

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT NGUYỄN XUÂN NGUYỄN

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**VẬN DỤNG KIẾN THỨC CƠ BẢN GIẢI NHANH
MỘT SỐ BÀI TOÁN TRẮC NGHIỆM SỐ PHỨC HAY
VÀ KHÓ LUYỆN THI THPT QUỐC GIA 2017**

Người thực hiện: Nguyễn Danh Thanh

Chức vụ: Giáo viên

SKKN môn: Toán

THANH HOÁ, NĂM 2017

MỤC LỤC

NỘI DUNG	Trang
I. Mở đầu	2
1.1. Lý do chọn đề tài	2
1.2. Mục đích nghiên cứu	3
1.3. Đối tượng nghiên cứu	3
1.4. Phương pháp nghiên cứu	3
II. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm	3
2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm	3
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm	4
2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm ...	4
2.3.1. Các khái niệm	4
2.3.2. Các phép toán số phức	5
2.3.3. Các tính chất của số phức	6
2.3.4. Giải phương trình bậc hai trên tập số phức	6
2.3.4. Một số bài toán thường gặp	7
2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm ...	16
III. Kết luận, kiến nghị	17
3.1. Kết luận	17
3.2. Kiến nghị	17
Tài liệu tham khảo	18

I. MỞ ĐẦU

1.1. Lý do chọn đề tài¹

Trong lộ trình đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo chúng ta đã và đang dịch chuyển giáo dục và đào tạo đáp ứng nhu cầu của người học và của xã hội; đề cao việc học sinh biết vận dụng những kiến thức được học vào giải quyết các vấn đề thực tiễn.

Năm học 2016- 2017, là năm học đầu tiên thực hiện bước đột phá trong đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục đó là: đổi mới căn bản hình thức và phương pháp thi, kiểm tra và đánh giá kết quả giáo dục, đào tạo, bảo đảm trung thực, khách quan. Kỳ thi THPT Quốc gia 2017 có 7 môn thi trắc nghiệm khách qua, trong đó có môn Toán với 50 câu trắc nghiệm mỗi câu có 4 phương án lựa chọn A- B- C- D, thời gian làm bài là 90 phút, áp lực về thời gian là rất cao, tuy nội dung đề thi đa phần nằm trong chương trình lớp 12, những học sinh sử dụng kết quả môn Toán để xét Đại học- Cao đẳng cần phải làm được câu hỏi ở mức độ vận dụng, trong đó có câu khó về số phức. Đây là một trong những câu hỏi tương đối khó. Để làm được câu hỏi này đòi hỏi học sinh ngoài việc nắm vững kiến thức cơ bản, luyện tập nhiều còn phải biết vận dụng kiến thức hình học phẳng đã được học ở lớp 10. Là một giáo viên thường xuyên dạy các mũi nhọn ôn thi tự nhiên định hướng Đại học, đối tượng học sinh chủ yếu là học sinh khá, giỏi. Nhiệm vụ trọng tâm là giúp học sinh nắm chắc kiến thức cơ bản và nghiên cứu sâu một số nội dung trong chương trình học để phát triển tư duy và đặc biệt là nguồn tham gia các kỳ thi học sinh giỏi cấp tỉnh môn Toán cũng như đạt điểm cao trong kỳ thi Quốc gia THPT.

Từ thực tiễn giảng dạy và bồi dưỡng học sinh ôn thi đại học nhiều năm, cùng với kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy học sinh khối 12 ôn thi THPT Quốc gia năm học 2016- 2017, Tác giả nhận thấy hiện tại chưa có các tài liệu nào bàn sâu vào vấn đề này, đồng nghiệp, nhà trường chưa có kinh nghiệm để giải quyết khắc phục.

Do đó, việc nghiên cứu, khai thác, vận dụng các kiến thức cơ bản để giúp học sinh giải quyết các bài toán trắc nghiệm hay và khó về số phức để học sinh đạt điểm cao trong kỳ thi THPT Quốc gia 2017 là cấp thiết.

