**ĐỀ 90**

**ĐỀ HSG TOÁN 9 \_ VĨNH LONG \_ 2023-2024**

**Câu 1. (4.0 điểm)**

1. Tính giá trị của biểu thức A = $\left(1-\sqrt{7}\right)^{3}$ + $\left(1+\sqrt{7}\right)^{3}$
2. Cho biểu thức P = $\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} -2}$ - $\frac{\sqrt{x} +1}{\sqrt{x} +2}$ + $\frac{\sqrt{x} -2}{1-\sqrt{x} }$ với *x* $\geq $ 0, *x*$\ne $ 1. Rút gọn biểu thức P và tìm x nguyên dương để P nhận giá trị nguyên.

**Câu 2. (4.0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}\sqrt[3]{3x-2y} +2\sqrt{x+2y}=6\\3\sqrt[3]{3x-2y} -4\sqrt{x+2y}=-22\end{array}\right.$
2. Giải phương trình $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6} =\sqrt{3x-8}$

**Câu 3. (2.0 điểm)**

Cho phương trình $x^{2}-(m+1)x+m-4=0$, m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$, $x\_{2}$ thỏa mãn

$\left(x\_{1}^{2}-mx\_{1}+m\right)\left(x\_{2}^{2}-mx\_{2}+m\right)$ = 2

**Câu 4. (2.5 điểm)**

a) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì 2023k + 3 không phải là lập phương của một số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^{2}-2y\left(x-y\right)=2\left(x+1\right)$

**Câu 5. (3.0 điểm)**

Cho đường tròn tâm O bán kính R, dây BC khác đường kính. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O, R) tại B và tại C cắt nhau ở A . Kẻ đường kính CD , kẻ BH vuông góc với CD tại H .

a) Chứng minh AO vuông góc với BC. Cho biết R = 15 cm, BC = 24 cm. Tính AB, OA.

 b) Gọi I là giao điểm của AD và BH, E là giao điểm của BD và AC. Chứng minh IH = IB.

**Câu 6. (2.5 điểm)**

Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB vuông góc với dây MN tại H (H nằm giữa O và B ). Trên tia MN lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O; R), đoạn thẳng AC cắt đường tròn (O; R) tại điểm K ( K khác A ), hai dây MN và BK cắt nhau ở E .

a) Chứng minh CA.CK = CE.CH.

b) Qua điểm N , kẻ đường thẳng (d ) vuông góc với AC , (d ) cắt tia MK tại F . Chứng minh tam giác NCF cân.

**Câu 7. (2.0 điểm)**

Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng:

1. $3\left(ab+bc+ca\right) \leq \left(a+b+c\right)^{2}$
2. $\frac{a}{1+b^{2}}$ + $\frac{b}{1+c^{2}}$ + $\frac{c}{1+a^{2}}$ $\geq \frac{3}{2}$

**------ HẾT ----------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1. (4.0 điểm)**

1. Tính giá trị của biểu thức A = $\left(1-\sqrt{7}\right)^{3}$ + $\left(1+\sqrt{7}\right)^{3}$
2. Cho biểu thức P = $\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} -2}$ - $\frac{\sqrt{x} +1}{\sqrt{x} +2}$ + $\frac{\sqrt{x} -2}{1-\sqrt{x} }$ với *x* $\geq $ 0, *x*$\ne $ 1. Rút gọn biểu thức P và tìm x nguyên dương để P nhận giá trị nguyên.

**Lời giải**

a) Ta có $\left(1-\sqrt{7}\right)^{3}$ = $1^{3}-3.1^{2}.\sqrt{7}+3.1\left(\sqrt{7}\right)^{2}-\left(\sqrt{7}\right)^{3}$ = $22-10\sqrt{7}$

$\left(1+\sqrt{7}\right)^{3}$ = $1^{3}+3.1^{2}.\sqrt{7}+3.1\left(\sqrt{7}\right)^{2}+\left(\sqrt{7}\right)^{3}$ = $22+10\sqrt{7}$

