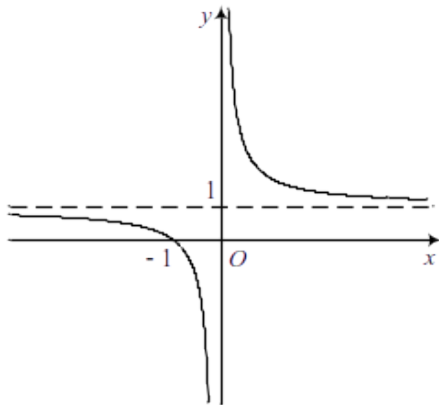


PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận ngang $y = 1$.
- b) Hàm số có hai cực trị.
- c) Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
- d) Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến như sau:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
y'		+		+		+	
y		0	$+\infty$		$+\infty$		0

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -3$ là tiệm cận đứng.
- c) Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 4.
- d) Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; +\infty)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = -\infty$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -3$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 3^+} y = -\infty$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$.
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số
- b) Đường thẳng $y = \sqrt{2}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số
- c) Đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận ngang, 2 tiệm cận đứng
- d) Đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

Điều kiện: $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}} = 1$ $\Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{\sqrt{(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = 0$ nên đường thẳng $x = -1$ không là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = \sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{5\sqrt{x^2 + 6} + x - 12}{4x^3 - 3x - 1}$ có đồ thị (C).
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị (C) của hàm số không có tiệm cận.

b) Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$.

- c) Đồ thị (C) của hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$ và hai tiệm cận đứng $x=1; x=-\frac{1}{2}$.
- d) Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y=0$ và một tiệm cận đứng $x=1$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ 1; -\frac{1}{2} \right\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ p Đồ thị hàm số có một TCD là $x=1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ p Đồ thị hàm số có một TCN là $y=0$

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$.
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số có hai tiệm cận.
- b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2; -6)$.
- c) Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.
- d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0; -4)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Ta có $y = x - 4 + \frac{10}{x + 2}$.

$\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x + 2} = 0$ nên $y = x - 4$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Giao điểm của hai tiệm cận thỏa mãn $\begin{cases} x = -2 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -6 \end{cases}$.

Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác $-4 = 0 - 4$ nên M nằm trên tiệm cận xiên.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^3-1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?
a) $m=0$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

- b) $m=1$ đồ thị hàm số không có tiệm ngang
 c) $m=1$ đồ thị hàm số không có tiệm đứng
 d) $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

* $m=0 \Rightarrow y=-x+1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

* $m=1 \Rightarrow y=\frac{x-1}{x^3-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \frac{1}{3} \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

* $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{m}} \right\}$

Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đường thẳng $x=\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 7. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{mx^2+(3-m)x+m^2-2}{x-1}$, m là tham số. Khi (C) có tiệm cận xiên, gọi đường tiệm cận xiên này là (d). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Khi $m=2$ thì (d) có phương trình là $y=2x+3$
 b) Khi $m=1$ thì (d) đi qua điểm $A(1;4)$.
 c) Có 1 đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.
 d) Khi $m=\pm\sqrt{3}$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Ta có $y=mx+3+\frac{m^2+1}{x-1}$, suy ra (C) có tiệm cận xiên (d) $\Leftrightarrow m \neq 0$. Khi đó phương trình của (d): $y=mx+3$.

b) $A(1;4) \in (d) \Leftrightarrow 4=m+3 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq 0$).

c) Giao điểm của (d) với hai trục tọa độ là $M(0;3)$ và $M(-\frac{3}{m};0)$.

Diện tích tam giác vuông OMN : $S = \frac{1}{2} OM \cdot ON = \frac{1}{2} 3 \cdot \left| \frac{3}{m} \right| = \frac{9}{2|m|}$.

Theo giả thiết: $S = 6 \Leftrightarrow \frac{9}{2|m|} = 6 \Leftrightarrow |m| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq 0$).

d) $d(O; (d)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{2}$

Câu 8.

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1} (C_m)$ (m là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Để đồ thị (C_m) của hàm số có tiệm cận xiên thì $m \neq 0$.

b) Để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua $M(2, -5)$ thì $m = -8$

c) Để tiệm cận xiên của (C_m) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8 (đvdt) thì tổng tất cả các giá trị m tìm được bằng 2

d) Với $m = 3$ thì giao điểm của hai đường tiệm cận của (C_m) nằm trên Parabol $y = x^2 + 3$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

a) Ta có $y = x + m + 1 + \frac{m}{x - 1}$

Để đồ thị (C_m) của hàm số có tiệm cận xiên thì $m \neq 0$.

