**Chương 2. PHÂN TÍCH, SUY LUẬN ĐỂ TÌM LỜI GIẢI**

**- Chương này giới thiệu cùng bạn đọc:**

+ Phân tích và suy luận khi đứng trước một phương trình vô tỷ.

+ Lựa chọn phương án hợp lý để tìm lời giải tối ưu.

+ Những hướng đi khác nhau – khó khăn và cách xử lý.

Ở chương I các bạn độc giả đã biết được phương pháp điển hình để giải một bài toán phương trình vô tỷ, cũng như một bài toán vô tỷ có thể có nhiều phương pháp khác nhau để tiếp cận. Tuy nhiên, làm thế nào để chúng ta có thể tiếp cận một bài toán phương trình vô tỷ và đưa ra được một lời giải cho nó là một câu hỏi khá lớn đang còn bỏ ngõ? Với mục đích, mở ra một hướng đi, một suy nghĩ cần có trước một phương trình vô tỷ thì trong chương này, chúng tôi xin mạn phép đưa ra một số những suy nghĩ là tại sao chúng ta có lời giải như thế, dựa trên những kinh nghiệm mà chúng tôi đã rút kết ra được trong quá trình giảng dạy.

**1. Khi nào nên sử dụng phương pháp nâng lên lũy thừa?**

Trong bài toán phương trình vô tỷ thì phép nâng lũy thừa là một phép biến đổi tự nhiên, đẹp để giải quyết. Có lúc phương pháp này được giải trực tiếp hoặc sẽ được sử dụng gián tiếp và sẽ là chìa khóa còn lại để tìm nghiệm của phương trình. Những bài toán thường được giải bằng phép nâng lũy thừa là những bài toán có dạng phương trình cơ bản, phương trình có chứa hằng đẳng thức, phương trình có chứa nghiệm chung, phương trình có chứa nhiều lớp căn thức có thể đưa về phương tình cơ bản. Điều quan trọng trong hướng giải bằng phép nâng lũy thừa đó chính là ta sẽ thu được phương trình tương đương hay phương trình hệ quả. Để có thể biến đổi chính xác, ta cần chú ý ta sẽ thu được phương trình tương đương nếu hai vế phương trình cùng dấu và hệ quả khi hai vế phương trình chưa rõ về dấu. Đó là những nhận định chung mà ta có thể định hướng lời giải cho bài toán dùng phương pháp nâng lũy thừa. Bây giờ ta sẽ quan tâm chính đến các ví dụ sau để có thể hiểu rõ hơn.

**Ví dụ 1.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Phương trình này về hình thức là một phương trình cơ bản nên để giải quyết bài toán này ta sẽ dùng phép nâng lũy thừa để loại bớt căn thức trong phương trình.

**Cách giải:** 

   

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Qua ví dụ này ta thấy rõ ràng với những phương trình cơ bản thì phương pháp nâng lũy thừa rất hiệu quả và cho lời giải gọn nhẹ.

**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát phương trình ta nhận thấy chỉ cần quy đồng mẫu số ta sẽ thu được phương trình cơ bản.

**Cách giải:** 

 

 

Thử lại ta có nghiệm của phương trình là 

**- Bình luận.** Với lời giải trên, sau khi biến đổi về phương trình quen thuộc, sử dụng phép nâng lũy thừa ta thu được phương trình hệ quả vì ta chưa biết rõ về dấu của hai phương trình nên ta cần thử lại nghiệm.

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Phương trình này có hình thức quen thuộc, ta có thể dùng phép nâng lũy thừa để giải quyết. Tuy nhiên trên thực tế, có một số học sinh rất quan ngại khi giải quyết phương trình này bằng phép nâng lũy thừa vì sẽ tạo ra phương trình bậc 6. Sử dụng máy tính ta biết được phương trình này có nghiệm duy nhất  Do đó ta có thể tự tin giải phương pháp này bằng phép nâng lũy thừa.

**Cách giải:**  

 

 vì  

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Bài toán được giải quyết khá gọn nhẹ và trong phép nâng lũy thừa thì đôi lúc ta cũng cần một chút khéo léo để làm gãy gọn về nghiệm của phương trình bằng những đánh giá cơ bản.

**Ví dụ 4.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán này có chứa nhiều căn thức và khi chuyển x sang vế phải phương trình ta sẽ thu được một phương trình quen thuộc. Điều đó ta hoàn toàn có thể sử dụng phép nâng lũy thừa để giải quyết bài toán. Tuy nhiên nếu chúng ta để ý một chút thì trong phương trình có chứa một hằng đẳng thức.

