**ĐỀ**

**Bài 1: (1,5 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức  với , , .

2. Tìm  để ba đường thẳng : , : và : đồng quy.

**Bài 2: (1,5 điểm)**

1. Chứng minh rằng  chia hết cho 24 với mọi số nguyên .

2. Tìm tất cả các số nguyên dương  sao cho  là tích của hai số nguyên dương chẵn liên tiếp.

**Bài 3: (2,5 điểm)**

1. Giải hệ phương trình .

2. Cho phương trình  ( là tham số). Tìm  để phương trình có hai nghiệm phân biệt ,  thỏa mãn .

3. Cho bốn số thực , , ,  thỏa mãn  và . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

**Bài 4: (3,5 điểm)**

Cho đường tròn tâm O, bán kính R và hai điểm B, C cố định trên (O), . Điểm A thay đổi trên cung lớn  của (O) sao cho . Đường thẳng qua B và vuông góc với AC tại K cắt đường tròn (O) tại P (P khác B). Kẻ PQ vuông góc với đường thẳng BC tại Q. Tia phân giác trong của góc  cắt cạnh BC tại D. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M.

a. Chứng minh  và .

b. Khi A đối xứng với C qua O, tính diện tích tứ giác AMDO theo R.

c. Tia AD cắt đường tròn (O) tại E (khác A). Lấy điểm I trên đoạn thẳng AE sao cho . Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại L (khác B). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với LE cắt đường thẳng LC tại F. Xác định vị trí điểm A để độ dài BF lớn nhất.

**Bài 5: (1,0 điểm)**

Một số nguyên dương được gọi là “số đặc biệt” nếu nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Các chữ số của nó đều khác 0.

ii) Số đó chia hết cho 12 và nếu đổi chỗ các chữ số của nó một cách tùy ý, ta vẫn thu được một số chia hết cho 12.

a. Chứng minh rằng một “số đặc biệt” chỉ có thể chứa các chữ số 4 và 8.

b. Có tất cả bao nhiêu “số đặc biệt” có 5 chữ số?

**ĐÁP ÁN**

**Bài 1: (1,5 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức  với , , .





2. Tìm  để ba đường thẳng : , : và : đồng quy.

Giao điểm của  và  là



Suy ra, để 3 đường thẳng đồng quy thì tọa độ giao điểm  và  là  hay



Vậy :

**Bài 2: (1,5 điểm)**

1. Chứng minh rằng  chia hết cho 24 với mọi số nguyên .

Ta có



Tích của 4 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3 và chia hết cho 8 nên nó chia hết cho 24.

2. Tìm tất cả các số nguyên dương  sao cho  là tích của hai số nguyên dương chẵn liên tiếp.

**Bài 3: (2,5 điểm)**

1. Giải hệ phương trình .



Khi 

Khi 

Vậy 

2. Cho phương trình  ( là tham số). Tìm  để phương trình có hai nghiệm phân biệt ,  thỏa mãn .

Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm phân biệt



Theo Viet:



Ta thấy



Trường hợp 1. 

 (Loại)

Trường hợp 2. 

 (Nhận)

3. Cho bốn số thực , , ,  thỏa mãn  và . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

Ta có,  



Dễ thấy, 



Xét 

Vì , suy ra  và 

Vậy GTLN của  khi  và 

Và GTNN của  khi  và 

**Bài 4: (3,5 điểm)**

Cho đường tròn tâm O, bán kính R và hai điểm B, C cố định trên (O), . Điểm A thay đổi trên cung lớn  của (O) sao cho . Đường thẳng qua B và vuông góc với AC tại K cắt đường tròn (O) tại P (P khác B). Kẻ PQ vuông góc với đường thẳng BC tại Q. Tia phân giác trong của góc  cắt cạnh BC tại D. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M.

a. Chứng minh  và .

b. Khi A đối xứng với C qua O, tính diện tích tứ giác AMDO theo R.

c. Tia AD cắt đường tròn (O) tại E (khác A). Lấy điểm I trên đoạn thẳng AE sao cho . Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại L (khác B). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với LE cắt đường thẳng LC tại F. Xác định vị trí điểm A để độ dài BF lớn nhất.

a. Tứ giác PKCQ nội tiếp suy ra  (chắn cung KP) và  (chắn cung AP)



Ngoài ra,  (chắn cung AB) 

 (1)

AD là phân giác   (2)

Và  (3)

 (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra .

b. Ta có  (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)





Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có



Theo định lý Pytago: 

Diện tích tam giác MAC: 

Đặt , với 

Suy ra, , ta có 





c. , suy ra  mà  cân tại L.

LE cắt BF tại G .

BF lớn nhất tneen BG lớn nhất .

Suy ra  vuông nên .

 cân suy ra , hay .

Ngoài ra, , do đó 



A thuộc cung lớn BC sao cho  thì BF lớn nhất.

**Bài 5: (1,0 điểm)**

Một số nguyên dương được gọi là “số đặc biệt” nếu nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Các chữ số của nó đều khác 0.

ii) Số đó chia hết cho 12 và nếu đổi chỗ các chữ số của nó một cách tùy ý, ta vẫn thu được một số chia hết cho 12.

a. Chứng minh rằng một “số đặc biệt” chỉ có thể chứa các chữ số 4 và 8.

b. Có tất cả bao nhiêu “số đặc biệt” có 5 chữ số?

a.

Từ giả thiết ii) suy ra số đó chia hết cho 4 và các chữ số đó phải chẵn, vì nếu có chữ số lẻ thì khi hoán vị chữ số đó ở hàng đơn vị sẽ không chia hết cho 4

Ngoài ra, dựa vào i) các chữ số đó chỉ có thể là 2; 4; 6; 8

Nhưng nếu có chữ số 2 hoặc 6 thì khi đổi chỗ chữ số đó đứng ở hàng đơn vị thì với mọi các chữ số chẵn đứng ở hàng chục cũng không có số nào chia hết cho 4 suy ra đpcm.

b.

Gọi các số có 5 chữ số đó là .

Ta có n chia hết cho 12, suy ra n chia hết cho 3 và 4.

n không thể chứa đúng 2 hoặc 3 hoặc 5 chữ số là 4 hoặc 8, vì khi đó n không chia hết cho 3 => n chỉ có thể chứa 4 chữ số 4, 1 chữ số 8 hoặc ngược lại

Nếu n chứa 4 chữ số 4 và 1 chữ số 8 => Có 5 số như vậy ( chữ số 8 có thể nằm ở 5 vị trí khác nhau). Tương tự với trường hợp n chứa 4 chữ số 8 và 1 chữ số 4.

Vậy tất cả có 10 " số đặc biệt " có 5 chữ số.