Tên đề tài: ***“Vận dụng kiến thức cơ bản giải nhanh một số bài toán trắc nghiệm số phức hay và khó luyện thi THPT Quốc gia 2017 ”.***

¹ Trong mục này tác giả tham khảo TLTK số 1

1.2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu đề tài này tác giả mong muốn cung cấp cho học sinh một số kiến thức, kỹ năng cơ bản và một số dạng toán hay và khó về số phức; từ đó học sinh có thể vận dụng giải quyết các bài toán trắc nghiệm số phức hay và khó trong kì thi THPT Quốc gia 2017. Đồng thời đề tài cũng là tài liệu bổ ích cho đồng nghiệp và nhà trường sử dụng để bồi dưỡng học sinh trong những năm học tới.²

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Tác giả tập trung nghiên cứu kiến thức có bản về số phức và một số tính chất bất biến liên quan đến số phức kết hợp một số tính chất hình học tọa độ trong mặt phẳng học sinh đã được học ở lớp 10 để giải quyết một số bài toán trắc nghiệm hay và khó về số phức.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Trong phạm vi của đề tài, tác giả sử dụng kết hợp các phương pháp như:

- Phương pháp xây dựng cơ sở lý thuyết;
- Phương pháp điều tra, khảo sát thực tế, thu thập thông tin;
- Phương pháp thống kê, xử lý số liệu.

II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm³

Vấn đề tác nghiên cứu được dựa trên cơ sở khái niệm, các tính chất và các phép toán về số phức trong chương trình lớp 12 cũng như vận dụng kiến thức hình học tọa độ trong mặt phẳng học sinh đã được học ở lớp 10. Chúng ta đã biết, mỗi số phức được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng tọa độ. Vì vậy, các bài toán về số phức phải đảm bảo tính chất hình học phẳng. Dạng đại số của số phức gần như chỉ giải quyết được những bài toán ở mức độ nhận biết, thông hiểu và vận dụng thấp, những bài toán số phức ở mức độ vận dụng cao có sẽ mất nhiều thời gian và gặp khó khăn nếu chỉ sử dụng dạng đại số qua các phép toán về số phức.

Từ cấp 2 các em đã được học các tập số: tập số tự nhiên N , tập số nguyên Z , tập số hữu tỉ Q và tập số thực R . So với tập số phức C thì tập số thực là vô cùng nhỏ bé, vậy mà những bài toán trên tập số thực đã vô số. Tập số phức phát triển là một bước tiến của khoa học. Trong vật lý ngày nay, số phức xuất hiện rất nhiều. Bởi vì vật lý liên quan đến hình học, có nhiều đại lượng không chỉ có độ lớn mà còn có hướng. Mà đã nói đến hướng là đề cập đến số phức, vì số ảo thể hiện sự

² Trong mục 1.2. tác giả tự đưa ra

³ Mục 2.1 và 2.2 là của tác giả

quay 90 độ. Ví dụ như đề mô tả điện xoay chiều (là thứ điện ta dùng chủ yếu ngày nay) hay một số thứ trong mạng điện nói chung, người ta có thể dùng số phức.

Nội dung của đề tài đáp ứng một phần rất nhỏ trong chương trình, song tác giả nhận thấy rằng mỗi bài toán là một ý tưởng vận dụng kiến thức cơ bản tổng hợp. Vậy tác giả mong muốn các đồng nghiệp và học sinh ngày càng vận dụng được kiến thức cơ bản và tính chất để hình thành ý tưởng ra đề thi hay cũng như trong dạy và học Toán nói chung, dạy và học chương số phức nói riêng tốt nhất.

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm⁴

Chương số phức nằm cuối chương trình giải tích lớp 12, tuy nội dung mới đối với học sinh song kiến thức cơ bản không nhiều và không khó. Lâu nay giáo viên và học sinh không mấy quan tâm vì cho là dễ. Trong những kì thi Đại học cũng như THPT Quốc gia từ năm 2016 trở về trước thì số lượng câu hỏi và điểm chiếm khoảng 10% nhưng chủ yếu ở mức độ thông hiểu và vận dụng thấp; đồng thời kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh cũng không ra vào phần số phức nên nhiều giáo viên không chú tâm khai thác những bài toán về số phức ở mức độ vận dụng cao. Tuy nhiên, trong 3 lần ra đề minh họa và thử nghiệm Bộ Giáo dục và Đào tạo thường có 1 đến 2 câu số phức ở mức độ vận dụng cao khiến học sinh và giáo viên lúng túng.

