầm, thì Cauchy là người đưa ra chứng minh được dùng phổ biến hiện nay- dùng Duality. Cho tới hiện nay, tớ được biết có khỏang gần 20 chứng minh cho công thức này. Trong đó, chứng minh gây chóang nhất có lẽ là của William Thurston (The Guru of Geometry). Các bạn muốn tìm hiểu kỹ có thể vào đây để nghiên cứu các cách chứng minh (http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/).

4. Hệ thức Euler-Poincare cho đa diện n chiều: là các mặt *i*-faces



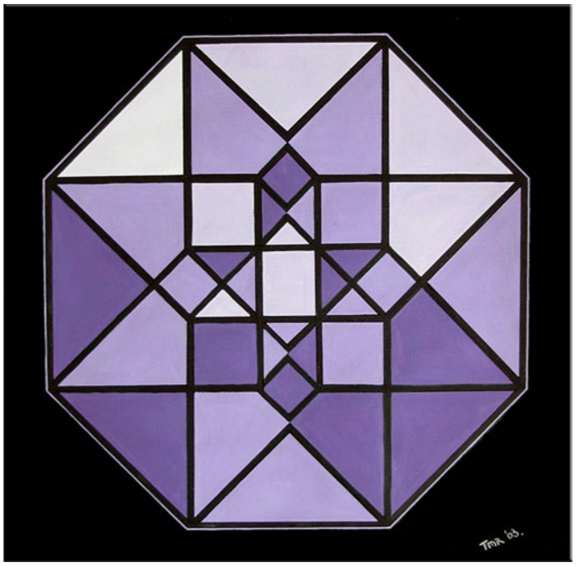
Ví dụ:
- cho một đa diện bất kỳ trong không gian 4 chiều, chúng ta có hệ thức:
(hình lập phương 4 chiều chiếu xuống không gian 3 chiều sử dụng kỹ thuật biểu đồ Schlegel)
- cho một đa diện bất kỳ trong không gian 199.999.999 (đa diện một trăm chín chín triệu chín trăm chín mươi chín ngàn chín trăm chín mươi chín chiều) chiều chúng ta có:

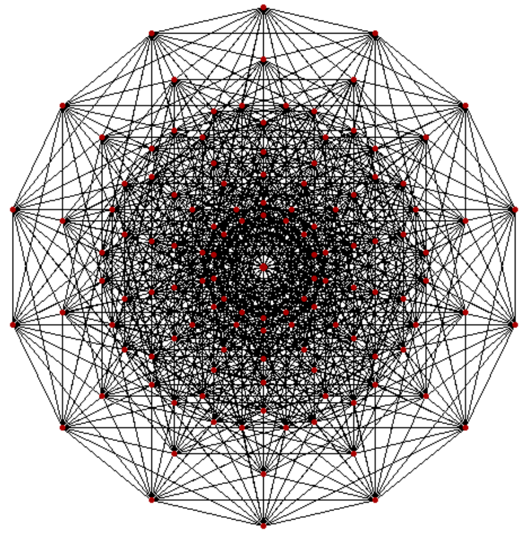
$$f0 - f1 + f2 - f3.. +/- .... + f199999998 = (zero\ oops\ two\ oops\ zero..\ oops\ oops\ ..oops) = 2$$

Tức là tóm lại- kết quả của hiệu số tổng "sạch mặt chẵn" trừ đi tổng của "sạch mặt lẻ" của một polytope luôn bằng 0 hoặc 2. Nếu polytope có số chiều lẻ, thì hiệu số trên bằng 0, nếu polytope có số chiều chẵn, thì hiệu số trên là 2.

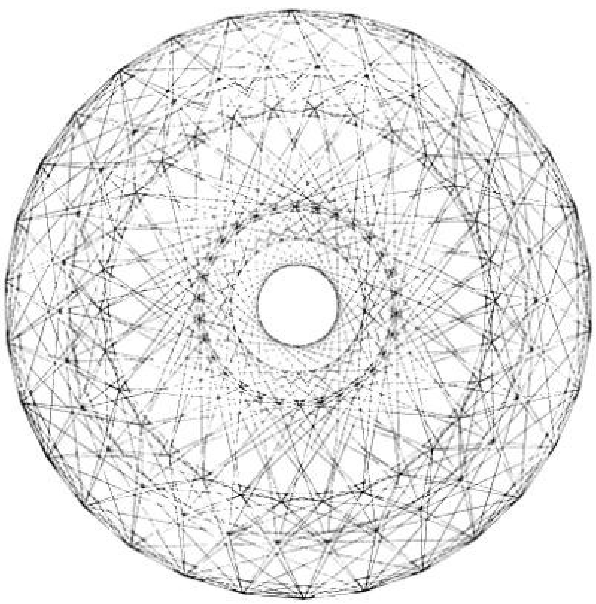
5. Thế lý thuyết đa diện nhiều chiều được việc gì?