Khi đó A = $\left(1-\sqrt{7}\right)^{3}$ + $\left(1+\sqrt{7}\right)^{3}$ = 44

b) Ta có

P = $\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} -2}$ - $\frac{\sqrt{x} +1}{\sqrt{x} +2}$ + $\frac{\sqrt{x} -2}{1-\sqrt{x} }$

= $\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} -2}$ - $\frac{\left(\sqrt{x} +1\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{(\sqrt{x} +2)\left(1-\sqrt{x}\right)}$ + $\frac{(\sqrt{x} -2)(\sqrt{x}+2)}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}$

= $\frac{-(3x + \sqrt{9x} - 3)-(1-x)+(x-4)}{(\sqrt{x} +2)\left(1-\sqrt{x}\right)}$ = $\frac{- 2-3\sqrt{x}-x}{(\sqrt{x} +2)\left(1-\sqrt{x}\right)}$ = $\frac{\left(\sqrt{x} +1\right)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x} -1)(\sqrt{x}+2)}$

= $\frac{\left(\sqrt{x} +1\right)}{(\sqrt{x} -1)}$

P = 1 + $\frac{2}{\sqrt{x} -1}$

Để P nguyên thì 1 + $\frac{2}{\sqrt{x} -1}$ nguyên $⇒$ 2 $\vdots $ $\sqrt{x}$ - 1 $⇒$ $x \in ${4;9}

**Câu 2. (4.0 điểm)**

1. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}\sqrt[3]{3x-2y} +2\sqrt{x+2y}=6\\3\sqrt[3]{3x-2y} -4\sqrt{x+2y}=-22\end{array}\right.$
2. Giải phương trình $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6} =\sqrt{3x-8}$

**Lời giải**

a) Đặt $\left\{\begin{array}{c}a=\sqrt[3]{3x-2y}\\b=\sqrt{x+2y}\end{array}\right.$, ta có hệ đã cho trở thành $\left\{\begin{array}{c}a+2b=6\\3a-4b=-22\end{array}\right.$

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}a=-2\\b=4\end{array}\right.$

Ta có $\left\{\begin{array}{c}a=\sqrt[3]{3x-2y}=-2\\b=\sqrt{x+2y}=4\end{array}\right.$ $⇔\left\{\begin{array}{c}3x-2y=-8\\x+2y=16\end{array}\right.$

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x=2\\y=7\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm S = {$\left(2; 7\right)$}

b) $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6} =\sqrt{3x-8}$ (\*)

Điều kiện: $x \geq \frac{8}{3}$

(\*) $⇔$ $\left(\sqrt{5x-6}-3\right)^{2}+\left(\sqrt{3x-8}-1\right)^{2}=0$

$⇔\left\{\begin{array}{c}\sqrt{5x-6} -3=0\\\sqrt{3x-8}-1 =0\end{array}\right.$ $⇔$x = 3

Vậy tập nghiệm S = {3}.

**Câu 3. (2.0 điểm)**

Cho phương trình $x^{2}-(m+1)x+m-4=0$, m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$, $x\_{2}$ thỏa mãn

$\left(x\_{1}^{2}-mx\_{1}+m\right)\left(x\_{2}^{2}-mx\_{2}+m\right)$ = 2

**Lời giải**

$∆$ = $\left(m+1\right)^{2}-4\left(m-4\right)=m^{2}-2m+17$ = $\left(m-1\right)^{2}+16>0, ∀m\in R.$

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x\_{1},$ $x\_{2}$ với mọi *m*.

( Tính $∆$ 0,25 điểm, lập luận có hai nghiệm phân biệt 0,25 điểm).