Kì thi THPT Quốc gia 2017, với hình thức thi trắc nghiệm và đề minh họa của Bộ có câu hỏi khó về số phức nên giáo viên và học cũng đã quan tâm hơn song lại không có tài liệu nghiên cứu sâu về vấn đề này, từ thực tiễn dạy học tác giả cũng gặp phải khó khăn đó nên đã nghiên cứu đúc rút thành bài học kinh nghiệm.

2.3. Vận dụng kiến thức cơ bản giải một số bài toán trắc nghiệm số phức hay và khó luyện thi THPT Quốc gia 2017.

2.3.1. Các khái niệm [2]

a) Định nghĩa số phức

- Mỗi biểu thức dạng $a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ được gọi là một **số phức**
- Đối với số phức $z = a + bi$, ta nói a là **phần thực**, b là **phần ảo** của z .
- Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Chú ý:

+ Mỗi số thực a là một số phức với phần ảo bằng 0: $a = a + 0i$, ta có $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

+ Số phức $a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ được gọi là **số thuần ảo** $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

⁴ Mục 2.2 là của tác giả, mục 2.3.1 tác giả tham khảo tại TLTK số 2

+ Số 0 được gọi là số vừa thực vừa ảo; số i được gọi là **đơn vị ảo**.

b) Số phức bằng nhau

Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo tương ứng của chúng

$$\text{bằng nhau: } a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

c) Số phức đối và số phức liên hợp

Cho số phức $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$

- Số phức đối của z kí hiệu là $-z$ và $-z = -a - bi$.

- Số phức liên hợp của z kí hiệu là $\bar{z}$ và $\bar{z} = a - bi$.

d) Biểu diễn hình học của số phức

Điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy được gọi là **điểm biểu diễn số phức** $z = a + bi$.

e) Môđun của số phức

Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Độ dài của vector $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **môđun của số phức** z . KH $|z|$.

$$\text{Vậy: } |z| = \overline{OM} \text{ hay } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\underline{\text{Nhân xét:}} \quad |z| = |-z| = |\bar{z}|.$$

2.3.2. Các phép toán số phức⁵

Cho hai số phức: $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$. Ta có:

a) Phép cộng và phép trừ hai số phức

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

b) Phép nhân hai số phức

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

$$\text{Nhận xét: } z \cdot \bar{z} = |z|^2 = \bar{z} \cdot z.$$

c) Phép chia hai số phức

Với số phức $z_1 = a + bi \neq 0$, để tính thương $\frac{z_2}{z_1} = \frac{c + di}{a + bi}$, ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của số phức $z_1 = a + bi$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i.$$

⁵ Mục 2.3.2 tác giả tham khảo tại TLTK số 2

2.3.3. Các tính chất của số phức ⁶

Cho số phức $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$

- **Tính chất 1:** Số phức z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

- **Tính chất 2:** Số phức z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i; z_2 = a_2 + b_2i; a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ ta có:

- **Tính chất 3:** $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

- **Tính chất 4:** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

- **Tính chất 5:** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; z_2 \neq 0$

- **Tính chất 6:** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

- **Tính chất 7:** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; z_2 \neq 0$

- **Tính chất 8:** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

- **Tính chất 9:** $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

2.3.4. Giải phương trình bậc hai trên tập số phức

a) Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai: $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) có $\Delta = b^2 - 4ac$

- TH1: a, b, c là các số thực

+ Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

+ Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép thực $z = \frac{-b}{2a}$

+ Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phức phân biệt $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

- TH2: a, b, c là các số phức

+ Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép thực $z = \frac{-b}{2a}$

+ Nếu $\Delta \neq 0; \Delta = a + bi = (x + iy)^2$

Khi đó phương trình có hai nghiệm $z = \frac{-b \pm (x + yi)}{2a}$

Chú ý: Khi b là số chẵn ta có thể tính Δ' và công thức nghiệm tương tự như trong tập hợp số thực.

⁶ Mục 2.3.3. và 2.3.4. tác giả tham khảo tại TLTK số 2 và tổng hợp từ kinh nghiệm dạy học nhiều năm

2.3.5. Một số bài toán thường gặp ⁷

Bài toán 1.