Việc nghiên cứu các bài toán linear optimization - ngành tóan ứng dụng đặc biệt quan trọng trong kinh tế và kỹ thuật (người ta cho rằng đây là ngành tóan phát triển mạnh mẽ và quan trọng nhất trong thế kỷ 20)- đã dẫn đến việc người ta quan tâm đến Simplex algorithm của George Dantzig cũng như các polytopes. Vì các hệ bất phương trình của LP chẳng qua là các polytopes, hay nói ngược lại, các polytopes có thể biểu diễn bằng các bất phương trình này. Bài tóan traveling salesman với số lượng thành phố là 10 chẳng hạn- tương ứng với một polytopes của không gian 5 chiều, và vì thế, người ta có thể nghiên cứu các polytopes 5 chiều để tìm ra giải pháp tối ưu hơn cho vấn đề Traveling Salesman và nhiều bài toán khác.
Về mặt "không" ứng dụng thực tiễn - thì hình học, nhất là các dạng đa diện luôn có một vẻ đẹp nhất định nào đó- mặc dù nhìn nó có vẻ "khô cứng, thô sơ, lạnh lùng, vô cảm và đơn điệu" v.v.v . Ngày xưa Platon cũng là người mê toán học, cụ thể là hình học. Trước cửa phòng ông ấy có câu thế này: "Ai không biết hình học, đừng bước vào!" Nhưng thời của Platon, người ta mới chỉ biết các đa diện 3 chiều là cùng, chứ không có cách nào nhìn thấy, hay tưởng tượng được gì nhiều về các đa diện nhiều chiều hơn. Ngày nay, có một số kỹ thuật cho phép chúng ta nhìn các hình nhiều hơn 3 chiều trong nền không gian 3 chiều- có thể gọi là pseudo-high-dimensition cũng được. Chúng ta đã có thể "nhìn" được những hình 4 chiều- những thứ chỉ tồn tại trong hình học, trong tưởng tượng mà không tồn tại trong thế giới thực, và cả những polytopes mà thực ra không tồn tại cả trong hình học và cũng không thể tưởng tượng chúng là các đa diện được!! Ví dụ như các Correlation Polytopes.





(hình lập phương 4 chiều chiếu xuống 2 chiều sử dụng kỹ thuật biểu đồ Schlegel)
(Hình lập phương 7 chiều chiếu xuống không gian 2 chiều sử dụng biểu đồ Schlegel)



Thật ra mà nói thì một phần lớn lý thuyết đa diện nhìn chung có thể qui về đại số tuyến tính và tóan tổ hợp cho nên nó khá elementary, chứ không phức tạp như các ngành hình học đại số, topo đại số- những ngành mà lý thuyết đã rất phát triển và được xây dựng chồng chéo lên nhau suốt trăm năm nay bởi rất nhiều người.
Có lẽ có một nguyên nhân quan trọng làm cho nó không được phát triển mạnh trong khoảng giữa thế kỷ 19- giữa thế kỷ 20 là vì vào thời điểm Felix Klein đưa ra "Erlangen Programm", thì các bài tóan liên quan đến các tính chất tổ hợp của các đa diện lồi nhiều hơn 3 chiều được gọi là "hopeless hard", chỉ có các tính chất đại số là nghiên cứu được- nhưng lúc đó nó đã nhập vào analytic geometry và linear algebra. Cùng với trào lưu mới là hình học vi phân - một thứ mới toanh, có nhiều việc để làm, các lý thuyết đa diện đi vào quên lãng, không còn thuộc vào mainline của tóan học như nó vốn đã là mainline của tóan học suốt gần mấy ngàn năm (từ Platon, Pytagore cho tới Kopernicus).
Đến đầu thế kỷ 20, thực chất đã có những công trình đột phá về lý thuyết đa diện, ví dụ như Steinitz, Schlegel, Poincare v.v. Steinitz tổng hợp, phân lớp tất cả các đa diện 3 chiều, Schlegel đưa ra kỹ thuật chiếu các hình nhiều hơn 3 chiều về không gian 3 chiều, Poincare tổng hợp hệ thức Euler cho không gian n chiều. Nhưng lúc đó có ít người đi theo hướng này,