$x\_{1}^{2}-(m+1)x+m-4=0$ $⇔$ $x^{2}-mx\_{1}+m=x\_{1}+4$

Tương tự $x\_{2}^{2}-mx\_{2}+m$ = $x\_{2}$ + 4

(Mỗi ý 0.25 điểm)

$\left(x\_{1}^{2}-mx\_{1}+m\right)\left(x\_{2}^{2}-mx\_{2}+m\right)$ = 2

$⇔$ $\left(x\_{1}+4\right)\left(x\_{2}+4\right)=2⇔ x\_{1}x\_{2} + 4\left(x\_{1}+x\_{2}\right)+16=2$ (\*)

Áp dụng định lí Viet, ta có:

(\*) $⇔(m-4)+4(m+1)+16=2⇔ m=\frac{-14}{5}$. Kết luận

**Câu 4. (2.5 điểm)**

a) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì 2023k + 3 không phải là lập phương của một số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^{2}-2y\left(x-y\right)=2\left(x+1\right)$

**Lời giải**

a) Giả sử 2023k + 3 = $a^{3}$ với k và a là số nguyên.

Suy ra 2023k = $a^{3}-3$

Ta chứng minh $a^{3}-3$ không chia hết cho 7.

Thật vậy: Ta biểu diễn $a=7m+r, với r\in \left\{0;1;-1;2;-2;3;-3\right\}$

Trong tất cả các trường hợp ta đều có $a^{3}-3$ không chia hết cho 7

Mà 2023k luôn chia hết cho 7, nên $a^{3}-3$ $\ne $ 2023k

*(Mỗi ý 0,25 điểm).*

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^{2}-2y\left(x-y\right)=2\left(x+1\right)$

$x^{2}-2y\left(x-y\right)=2\left(x+1\right)$ $⇔$ $x^{2}-2\left(y+1\right)x+2\left(y^{2}-1\right)=0$ (1).

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x thì $∆'$ = $4-\left(y-1\right)^{2}\leq $ 4

$∆'$ chính phương nên $∆' \in \left\{0;1;4\right\}$

+ Nếu $∆'$ = 4 $⇒$ $\left(y-1\right)^{2}=0$ $⇔$ $y=1$ thay vào phương trình (1) ta có:

$$x^{2}-4x=0⇔x\left(x-4\right)=0⇔\left[\begin{array}{c}x=0\\x=4\end{array}\right.$$

*+* Nếu $∆'$ = 1$ ⇒$ $\left(y-1\right)^{2}=$3 $⇒$ y $\notin $ Z.

+ Nếu $∆'$ = 0$ ⇒$ $\left(y-1\right)^{2}=$4 $⇔\left[\begin{array}{c}y=3\\y=-1\end{array}\right.$

+ Với y = 3 thay vào phương trình (1) ta có: $x^{2}-8x+16=0$

$⇔$ $\left(x-4\right)^{2}=0$ $⇔$ $x=4$

+ Với y = $-1$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^{2} = 0⇔$ $x=$0

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên:

$$\left(x;y\right)\in \left\{\left(0;1\right); \left(4;1\right); \left(4;3\right); \left(0;-1\right)\right\}$$

*Mỗi hai nghiệm 0,25 điểm*

**Câu 5. (3.0 điểm)**

Cho đường tròn tâm O bán kính R, dây BC khác đường kính. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O, R) tại B và tại C cắt nhau ở A . Kẻ đường kính CD , kẻ BH vuông góc với CD tại H .

a) Chứng minh AO vuông góc với BC. Cho biết R = 15 cm, BC = 24 cm. Tính AB, OA.

 b) Gọi I là giao điểm của AD và BH, E là giao điểm của BD và AC. Chứng minh IH = IB.

**Lời giải**

****

a) Chứng minh AO vuông góc với BC. Cho biết bán kính R bằng 15 cm, dây BC = 24 cm. Tính AB, OA

Ta có: AB = AC ( tính chất của tiếp tuyến đường tròn)

OB = OC ( bán kính đường tròn).

Suy ra OA là trung trực của BC $⇒$ $OA⊥ $BC tại K

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO đường cao BK, ta có:

$\frac{1}{AB^{2}}= \frac{1}{BK^{2}}-\frac{1}{OB^{2}}=\frac{1}{12^{2}}-\frac{1}{15^{2}}$ $⇒$ AB = 20 (cm).