Cho số phức z có thỏa mãn $|z|=k > 0$. Tìm tâm và bán kính đường tròn biểu diễn số phức $w=(a+bi)z+c+di$.

Phương pháp giải: áp dụng tính chất 6: $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

Ta có $|z|=k \Leftrightarrow |(a+bi).z| = |a+bi|.k \Leftrightarrow |(a+bi)z|=k.\sqrt{a^2+b^2}$

Đặt $w=x+yi$

$$\Rightarrow (x-c)+(y-d)i=(a+bi)z \Rightarrow |(x-c)+(y-d)i|=|(a+bi)z|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}=k\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow (x-c)^2+(y-d)^2=k^2(a^2+b^2)$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(a+bi)z+c+di$ là đường tròn tâm $I(c;d)$, bán kính $R=\sqrt{k^2(a^2+b^2)}$

Nhận xét: sử dụng phương pháp trên rất nhanh gọn và không khó nhưng có thể xử lý được những bài toán phức tạp và khó.

Ví dụ 1. Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- A. $r=4$. B. $r=5$. C. $r=20$. D. $r=22$. [4]

HD: Đáp án C

Ta có: $|z|=4 \Leftrightarrow |z||3+4i|=4.|3+4i| \Leftrightarrow |(3+4i)z|=20$

Mặt khác: $w=(3+4i)z+i \Leftrightarrow w-i=(3+4i)z \Leftrightarrow a+bi-i=(3+4i)z$

Lấy modun hai vế ta được: $a^2+(b-1)^2=20^2 \Rightarrow r=20$

Ví dụ 2. Cho số phức z có môđun là 3, biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn thì có bán kính là?

- A. $3\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{7}$ [5]

HD: Đáp án B

Đặt $w=x+yi$

$$\Rightarrow |z|=3 \Leftrightarrow |(2-i)z|=3|2-i|=3\sqrt{5}$$

$$w=3-2i+(2-i)z \Leftrightarrow (x-3)+(y+2)i=(2-i)z$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=|(2-i)z|=3\sqrt{5}$$

⁷ Mục 2.3.5 tác giả tham khảo từ các TLTK số 4 và số 5, Bài toán 1, phương pháp giải nhanh các ví dụ 1, 2 là của tác giả.

Ví dụ 3. Tập hợp các số phức $w = (1+i)z + 1$ với z là số phức thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

A. 4π B. 2π C. 3π D. π [5]

HD: Đáp án B

$$\text{Ta có: } |(1+i)z - (1+i)| \leq |1+i| = \sqrt{2}$$

$$\text{Đặt } w = x + yi \Rightarrow w = (1+i)z + 1 \Leftrightarrow w - 2 - i = (1+i)z - (1+i)$$

$$\Leftrightarrow |w - 2 - i| = |(1+i)z - (1+i)| = \sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{2} \Rightarrow S = \pi R^2 = 2\pi$$

Bài toán 2.⁸

Cho số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| + |z - c - di| = k > 0$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z và tìm M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z - p - qi|$.

Phương pháp giải:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Trên mặt phẳng tọa độ Oxy gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Gọi $A(a; b), B(c; d)$ thì

$$|z - a - bi| + |z - c - di| = k \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2} = k$$

$$\Leftrightarrow MA + MB = k \text{ và } MA + MB \geq AB$$

Mặt khác: Gọi $I(p; q)$ thì $|z - p - qi| = \sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2} = MI$

TH1: Nếu $AB > k$ thì không tồn tại M, suy ra không tồn tại z nên không tồn tại M, n.

TH1: Nếu $AB = k$ thì tập hợp điểm biểu diễn z là đoạn thẳng AB . Khi đó suy ra M, n.

TH1: Nếu $AB < k$ thì tập hợp điểm biểu diễn z là một Elip nhận A, B làm 2 tiêu điểm. Từ đó suy ra M, n.

Nhận xét: sử dụng phương pháp trên đòi hỏi học sinh phải nắm vững một số kiến thức hình học phẳng và hình tọa độ trong mặt phẳng.

Ví dụ 4. Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$.

B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$.