- Với $m \neq 0, (C_m)$ có tiệm cận xiên

$y = x + m + 1 (\Delta_m)$ vì $\lim_{x \rightarrow \infty} [y - (x + m + 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m}{x - 1} = 0$.

b) Để (Δ_m) qua $M(2, -5)$ thì $-5 = 2 + m + 1 \Leftrightarrow m = -8$. (thỏa mãn $m \neq 0$).

c) Gọi A là giao điểm của Δ_m với Ox . Khi đó $A(-m - 1; 0)$

Gọi B là giao điểm của Δ_m với Oy . Khi đó $B(0; m + 1)$.

Suy ra $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |-m - 1| |m + 1| = \frac{1}{2} (m + 1)^2$

Để $S_{\Delta OAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (m + 1)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn $m \neq 0$).

d) Ta có với $m \neq 0, x = 1$ là tiệm cận đứng vì $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$ nên $y = x + m + 1$ là tiệm cận xiên.

Khi đó giao điểm của 2 tiệm cận là $I(1, m+2)$.

Để I nằm trên Parabol $y = x^2 + 3$ thì $m+2 = 1+3 \Leftrightarrow m=2$ (t/m $m \neq 0$).

Câu 9. Cho đường cong $(C): y = \frac{x+3}{x-1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$

c) Tâm đối xứng của (C) : $I(1;1)$

d) Biết điểm M thuộc (C) và tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có chu vi nhỏ nhất. Giả sử chu vi nhỏ nhất đó bằng $a+b\sqrt{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$) thì giá trị của $a+b+c$ bằng 15

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

Tiệm cận đứng $x=1$

Tiệm cận ngang $y=1$

$$f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến tại M của (C)

$$(d): y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+3}{x_0-1}$$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng: $A\left(1; \frac{x_0+7}{x_0-1}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang: $B(2x_0-1; 1)$

Tâm đối xứng của (C) : $I(1;1)$

$$\text{Khi đó } IA = \frac{8}{|x_0-1|}; IB = 2|x_0-1| \Rightarrow IA \cdot IB = 16$$

$$\text{Ta có: } P_{IAB} = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2}$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy*, ta có

$$IA + IB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} = 2\sqrt{16} = 8$$

$$IA^2 + IB^2 \geq 2\sqrt{IA^2 \cdot IB^2} = 2\sqrt{16^2} = 32 \Rightarrow AB = \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 4\sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } P_{IAB} \geq 8 + 4\sqrt{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } IA = IB \Leftrightarrow \frac{8}{|x_0-1|} = 2|x_0-1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Vậy $a=8, b=4, c=2 \Rightarrow a+b+c=14$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}, (C_m)$ với $m \in \mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận $m \neq \frac{1}{3}$.

b) Khi $m=1$ thì tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y=x-2$

c) Biết đồ thị (C_m) có 2 đường tiệm cận, khi đó $m=\pm 2$ thì góc giữa hai tiệm cận của đồ thị (C_m) bằng 45°

d) Biết đồ thị (C_m) có tiệm cận xiên tạo cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác ΔAOB có diện tích bằng 4 khi đó tổng tất cả các giá trị của m bằng 4

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Ta có: $y = mx - 2 + \frac{6m-2}{x+3m}$

a) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận $\Leftrightarrow 6m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Phương trình hai đường tiệm cận là: $\Delta_1: x = -3m \Leftrightarrow x+3m=0$

b) Và $\Delta_2: y = mx - 2 \Leftrightarrow mx - y - 2 = 0$.

Véc tơ pháp tuyến của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là: $\vec{n}_1 = (1; 0), \vec{n}_2 = (m; -1)$

c) Góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 45° khi và chỉ khi $\cos 45^\circ = \cos \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

$$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m = \pm 1$ là những giá trị cần tìm.

d) Hàm số có tiệm cận xiên $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó: $A(0; -2), B\left(\frac{2}{m}; 0\right)$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |-2| \cdot \left|\frac{2}{m}\right| = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = \pm 2$ là những giá trị cần tìm.

- Câu 11.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - m}}$, m là tham số. Các mệnh đề sau đúng hay sai?
- a) Với $m < 0$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$.
- b) Với $m = 0$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$ và có một tiệm cận đứng $x = 0$.
- c) Với $m = 1$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$ và có một tiệm cận đứng $x = 1$.
- d) Với $0 < m \neq 1$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$ và có hai tiệm cận đứng $x = \pm \sqrt{m}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

* Tiệm cận ngang: Với mọi m

Ta có
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - m}} = 1$$

Vậy $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - m}} = -1$$

Vậy $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

* Tiệm cận đứng:

+ Nếu $m < 0$.