Thật vậy: 

Với phát hiện này, thì bài toán đã cho sẽ được thu gọn hơn và sẽ có lời giải gọn nhẹ hơn.

**Cách giải:** Điều kiện   Lúc đó:





  

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Với việc phát hiện ra hằng đẳng thức ta đã có lời giải gọn hơn vì khi đó ta chỉ sử dụng phép nâng lũy thừa cho một bài toán đơn giản.

**Ví dụ 5.** Giải phương trình .

**- Phân tích hướng giải.** Hình thức phương trình có kết cấu khá giống phương trình ta vừa xét. Ở trong phương trình này, ta tinh ý cũng sẽ phát hiện ra một hằng đẳng thức.

Thật vậy: 

Từ đó ta có cách giải như sau:

**Cách giải:** Điều kiện  

Với điều kiện vừa xét ta có:  Lúc đó phương trình trở thành:

 



 

 

Đối chiếu điều kiện cho ta tập nghiệm của phương trình 

**- Bình luận.** Qua ví dụ này, một lần nữa ta thấy được việc phát hiện phương trình có chứa hằng đẳng thức và đưa về được phương trình cơ bản sẽ giúp chúng ta sử dụng phép biến đổi lũy thừa chỉ còn là một phép biến đổi cơ bản để tìm nghiệm của phương trình. Trong ví dụ trên, ta có hai lần sử dụng hằng đẳng thức. bản chất của hai ví dụ 4 và 5 thực chất là chúng ta đã sử dụng phép nâng lũy thừa ở hai ý nghĩa “ngược” và “thuận”.

**Ví dụ 6.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán này có chứa một hiệu bình phương và hình thức phương trình là một phương trình không quen thuộc. Bây giờ ta sẽ sử dụng phép nâng lũy thừa này như nào? Nếu ta sử dụng trực tiếp thì ta sẽ tạo cho phương trình bậc còn cao hơn bậc ban đầu.

Ta để ý rằng: 

Với biến đổi này ta thấy số 16 có chứa hằng đẳng thức. Do đó ta sẽ biến đổi để làm vế trái phương trình giảm sự phức tạp bằng những biến đổi xuất phát từ nhận xét đã chỉ ra.

**Cách giải:** Điều kiện  

Với  không thỏa phương trình nên ta chỉ cần xét .

Lúc đó phương trình đã cho được biến đổi trở thành:



 

  

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là 

**- Bình luận.** Bài toán này, một lần nữa khẳng định sự mạnh mẽ của việc phương trình vô tỷ có chứa hằng đẳng thức và đưa về phương trình cơ bản thì phép nâng lũy thừa sẽ là lựa chọn ưu tiên. Điều đặc biệt của bài toán đó chính là việc biểu diễn 16 dưới dạng hằng đẳng thức.

**Ví dụ 7.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán này, việc đầu tiên muốn sử dụng nâng lũy thừa thì ta hoặc lũy thừa trực tiếp phương trình đã cho hoặc chuyển bớt căn thức sang vế phải rồi lũy thừa. Các phép biến đổi này đều thực hiện được, tuy nhiên nếu quan sát phương trình ta thấy ngay được phương trình giữa các đại lượng có một nghiệm chung  Do đó ta có thể giản ước được độ phức tạp giữa các đại lượng để đưa về phương trình cơ bản.

**Cách giải:** Điều kiện  

Với  phương trình đã cho được nghiệm đúng.

Với  ta biến đổi phương trình đã cho tương đương với phương trình:

 

 

  

Đối chiếu với điều kiện  ta có 

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm 

**- Bình luận.** Việc phát hiện ra nghiệm chung, giúp chúng ta sử dụng phép lũy thừa cho một bài toán cơ bản và hình thức gọn nhẹ hơn so với bài toán ban đầu.

**Ví dụ 8.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán có chứa hai căn bậc leach, thường bài toán cho dưới hình thức này thì thường phép nâng lũy thừa ít được tính đến. Nhưng quan sát thấy phương trình chứa hai căn bậc ba nên ta có thể ghép chúng lại với nhau rồi sử dụng phép nâng lũy thừa.

**Cách giải:** Điều kiện 

Với  phương trình đã cho được nghiệm đúng.

Với  phương trình đã cho được biến đổi.

 





.