D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$. [4]

HD: Đáp án B

⁸ Ví dụ 3 từ TLTK số 5, phương pháp giải nhanh và bài toán 2 là của tác giả, ví dụ 4 từ tài liệu tham khảo số 4

Phương pháp: Gọi $z = x + yi$ và tìm tập hợp điểm biểu diễn z trên trục tọa độ từ đó tìm GTLN, GTNN của biểu thức đã cho.

Cách giải: Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Trên mặt phẳng tọa độ Oxy gọi $P(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Gọi $A(-2; 1), B(4; 7)$ thì

$$AB = 6\sqrt{2} = |z + 2 - i| + |z - 4 - 7i|$$

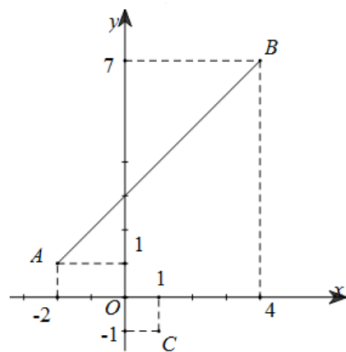
$$= \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} = PA + PB.$$

Suy ra tập hợp các điểm P thỏa mãn là đoạn thẳng AB .

Có $|z - 1 + i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = PC$ với $C(1; -1)$.

Suy ra: $M = PB = \sqrt{73}$ và

$$m = d(P, AB) = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow M + m = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}.$$



Ví dụ 5. ⁹Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2| + |z + 2| = 10$

A. Đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$

B. Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

C. Đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$

D. Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ [5]

HD: Đáp án D

- **Phương pháp** : số phức $z = x + yi$ thì $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Từ đó ta có tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z .

Cách giải: gọi $z = x + yi$. Khi đó điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z

Ta có $|z - 2| + |z + 2| = 10 \Leftrightarrow |x - 2 + yi| + |x + 2 + yi| = 10$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 10$$

Đặt $F_1(-2; 0); F_2(2; 0)$, khi đó: $MF_1 + MF_2 = 10 > F_1F_2 (=4)$ nên tập hợp các

điểm M là elip (E) có 2 tiêu cự là $F_1; F_2$. Gọi (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MF_1 + MF_2 = 10 = 2a \\ F_1F_2 = 4 = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

Vậy tập hợp các điểm M là elip: (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

⁹ Ví dụ 5 tác giả tham khảo tại TLTK số 5, phương pháp giải nhanh là của tác giả.

Bài toán 3.¹⁰

Cho số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| = |z - c - di|$. Tìm số phức $w = z + p + qi$ có môđun nhỏ nhất.

Phương pháp giải:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$|z - a - bi| = |z - c - di| \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = \sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2}$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + C = 0$$

Rút y theo x rồi thế vào môđun của w ta tìm được z

Ví dụ 6. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = |z - i|$, tìm số phức có môđun nhỏ nhất.

A. $z = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ B. $z = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ C. $z = \frac{2}{5} + \frac{16}{5}i$ D. $z = \frac{16}{5} + \frac{2}{5}i$ [5]

HD: Đáp án A

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có $|z - 1 + 2i| = |z - i| \Leftrightarrow |(a - 1) + (b + 2)i| = |a(b - i)|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 2)^2} = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2} \Leftrightarrow 2a - 6b = 4 \Leftrightarrow a = 3b + 2$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3b + 2)^2 + b^2} = \sqrt{10b^2 + 12b + 4} = \sqrt{10\left(b + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}} \geq \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Dấu “=” xảy ra $b = -\frac{3}{5} \Rightarrow a = \frac{1}{5}$. Vậy $z = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$.

Ví dụ 7. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$, $w = iz + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 2 C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $2\sqrt{2}$ [5]

HD: Đáp án A

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó $z + 2 - 2i = a + 2 + (b - 2)i$ và $z - 4i = a + (b - 4)i$

Nên ta có $(a + 2)^2 + (b - 2)^2 = a^2 + (b - 4)^2 \Leftrightarrow a + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - a$

Khi đó $w = iz + 1 = (a + bi)i + 1 = 1 - b + ai \Rightarrow |w| = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{a^2 + (a - 1)^2}$

Dễ thấy $a^2 + (a - 1)^2 = 2a^2 - 2a + 1 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |w| \geq \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \min_{|w|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

¹⁰ Ví dụ 6, ví dụ 7 tác giả tham khảo tại TLTK số 05. Bài toán 3 và phương pháp giải nhanh là của tác giả.