*(Công thức 0.25 điểm, tính đúng kết quả 0.25 điểm)*

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABO, ta có:

$OA=\sqrt{AB^{2}+OB^{2}}= \sqrt{20^{2}+15^{2}}= \sqrt{25^{2}} = 25$(cm)

*(Công thức 0.25 điểm, tính đúng kết quả 0.25 điểm)*

b) $△$DCE có OA // ED (Cùng vuông góc với BC);

OC = OD = R. Suy ra EA = AC (1).

Ta lại có: BH //AC (Cùng vuông góc với DC)

Áp dụng hệ quả của định lý Ta - let, ta có $\frac{BI}{AE}=\frac{ID}{DA}=\frac{IH}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BI - IH

**Câu 6. (2.5 điểm)**

Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB vuông góc với dây MN tại H (H nằm giữa O và B ). Trên tia MN lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O; R), đoạn thẳng AC cắt đường tròn (O; R) tại điểm K ( K khác A ), hai dây MN và BK cắt nhau ở E .

a) Chứng minh CA.CK = CE.CH.

b) Qua điểm N , kẻ đường thẳng (d ) vuông góc với AC , (d ) cắt tia MK tại F . Chứng minh tam giác NCF cân.

**Lời giải**

****

a)$ △$CKE và $△$CHA có $\hat{CKE}$ = $\hat{CHA}$ = 90° và $\hat{KCE}$ chung

Suy ra $△$CKE $\~$ $△$CHA

Nên $\frac{CK}{CH}=\frac{CE}{CA}$ $⇔$ CK.CA = CH.CE

b) Do KB//FN nên $\hat{EKN} = \hat{KNF}$, $\hat{MKB}$ = $\hat{KFN}$ (1)

Mặt khác AB $⊥$ MN tại H nên H là trung điểm của MN suy ra tam giác MNB cân tại B $⇒$ MB = NB $⇒$ $\hat{MKB}$ = $\hat{EKN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung bằng nhau). (2)

Từ (1) và (2) $⇒$ $\hat{KNF}$ = $\hat{KFN}$ nên tam giác KFN cân tại K suy ra KC là đường trung trực của NF $⇒$ $△$CNF cân tại C.

**Câu 7. (2.0 điểm)**

Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng:

1. $3\left(ab+bc+ca\right) \leq \left(a+b+c\right)^{2}$
2. $\frac{a}{1+b^{2}}$ + $\frac{b}{1+c^{2}}$ + $\frac{c}{1+a^{2}}$ $\geq \frac{3}{2}$

**Lời giải**

a) Thực hiện xét hiệu ta được:

$\left(a+b+c\right)^{2}-$ $3\left(ab+bc+ca\right)=a^{2}+b^{2}+c^{2}-ab-ac-bc$

= $\frac{1}{2}$ $\left[\left(a-b\right)^{2}+\left(b-c\right)^{2}+\left(c-a\right)^{2}\right]\geq $0

$⇒$ $\left(a+b+c\right)^{2}\geq $3$\left(ab+bc+ca\right)$

b) Ta thấy điểm rơi đạt tại a = b = c = 1

Ta có: $\frac{a}{1+b^{2}}$ = a. $\frac{1}{1+b^{2}}$ = a.$\left(1-\frac{b^{2}}{1+b^{2}}\right)$ $\geq $ a$\left(1-\frac{b}{2}\right)$ = a$-\frac{ab}{2}$.

Tương tự ta được $\frac{b}{1+c^{2}}$ $\geq $ $b-\frac{bc}{2}$, $\frac{c}{1+a^{2}}$ $\geq $ $c-\frac{ca}{2}$.

Cộng về với về, ta có: $\frac{a}{1+b^{2}}$ + $\frac{b}{1+c^{2}}$ + $\frac{c}{1+a^{2}}$ $\geq $ $\left(a+b+c\right)-\frac{ab+bc+ca}{2}$ $\geq \frac{3}{2}$

Vì ab + bc + ca $\leq $ $\frac{1}{3}$ $\left(a+b+c\right)^{2}$ = 3

$⇒$ $\left(a+b+c\right)-\frac{ab+bc+ca}{2}$ $\geq 3-\frac{3}{2}$ = $\frac{3}{2}$

**------HẾT-----**