**ĐỀ 05**

**Bài 1.** (4 điểm)

1. Cho biểu thức A = $\frac{x^{2}-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{x^{2}+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn B = 1 - $\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với 0 $\leq x\leq \frac{1}{4}$
2. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn x - 2y + z = 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$$

**Bài 2.** (6 điểm)

1. Giải phương trình 3$x^{2}+6=9x-2x\sqrt{x-2}$
2. Giải phương trình (x - 2)$\sqrt{x-1}+(x+3)\sqrt{x+4}=x^{2}+x$
3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^{2}+7y^{2}=61+4x$
4. Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn a > b và $a^{2}+b^{2}+1=2(ab+a+b).$ Chứng minh a, b là hai số chính phương liên tiếp.

**Bài 3.** (2 điểm)

1. Cho a, b $\geq 0, ab=1. $Chứng minh rằng:

$\sqrt{2\left(a^{2}+1\right)}+\sqrt{2\left(b^{2}+1\right)} \leq $2(a + b)

1. Cho ba số không âm a, b, c. Chứng minh rằng:

$$a^{3}+b^{3}+c^{3}\geq 3abc+\frac{9}{4}\left|\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)\right|$$

**Bài 4.** (7 điểm) Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH. Gọi E, F là các điểm lần lượt thuộc các tia HC, HB sao cho $∠$EAB = $∠$FAC = 90$°.$

1. Chứng minh $\frac{HB}{HC}=\frac{HF}{HE}=\frac{FB}{CE}$
2. Gọi P thuộc đoạn thẳng AH (P $\ne $ A; P $\ne $ H ). Trên tia đối của tia PE lấy điểm M sao cho BM = BA. Trên tia đối của tia PF lấy N sao cho CN = CA. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với PF cắt đường thẳng AH tại K. Chứng minh BP $⊥$ KE .
3. Các đường thẳng BM, CN cắt nhau tại S. Chứng minh SM = SN.

**Bài 5.** (1 điểm) Cho năm số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

**--- Hết ---**

**LỜI GIẢI**

**Bài 1.**

1. Rút gọn A = 2x

Thay vào

B = 1 - $\sqrt{4x-4\sqrt{x}+1}$

= 1 - $\left|2\sqrt{x}-1\right|$

= 1 - (1 - $2\sqrt{x}$)

= $2\sqrt{x}$

1. Ta có 2y = x + z

$$⟺ (x+z)+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=2y+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$$

$⟺\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}+2\sqrt{y}\right)$($\sqrt{x}+\sqrt{z}$) = 2$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{y}+\sqrt{z})$

$$⟺\frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}+2\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{y}+\sqrt{z})}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$$

$$⟺\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$$

**Bài 2.**

1. ĐKXĐ: x $\geq 2$

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^{2}-8x+4=x^{2}-2x\sqrt{x-2}+x-2$$

$$⟺\left(2x-2\right)^{2}=(x-\sqrt{x-2})^{2}$$

$$⟺\left[\begin{array}{c}2x-2=x-\sqrt{x-2}\\2x-2=\sqrt{x-2} -x\end{array}\right.$$

$$⟺\left[\begin{array}{c}x-2=-\sqrt{x-2} (1)\\3x-2=\sqrt{x-2} (2)\end{array}\right.$$

Với x $\geq 2$, VT(1) $\geq $ 0 $\geq $ VP(1)

Để (1) xảy ra thì x = 2

Phương trình (2) tương đương với

3(x - 2) - $\sqrt{x-2}$ + 4 = 0 $⟺3\left(\sqrt{x-2}-1\right)^{2}+5\sqrt{x-2}$ + 1 = 0

(vô nghiệm vì vế trái dương với mọi x $\geq 2$)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: S = $\left\{2\right\}$

1. ĐK x $\geq $ 1
2. $⟺$ (x - 2) $\left(\sqrt{x-1}-2\right)+(x+3)\left(\sqrt{x+4}-3\right)=x^{2}-4x-5$

$$⟺\frac{ (x - 2) (x - 5)}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{(x - 5)(x+3)}{\sqrt{x+4}+3}=(x - 5)(x+1)$$

$$⟺(x - 5)\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}-x-1\right)=0$$

$$⟺\left[\begin{array}{c}x=5\\\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}=x+1 (2)\end{array}\right.$$

Ta có $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}<\frac{x-1}{\sqrt{x-1}+2}\leq \frac{x-1}{2}; \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}$ $\leq $ $\frac{x+3}{3}$

Suy ra VT(2) < $\frac{x-1}{2}$ + $\frac{x+3}{3}$ = $\frac{5x+3}{6}<\frac{6x+6}{6}=x+1=VP(2)$

Do đó (2) vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: S = $\left\{5\right\}$