¹¹Bài toán 4. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=m, |z_2|=n, |z_1 - z_2|=p$. Tính $|z_1 + z_2|$.

Phương pháp giải:

- **Tính chất 9:** $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

Ta chứng minh:

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$$

$$\text{Mà } |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$$

$$\text{Suy ra: } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

Ví dụ 8. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_1 - z_2|=1$. Tính $|z_1 + z_2|$.

A. $\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. [5]

HD: Đáp án A

$$\text{Ta có: } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3}.$$

Ví dụ 9. Cho z_1, z_2 là 2 số phức bất kỳ, giá trị biểu thức:

$$a = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2} \text{ bằng?}$$

A. $a=2$

B. $a=1/2$

C. $a=1$

D. $a=3/2$ [5]

HD: Đáp án B

Phương pháp:

$$\text{Sử dụng tính chất 9. Ta có: } a = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2} = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 10. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1$ và $|z_1 - z_2|=\sqrt{3}$. Tính

$$P = \left| \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 \right|$$

A. $P = \frac{1}{3}$

B. $P=0$

C. $P = \frac{1}{9}$

D. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ [5]

HD: Đáp án A

$$\text{Sử dụng tính chất 9: Ta có } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

¹¹ Bài toán 4 là của tác giả, Các ví dụ 8, 9, 10 tác giả tham khảo từ TLTK số 5, PP giải nhanh là của tác giả

Áp dụng (*) với $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 - z_2| = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 2(1^2 + 1^2) - (\sqrt{3})^2 = 1 \Rightarrow |z_1 + z_2| = 1$

Mặt khác $P = \left| \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 \right| = \left| \frac{1}{3}(z_1 + z_2) \right| = \left| \frac{1}{3} \right| \cdot |z_1 + z_2| = \frac{|z_1 + z_2|}{3} = \frac{1}{3}$

¹²**Bài toán 5.**

Vận dụng công thức nghiệm của phương trình bậc hai nghiệm phức.

Phương pháp giải:

- Phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) trên tập hợp số phức với hệ số thực luôn có 2 nghiệm là 2 số phức liên hợp.

- Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) a, b, c là các

số thực hoặc số phức. Khi đó ta có:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ví dụ 11. Cho số phức z thỏa mãn z không phải là số thực và $w = \frac{z}{2 + z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = |z + 1 - i|$ là:

A. 2.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. 8. [5]

HD: Đáp án B

Ta có: $w = \frac{z}{2 + z^2} \Rightarrow wz^2 - z + 2w = 0$

Phương trình (1) có hai nghiệm là hai số phức liên hợp $z, \bar{z}$ nên:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2} \Rightarrow w = z + 1 - i \Leftrightarrow z = w - 1 + i \Rightarrow |w - 1 + i| = \sqrt{2}.$$

Do đó tập hợp biểu diễn w là đường tròn tâm $I(1; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow |w|_{\max} = \sqrt{2} + \sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$$

Ví dụ 12. Cho số phức $z \neq 0$ sao cho z không phải là số thực và $w = \frac{z}{1 + z^2}$ là

số thực. Tính $\frac{|z|}{1 + |z|^2}$.

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 2

D. $\frac{1}{3}$ [5]

HD: Đáp án B

¹² Bài toán 5 là của tác giả, các ví dụ 11, 12 tác giả tham khảo tại TLTK số 05, PP giải nhanh là của tác giả

Ta có: $w = \frac{z}{1+z^2} \Rightarrow wz^2 - z + w = 0$ (1) là phương trình bậc hai với hệ số thực
có hai nghiệm là hai số phức liên hợp $\Rightarrow |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = 1 \Rightarrow \frac{|z|}{1+|z|^2} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 13.¹³ Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn z không là số thực và $\frac{z^2 + z + 1}{z^2 - z + 1}$ là số thực. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{1 - a^4 - b^4}{1 - a^6 - b^6}$.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{1}{3}$ [5]