Khi đó miền xác định của hàm số $\mathbb{R}$. Vậy đồ thị không có tiệm cận đứng.

+ Nếu $m = 0$. Khi đó hàm số trở thành $y = \frac{x+2}{|x|}$ và xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$. Vậy $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Nếu $m > 0$ ta xét các trường hợp:

- Nếu $x^2 - m = 0$ có nghiệm $x = -2$ tức là $m = 4$.

Khi đó, hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ xác định trên $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Ta có
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{-x-2}}{\sqrt{2-x}} = 0$$

Vậy $x = -2$ không là tiệm cận của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty$$

Vậy $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Nếu $x^2 - m = 0$ không có nghiệm $x = -2$, tức là $m \neq 4$

Khi đó, hàm số xác định trên $(-\infty; -\sqrt{m}) \cup (\sqrt{m}; +\infty)$

Ta có:
$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{m}^-} y = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{m}^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-m}} = \infty$$

Vậy $x = -\sqrt{m}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{m}^+} y = \lim_{x \rightarrow \sqrt{m}^+} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-m}} = \infty$$

Vậy $x = \sqrt{m}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Như vậy:

- Với $m < 0$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$.

- Với $m = 0$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$ và có một tiệm cận đứng $x = 0$.

- Với $m = 1$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$ và có một tiệm cận đứng $x = 1$.

- Với $0 < m \neq 1$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$ và có hai tiệm cận đứng $x = \pm \sqrt{m}$

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$, m là tham số. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang

b) Khi $m < 16$ thì đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

c) Khi $m = 16$ thì đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng

d) Có 14 giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

Ta có
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = 0$$
 nên hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình

$$x^2 - 8x + m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16 - m > 0 \\ m - 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m \neq 7 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m \in \{1; 2; 3; \dots; 6; 8; \dots; 15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 13. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{4x+1}{3-x}$.

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định của nó

b) $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

c) Tích các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của nó bằng 14

d) Có 2 điểm thuộc (C) sao cho tổng các khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

c) $M \in (C) \Rightarrow M \left(x_0; \frac{4x_0 + 1}{3 - x_0} \right)$.

TCD của (C) : $x - 3 = 0 \Rightarrow d(M, TCD) = |x_0 - 3|$.

TCN của (C) : $y + 4 = 0 \Rightarrow d(M, TCN) = \left| \frac{4x_0 + 1}{3 - x_0} + 4 \right| = \left| \frac{13}{3 - x_0} \right|$.

$\Rightarrow d(M, TCD) \cdot d(M, TCN) = |x_0 - 3| \cdot \left| \frac{13}{x_0 - 3} \right| = 13$ (đpcm).

d) $T = d(M, TCD) + d(M, TCN) = |x_0 - 3| + \left| \frac{13}{x_0 - 3} \right| \stackrel{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{|x_0 - 3| \cdot \left| \frac{13}{x_0 - 3} \right|} = 2\sqrt{13}$.

$T = 2\sqrt{13} \Leftrightarrow |x_0 - 3| = \left| \frac{13}{x_0 - 3} \right| \Leftrightarrow (x_0 - 3)^2 = 13 \Leftrightarrow x_0 - 3 = \pm\sqrt{13} \Leftrightarrow x_0 = 3 \pm \sqrt{13}$.

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{13}$ khi và chỉ khi $M(3 + \sqrt{13}; -\sqrt{13} - 4)$ hoặc $M(3 - \sqrt{13}; \sqrt{13} - 4)$.

Câu 14. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 + (2m+1)x + 2}{x+1}$.

a) $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

b) Với $m = 1$ thì tích các khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến hai đường tiệm cận của nó bằng 2.

c) Giả sử đồ thị (C) có 2 đường tiệm cận, thì khi đó giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) luôn thuộc parabol (P) : $y = -x^2$.