1. $2x^{2}+7y^{2}=61+4x$

$⟺2\left(x-1\right)^{2}+7y^{2}$ = 63

$⟺ 7y^{2}\leq $ 63 => $y^{2}\leq $ 9

=> $y^{2}$ $\in \left\{0;1;4;9\right\}$

Mà 65 lẻ, $2\left(x-1\right)^{2}$ chẵn nên => $y^{2}$ $\in \left\{1;9\right\}$

TH1: $y^{2}$ = 1 => $\left(x-1\right)^{2}$ = 28 (loại)

TH2: $y^{2}$ = 9 => $\left(x-1\right)^{2}$ = 0 => y = $\pm 3; x=1$

Vậy (x;y) $\in \left\{\left(1;3\right);\left(1;-3\right)\right\}$

1. $a^{2}+b^{2}+1=2(ab+a+b)$ $⟺\left(a-b-1\right)^{2}= 4a ⟺$ a = $\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^{2}$

$ a^{2}+b^{2}+1=2(ab+a+b)$ $⟺$ b = $\left(\frac{a-b+1}{2}\right)^{2}$

Suy ra a, b đều chính phương. Lại có $\frac{a-b+1}{2}$ - $\frac{a-b-1}{2}$ = 1 nên a, b là hai số chính phương liên tiếp.

**Bài 3.**

1. Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\sqrt{2\left(a^{2}+1\right)} = \sqrt{2\left(a^{2}+ab\right)}=\sqrt{2\left(a+b\right)a}=\sqrt{2a\left(a+b\right)}\leq \frac{2a+a+b}{2}=\frac{3a}{2}+\frac{b}{2} $$

Tương tự, ta có $\sqrt{2\left(b^{2}+1\right)}=\frac{a}{2}+\frac{3b}{2}$

Do đó $\sqrt{2\left(a^{2}+1\right)}$ + $\sqrt{2\left(b^{2}+1\right)}$ $\leq $ 2a + 2b = 2(a+b). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = 1.

1. Ta có $\left|a-b\right|$ $\leq $ $\left|a\right|$+$\left|b\right|$ = a + b.

Tương tự $\left|b-c\right|\leq \left|b\right|$+$\left|c\right| $= b + c; $\left|c-a\right|\leq \left|c\right|$+$\left|a\right|$ = c + a.

Suy ra 2(a+b+c)$ \geq \left|a-b\right|$+$\left|b-c\right|$+$\left|c-a\right|\geq 3\sqrt[3]{\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|}$

(Theo BĐT Cô Si cho ba số không âm $\left|a-b\right|,\left|b-c\right|,\left|c-a\right|$) (1)

Lại có:

2($a^{2}+b^{2}+c^{2}-ab-bc-ca$) = ($a-b)^{2}$+ ($b-c)^{2}$+ ($c-a)^{2}$

$\geq $ 3$\sqrt[3]{(a-b)^{2}(b-c)^{2}(c-a)^{2}}$

(Theo BĐT Cô Si cho ba số không âm ($a-b)^{2}$, ($b-c)^{2}$, ($c-a)^{2}$ (2)

Nhân theo vế (1) và (2) suy ra

4$\left(a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc\right) \geq $9$\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$

=> $a^{3}+b^{3}+c^{3}$ $\geq $ $3abc$ + $\frac{9}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c

**Bài 4.**

****

1. Xét tam giác ABE vuông tại A, đường cao AH: HB.HE = $AH^{2}$

Xét tam giác ACF vuông tại A, đường cao AH: HC.HF = $AH^{2}$

Từ đây ta suy ra HB.HE = HC.HF

=> $\frac{HB}{HC}=\frac{HF}{HE}=\frac{HF-HB}{HE-HC}=\frac{FB}{CE}$

1. Gọi J là giao điểm của KB và EM; I là giao điểm của KC và FN.

Xét tam giác KFC: KH, FI là các đường cao nên P là trực tâm.

Khi đó $∆HPF\~∆H$KC (g.g) => HP.HK = HF.HC

Lại có HF.HC = HE.HB => HP.HK = HE.HB => $∆HBK\~∆$HPE (c.g.c)

=> $∠$KBH = $∠$HPE => $∠$JKP + $∠$KPJ = $∠$JKP + $∠$KBH = 90$°$ => EJ $⊥BK$

Suy ra P cũng là trực tâm tam giác KBE.

Do đó BP $⊥$ KE

1. Ta có BM = BA => $BM^{2}=BA^{2}=BH.BC=BJ.BK=>BM⊥$MK

=> $KM^{2}=KJ.KB=KI.KC=KN^{2}$

=> $KS^{2}-KM^{2}=KS^{2}-KN^{2}=>MS=NS$

**Bài 5.**

Theo nguyên lí Đi rích lê, 5 = 2.2 + 1 nên trong năm số có ba chữ số có lũy thừa của 3 cùng tính chẵn lẻ.

Vì 3 = 2.1 + 1 nên trong ba số này lại có hai số mà lũy thừa của 2 cùng tính chẵn lẻ.

Khi đó hai số này có tổng lũy thừa của 2 hay 3 đều chẵn nên tích là số chính phương. Từ đó ta có điều phải chứng minh.