HD: Đáp án B

Ta có $\frac{z^2 + z + 1}{z^2 - z + 1} = k, k \in \mathbb{R}, k \neq 1 \Rightarrow pt: (1 - k)z^2 + (1 + k)z + 1 - k = 0$ có hai nghiệm là hai số phức liên hợp. Khi đó:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = \frac{1 - k}{1 - k} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

Ta có

$$\begin{cases} a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 1 - 2a^2b^2 \\ a^6 + b^6 = (a^2 + b^2) \left[(a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2 \right] = 1 - 3a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow M = \frac{1 - (1 - 2a^2b^2)}{1 - (1 - 3a^2b^2)} = \frac{2}{3}$$

Ví dụ 14. Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết $z_1 = w + 2i$ và $z_2 = 2w - 3$ là hai nghiệm phức của pt $z^2 + az + b = 0$. Tính $T = |z_1| + |z_2|$

A. $T = 2\sqrt{13}$ B. $T = \frac{2\sqrt{97}}{3}$ C. $T = \frac{2\sqrt{85}}{3}$ D. $T = 4\sqrt{13}$ [5]

HD: Đáp án B

Đặt $w = m + ni$

Ta có: $z_1 + z_2 = 3w + 2i - 3 = 3m - 3 + (3n + 2)i = -a$ là số thực do đó $n = \frac{-2}{3}$

Lại có $z_1 z_2 = \left(m + \frac{4i}{3}\right) \left(2m - 3 - \frac{4}{3}i\right) = b$ là số thực do đó

$$\frac{4}{3}(2m - 3) - \frac{4}{3}m = 0 \Rightarrow m = 3. \text{ Do đó } z_1 = 3 + \frac{4i}{3}; z_2 = 3 - \frac{4i}{3} \Rightarrow T = \frac{2\sqrt{97}}{3}$$

*** Bài tập tự luyện**¹⁴

¹³ Các ví dụ 13, 14 tác giả tham khảo tại TLTK số 5

¹⁴ Các bài tập từ bài 1 đến bài 8 được tác giả sưu tầm từ TLTK số 5

Bài 1. Trong các số phức z thỏa điều kiện : $|z - 3i| + |i\bar{z} + 3| = 10$, có 2 số phức z có mô đun nhỏ nhất. Tính tổng của 2 số phức đó.

- A. - 3. B. $4 + 4i$ C. $4 - 4i$ D. 0 [5]

Bài 2. Cho số phức z thỏa $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp số phức $w = \bar{z} + i$ là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

- A. $I(0;1)$ B. $I(0;-1)$ C. $I(-1;0)$ D. $I(1;0)$ [5]

Bài 3. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 5$ trên mặt phẳng tọa độ là một

- A. Đường thẳng B. Đường tròn
C. Elip D. Hypebol [5]

Bài 4. Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$

- A. $P = 4\sqrt{6}$ B. $P = 5 + 3\sqrt{5}$
C. $P = 2\sqrt{26}$ D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$ [5]

Bài 5. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm số phức z có mô đun nhỏ nhất

- A. $z = -1 + i$ B. $z = -2 + i$
C. $z = 2 + 2i$ D. $z = 3 + 2i$ [5]

Bài 6. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$

- A. $P = 1 - i$ B. $P = -1 - i$
C. $P = -1$ D. $P = 1 + i$ [5]

Bài 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

- A. $\sqrt{13} + 2$. B. 4. C. 6. D. $\sqrt{13} + 1$.
[5]

Bài 8. ¹⁵Cho số phức z , tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{-2 - 3i}{3 - 2i}z + 1\right| = 1$.

¹⁵ Các bài tập 8,9,10 được tác giả tham khảo từ TLTK số 5

- A. 3. B. 2. C. 1. D. $\sqrt{2}$. [5]

Bài 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1| = 2$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + 2i)z - i$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó?

- A. $I(-1; -2)$. B. $I(1; 2)$.
C. $I(-1; -3)$. D. $I(1; 3)$. [5]

Bài 10. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ là một đường tròn. Tìm bán kính của đường tròn đó?