Nhận xét với  thì 

Do đó (1) vô nghiệm. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Với hình thức phương trình đã cho ta có thể nghĩ khó có thể sử dụng phép nâng lũy thừa, nhưng ta thấy qua lời giải thì bài toán có hai căn bậc leach nhưng có dấu hiệu đặc biệt ta hoàn toàn có thể sử dụng phương pháp nâng lũy thừa để giải quyết. Bài toán này có thể có cách giải ngắn gọn hơn nhưng bằng kỉ năng lũy thừa cơ bản ta vẫn có thể giải bài toán một cách tự nhiên và đẹp.

**Ví dụ 9.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán có chứa bốn căn bậc hai, theo nguyên tắc thì ta vẫn có thể sử dụng phép nâng lũy thừa để giải quyết. Tuy nhiên nếu ta khéo léo một chút bằng sự cảm nhận giữa các đại lượng thì khi nâng lũy thừa ta sẽ thu được một phương trình gọn gàng và đẹp hơn. Quan sát bài toán ta nhận thấy giữa các đại lượng trong phương trình ở cả hai vế đều chứa x và 3x và để tiện lợi trong phép nâng lũy thừa ta nên chuyển các dấu trừ thành dấu cộng.

**Cách giải:** Điều kiện  Lúc đó phương trình đã cho trở thành:









 

 

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là 

**- Bình luận.** Với sự nhận xét tinh tế giữa các đại lượng có trong phương trình thì ta sẽ giải quyết bài toán gọn gàng và đẹp hơn. Đó là một trong những điểm đáng lưu ý trong các phương trình chứa bốn căn bậc hai mà khi ta sử dụng phép nâng lũy thừa để giải quyết nó.

**Ví dụ 10.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Phương trình này có hình thức rất quen thuộc, nhưng điều quan ngại là cả đại lượng trong căn thức và ngoài căn thức đều chứa bậc cao. Do đó để có thể nắm chắc lời giải này bằng phép nâng lũy thừa, thì điều quan trọng lúc này cũng chính là chúng ta đi tìm hiểu nghiệm của nó thế nào? Sử dụng máy tính ta biết được phương trình này có hai nghiệm   Mặt khác khi nâng lũy thừa ta sẽ thu được phương trình bậc 6, với hai nghiệm đã biết thì trong quá trình phân tích ta sẽ còn phương trình bậc 4, phương trình này quen thuộc hơn nên bây giờ ta mới tự tin dùng phép nâng lũy thừa để giải quyết bài toán.

**Cách giải:**

    

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  

**- Bình luận.** Với những phương trình cơ bản có chứa các đại lượng bậc cao, nếu nghiệm của phương trình “đẹp” thì ta vẫn có khả năng dùng phép nâng lũy thừa để giải quyết trọn vẹn bài toán.

Với 10 ví dụ vừa phân tích và bình luận trên, chúng tôi hi vọng đã mở ra cho quý độc giả có cái nhìn tổng quan cho một phương trình giải bằng phương pháp nâng lũy thừa bao gồm những tư duy và đánh giá nào cần có ngoài những bài toán cơ bản. Bây giờ vấn đề đặt ra là với những bài toán mà khi sử dụng phép nâng lũy thừa tạo cho chúng ta những biến đổi phức tạp hoặc không thể dùng phép nâng lũy thừa để giải quyết thì chúng ta sẽ giải quyết nó bằng phương pháp nào? Mời các độc giả chuyển sang câu hỏi thứ 2 của chúng tôi.

**2. Khi nào nên sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ?**

Phương pháp giải phương trình vô tỷ bằng ẩn phụ hóa là một phương pháp vô cùng quan trọng, có đôi lúc khi gặp phương trình vô tỷ mà ta không thể dùng phép nâng lũy thừa bởi vì có thể là do không giải được hoặc giải được nhưng lại rắc rối. khi đó có thể nếu ta ẩn phụ hóa sẽ được một lời giải gọn hơn. Tuy nhiên, ngoài những định dạng cụ thể để ẩn phụ hóa ở phương pháp thì ta cần phải xác định rõ xem bài toán đang xét nên ẩn phụ hóa bằng cách nào là thuận tiện nhất. Để ẩn phụ hóa một phương trình vô tỷ thành công thì điều quyết định đó chính là tìm ra các mối liên quan giữa các đại lượng trong bài toán được gắn kết với nhau thế nào. Mặt khác các phép biến đổi ẩn phụ hóa phải đưa được về phương trình có lối thoát nhất định, thường gặp đó chính là các phương trình tách nhân tử, các phương trình đa thức quen thuộc, phương trình đẳng cấp, hệ phương trình giải bằng phương án thế hoặc hệ đối xứng hoặc hệ có lối đi đánh giá nào đó. Để hiểu rõ hơn ta xem xét các ví dụ sau:

**Ví dụ 1.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Với phương trình này, ta sẽ bắt bầu tìm các mối liên quan giữa các đại lượng với nhau để từ đó có thể ẩn phụ hóa thành công. Ta để ý rằng:  Khi đó ta để ý thấy được rằng nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó buộc phải khác 0. Ngoài ra từ sự biến đổi này ta thấy sự xuất hiện của số 1 trong căn và ngoài căn làm ta liên tưởng đến phép chia hai vế phương trình cho , ta thu được phương trình:

 

Rõ ràng đến nay ta đã thấy được sự liên quan giữa các đại lượng trong phương trình nên ta hoàn toàn có thể ẩn phụ hóa để giải phương trình này.

**Cách giải:**

Với  phương trình đã cho không thỏa.

Với  ta biến đổi phương trình đã cho trở thành:

 

 

Đặt  Lúc đó (1) trở thành:

  

  

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm .

**- Bình luận.** Lối đi tìm mối liên quan giữa các đại lượng ở phương trình này là một hướng đi rất quen thuộc trong những lối đi tìm ẩn phụ ở các bài toán phương trình vô tỷ trong các kì thi. Việc phát hiện ra chia hai vế phương trình cho biến x để tìm ẩn phụ hóa xuất phát từ ý tưởng các hệ số đối xứng, thể hiện rõ trong bài toán này chính là số 1.

**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán này, ta thấy hình thức phương trình rất quen thuộc nhưng nếu ta dùng phương án lũy thừa để giải quyết sẽ rất khó đạt được kết quả khả thi phương trình tạo ra sẽ là phương trình bậc 6 có nghiệm vô tỷ. Do đó để giải bài toán này, ta thử xem có thể ẩn phụ hóa được không?

Ta cần tìm các mối liên quan giữa các đại lượng có trong phương trình.

Nhận xét rằng:  

Tới nay, ta thấy được đại lượng trong căn thức được biểu diễn thành tích. Do đó ta thử tìm hiểu xem đại lượng ngoài căn thức có liên quan gì đến tích này không? Thông qua xác định các hệ số bất định m, n để có được phân tích sau: 



Đồng nhất hệ số hai vế của (\*) ta thu được:  

Điều đó có nghĩa là: 

Tới nay xem như ta đã thực sự thành công trong việc tìm ra mối liên quan giữa các đại lượng có trong phương trình với nhau.

**Cách giải:** Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:



  vì  

Đặt , khi đó phương trình (1) trở thành:

  

Với    (vô nghiệm).

Với    

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm 

**- Bình luận.** Việc tìm hệ số bất định để gắn kết các đại lượng trong phương trình với nhau để tạo ẩn phụ hóa là một hướng đi rất quen thuộc và quan trọng trong lối đi ẩn phụ hóa. Để sử dụng được điều này, ta cần tách được đại lượng trong căn thức thành tích, việc tách tích này thường dựa vào hằng đẳng thức hoặc biết trước nghiệm của phương trình. Tuy nhiên nếu sau khi bước tách tích mà ta không tìm được hệ số bất định gắn kết đại lượng còn lại theo hai thừa số có trong tích tách được thì đó có khả năng là phương trình đó không giải bằng ẩn phụ hóa.

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán này, với điều kiện cho phép ta quy đồng sẽ đưa bài toán về dạng quen thuộc và có thể sử dụng phép nâng lũy thừa để giải quyết bài toán. Tuy nhiên, ta hãy thử với phương pháp ẩn phụ hóa bài toán này, ta sẽ thu được những kiến thức gì và lời giải cho nó được tư duy thế nào để gắn kết mối liên quan giữa các đại lượng với nhau.

Ta có: 

Khi đó nếu  

Khi đó kết hợp với phương trình ta sẽ thu được hệ phương trình:



Hệ thu được là một hệ đối xứng loại 2 quen thuộc. Vậy xem như việc tìm sự liên quan giữa các đại lượng có trong phương trình đã hoàn tất.

**Cách giải:** Điều kiện  

Đặt , 

Khi đó kết hợp với phương trình ta sẽ thu được hệ phương trình:



Lấy (1) – (2) vế theo vế ta thu được phương trình:

  

Với    

Với    

Đối chiếu điều kiện của x, t ta có nghiệm 

**- Bình luận.** Việc đặt ẩn phụ hóa kết hợp với phương trình đưa về hệ phương trình giải bằng các phương pháp cơ bản là một trong những lối đi cũng khá phổ biến trong các bài toán phương trình vô tỷ.