d) Khi (C) có tiệm cận xiên, thì có 4 giá trị m để tiệm cận xiên tiếp xúc với đường tròn $(\mathcal{J})$: $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

$$\text{a) } y = \frac{(m+1)x^2 + (2m+1)x + 2}{x+1} = (m+1)x + m + \frac{2}{x+1}, \text{ suy ra (C) có hai đường tiệm cận } x = -1 \text{ (d}_1\text{), } y = (m+1)x + m \text{ (d}_2\text{)}.$$

$$\text{b) } M \in (C) \Rightarrow M(x_0; (m+1)x_0 + m + \frac{2}{x_0+1}).$$

$$\Rightarrow d(M, (d_1)) \cdot d(M, (d_2)) = |x_0 + 1| \left| (m+1)x_0 + m - (m+1)x_0 - m - \frac{2}{x_0+1} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{(m+1)^2 + 1}}$$

$$d(M, (d_1)) \cdot d(M, (d_2)) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{(m+1)^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow (m+1)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

c) Giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(-1; -1)$. Vì tọa độ I thỏa mãn phương trình (P) nên $I \in (P)$.

d) (C) có tiệm cận xiên $\Leftrightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Đường tròn $(\mathcal{Y})$ có tâm là gốc tọa độ O, bán kính $R = \frac{1}{2}$, suy ra

$$(\mathcal{Y}) \Leftrightarrow d(O; TCX) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{(m+1)^2 + 1}} = \frac{1}{2}$$

Tiệm cận xiên tiếp xúc đường tròn

$$\Leftrightarrow 4m^2 = (m+1)^2 + 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện } m \neq -1\text{)}.$$

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Chỉ có 2 điểm nằm trên (C) cách đều hai trục tọa độ

b) Chỉ có 2 điểm M nằm trên (C), sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

c) Tìm được hai điểm A, B nằm về hai nhánh của (C) sao cho AB nhỏ nhất, khi đó tổng hoành độ của hai điểm A, B bằng 4

d) Có 4 điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 1 = 0$ bằng $\frac{12}{5}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$

$$M \text{ cách đều hai trục tọa độ} \Leftrightarrow |x_0| = |y_0| = \left| \frac{3x_0 - 1}{x_0 - 2} \right|$$

$$\bullet \frac{3x_0 - 1}{x_0 - 2} = x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 5x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\bullet \frac{3x_0 - 1}{x_0 - 2} = -x_0 \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$M_{1,2} \left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}; \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \right), M_{3,4} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \right)$$

Vậy có bốn điểm cần tìm:

b) Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là:

$$d = |x_0| + |y_0| = |x_0| + \left| \frac{3x_0 - 1}{x_0 - 2} \right|$$

$$\text{Với } x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow d = \frac{1}{3} \text{ nên với } |x_0| > \frac{1}{3} \Rightarrow d > \frac{1}{3}$$

$$\text{Ta xét } |x_0| < \frac{1}{3} \Rightarrow d = \left| x_0 + \frac{3x_0 - 1}{x_0 - 2} \right| = \left| \frac{x_0^2 + x_0 - 1}{x_0 - 2} \right|$$

$$\text{Mà } \frac{x_0^2 + x_0 - 1}{x_0 - 2} - \frac{1}{3} = \frac{3x_0^2 + 2x_0 - 1}{3(x_0 - 2)} = \frac{(3x_0 - 1)(x_0 + 1)}{3(x_0 - 2)} > 0 \text{ với}$$

$$\forall x_0 : |x_0| < \frac{1}{3} \text{ Suy ra } d > \frac{1}{3} \quad \forall x_0 : |x_0| > \frac{1}{3}$$

c) Ta có $A \left(2 + a; 3 + \frac{5}{a} \right), B \left(2 - b; 3 - \frac{5}{b} \right)$ (với $a, b > 0$) là hai điểm nằm về hai nhánh của (C).

$$AB^2 = (a + b)^2 + \left(\frac{5}{a} + \frac{5}{b} \right)^2 = (a + b)^2 \left(1 + \frac{25}{a^2 b^2} \right) \geq 4ab \cdot 2 \cdot \frac{5}{ab} = 40$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} a = b \\ 1 = \frac{25}{a^2 b^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{5}$$

$$\text{d) Ta có } M \left(m; \frac{3m - 1}{m - 2} \right) \in (C) \quad d(M, \Delta) = \frac{\left| 3m - 4 \frac{3m - 1}{m - 2} + 1 \right|}{5} = \frac{1}{5} \left| \frac{3m^2 - 17m + 2}{m - 2} \right|$$

$$\text{Suy ra } d(M, \Delta) = \frac{12}{5} \Leftrightarrow |3m^2 - 17m + 2| = 12|m - 2|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 29m + 26 = 0 \\ 3m^2 - 5m - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1; m = \frac{26}{3} \\ m = -2; m = \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M_1(1; -2), M_2 \left(\frac{16}{3}; \frac{15}{4} \right), M_3 \left(-2; \frac{7}{4} \right), M_4 \left(\frac{11}{3}; 6 \right)$$