- A. $r = 8$ B. $r = 4$ C. $r = 2\sqrt{2}$ D. $r = 2$ [5]

ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	B	C	C	C	C	D	D	C	B

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

1. Kết quả vận dụng của bản thân

Tác giả đã thực hiện việc áp dụng cách làm này trong năm học 2016-2017 đối với lớp 12C1. Kết quả thể hiện trong các bài kiểm tra về nội dung này như sau:

Bảng so sánh cụ thể:

Lớp	Số số	Kết quả bài kiểm tra TN về số phức				Ghi chú
		Điểm giỏi	Điểm khá	Điểm tr.b	Điểm yếu, kém	
12C1 (2016 – 2017)	40	14	14	6	6	Lớp Toán

Đây là nội dung hay và khó nên kết quả trên phản ánh khả năng vận dụng của học sinh phụ thuộc vào vốn kiến thức tích lũy của các em.

2. Triển khai trước tổ bộ môn

Tác giả đã đưa đề tài này ra tổ để trao đổi, thảo luận và rút kinh nghiệm. Đa số các đồng nghiệp trong tổ đã đánh giá cao và vận dụng có hiệu quả, tạo được hứng thú cho học sinh và giúp các em hiểu sâu, nắm vững hơn về bản chất vấn đề cũng như tạo thói quen sáng tạo trong nghiên cứu và học tập. Và cho đến nay, những kinh nghiệm của tôi đã được tổ thừa nhận là có tính thực tiễn và tính khả thi. Hiện nay, tôi tiếp tục xây dựng thêm nhiều ý tưởng để giúp học sinh trường THPT Nguyễn Xuân Nguyên học tập nội dung này một cách tốt nhất để đạt kết quả cao nhất trong các kì thi.

III. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận

- Trong dạy học giải bài tập toán nói chung và dạy học giải bài tập toán số phức nói riêng, việc xây dựng các bài toán riêng lẻ thành một hệ thống theo một trình tự logic có sự sắp đặt của phương pháp và quy trình giải toán sẽ giúp học sinh dễ dàng tiếp cận với nội dung bài học, đồng thời có thể phát triển tư duy học toán cũng như tạo ra niềm vui và sự hứng thú trong dạy và học toán.

- Đề tài có thể phát triển và xây dựng thành hệ thống các bài toán số phức giải quyết được nhờ kiến thức cơ bản về số phức và hình tọa độ phẳng của nó để thành sách tham khảo cho học sinh và giáo viên.

3.2. Kiến nghị

Trong dạy học giải bài tập toán, giáo viên cần xây dựng bài giảng thành hệ thống những bài tập có phương pháp và quy trình giải toán.

Khuyến khích học sinh xây dựng bài tập toán liên quan đến những dạng bài tập toán trong bài giảng.

Phát triển và nhân rộng những đề tài có ứng dụng thực tiễn cao, đồng thời viết thành những bộ sách tham khảo cho học sinh và giáo viên.

**XÁC NHẬN CỦA
HIỆU TRƯỞNG**

Thanh Hóa, ngày 29 tháng 5 năm 2017
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết,
không sao chép nội dung của người khác.
NGƯỜI THỰC HIỆN

Nguyễn Danh Thanh

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Nghị quyết Số: 29-NQ/TW, ngày 4 tháng 11 năm 2013
- [2]. SGK Giải tích 12_NXB Giáo dục.
- [3]. SGK hình học 10_ NXB Giáo dục.
- [4]. Đề minh họa THPT Quốc gia môn toán 2017 của Bộ.
- [5]. Tham khảo một số đề thi thử THPT Quốc gia 2017 của các Sở và các trường trên mạng internet
- Nguồn: <http://www.dethi.violet.vn>
 - Nguồn: <http://www.vnmath.com>
 - Nguồn: <http://www.tintuyensinh247>

DANH MỤC CÁC ĐỀ TÀI ĐÃ ĐƯỢC XẾP LOẠI CẤP NGÀNH

Năm học	Nội dung đề tài	Xếp loại cấp Sở	Ghi chú
2010-2011	<i>“Hướng dẫn học sinh sử dụng phương pháp tọa độ để giải toán hình”</i>	C	
2014- 2015	<i>“Vận dụng tính chất hình học giải một số bài toán khó về tọa độ trong mặt phẳng ”.</i>	B	