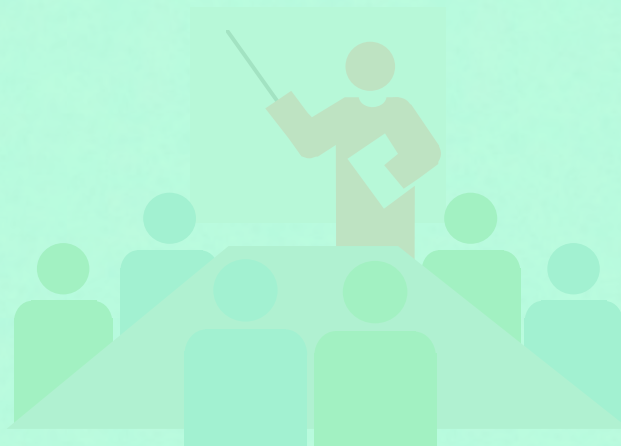


SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT NGUYỄN GIA THIỀU



Sáng kiến kinh nghiệm:

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

GIÁO VIÊN : NGUYỄN QUỐC HOÀN
TỔ : TOÁN

HÀ NỘI, 5 / 2011

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT NGUYỄN GIA THIỀU

Sáng kiến kinh nghiệm:

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

GIÁO VIÊN : NGUYỄN QUỐC HOÀN
TỔ : TOÁN

HÀ NỘI, 5 / 2011

MỞ ĐẦU

Giải phương trình là bài toán có nhiều dạng và giải rất linh hoạt, với nhiều học sinh kể cả học sinh giỏi cho là khá giỏi nhiều khi còn lúng túng trước việc giải một phương trình; trong đó có phương trình chứa căn thức được coi là khó hơn cả. Nên tôi chọn đề tài: “**Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ**” để làm sáng kiến kinh nghiệm. Với mục đích mong muốn đề tài này sẽ góp phần giúp học sinh có thêm những kỹ năng cần thiết để giải phương trình chứa căn thức nói riêng và các dạng phương trình nói chung, đồng thời cũng mong muốn đây là tài liệu tham khảo bổ ích cho những ai quan tâm đến môn toán.

Kiến thức thể hiện trong sáng kiến kinh nghiệm này hoàn toàn trong chương trình Toán bậc THPT hiện hành. Một phần sáng kiến kinh nghiệm này có thể sử dụng để chuyển sang phần bất phương trình cũng được; xong khi chuyển sang bất phương trình có những phần sẽ được mở rộng để có bài toán hay hơn. Do đó người nghiên cứu có thể sử dụng sáng kiến kinh nghiệm này vào nhiều mục đích giáo dục khác nhau cũng được.

Nội dung sáng kiến kinh nghiệm này gồm có 9 phương pháp giải toán khác nhau.

Sáng kiến kinh nghiệm: Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ**Bài toán mở đầu**

Giải phương trình $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$ (*)

(Trích ĐH QGHN, khối A năm 2000)

GiảiĐiều kiện $0 \leq x \leq 1$ *** Cách 1:**

$$\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{x - x^2}\right)^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{1 - x})^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{4}{3}\sqrt{x - x^2} + \frac{4}{9}(x - x^2) = x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - x} + 1 - x$$

$$\Leftrightarrow 4(x - x^2) - 6\sqrt{x - x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x - x^2}(2\sqrt{x - x^2} - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - x^2} = 0 \\ \sqrt{x - x^2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ 4x - 4x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ 4x^2 - 4x + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

 $x = 0, x = 1$ thoả mãn điều kiệnVậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0, x = 1$.*** Cách 2:**Nhận xét: $\sqrt{x - x^2}$ được biểu diễn qua $\sqrt{x}$ và $\sqrt{1 - x}$ nhờ vào đẳng thức

$$(\sqrt{x} + \sqrt{1 - x})^2 = 1 + 2\sqrt{x - x^2}$$

Vậy có cách 2

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}, \quad 1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-x^2} = \frac{t^2-1}{2}.$$

Phương trình (*) trở thành

$$1 + \frac{t^2-1}{3} = t \Leftrightarrow t^2 - 1 + 3 = 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$t = 2$, không thỏa mãn

$$t = 1, \text{ có } \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$x = 0, x = 1$ thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0, x = 1$.

*** Cách 3:**

Nhận xét: $\sqrt{x}$ và $\sqrt{1-x}$ có mối quan hệ đặc biệt, cụ thể $(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 1$

Vậy ta có cách 3

Từ (*) ta có $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} - 3\sqrt{1-x} = 3\sqrt{x} - 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \frac{3\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-3} \quad (x \neq \frac{9}{4} \text{ vì thay } x = \frac{9}{4} \text{ vào phương trình không thỏa mãn})$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x}, \text{ nên } \sqrt{1-x} = \frac{3t-3}{2t-3}$$

$$\text{Lại có } (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 1, \text{ nên } t^2 + \left(\frac{3t-3}{2t-3}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow t^2(4t^2 - 12t + 9) + 9t^2 - 18t + 9 = 4t^2 - 12t + 9$$

$$\Leftrightarrow 4t^4 - 12t^3 + 14t^2 - 6t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(2t^3 - 6t^2 + 7t - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t-1)(2t^2 - 4t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$x = 0, x = 1$ thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0, x = 1$.

*** Cách 4:**

Cùng nhận xét trên, ta có thêm cách khác

Đặt $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{1-x}$, $a \geq 0, b \geq 0$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 1 + \frac{2}{3}ab = a + b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2ab = 3(a + b) & (1) \\ (a + b)^2 - 2ab = 1 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) có

$$(a+b)^2 - [3(a+b) - 3] = 1 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 3(a+b) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a+b=2 \end{cases}$$

$$\text{Với } a+b=1, \text{ có } a.b=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Với $a+b=2$, có $a.b=\frac{3}{2}$, không tồn tại a, b (Vì $4=2^2 \leq 4.\frac{3}{2}=6$)

$x=0, x=1$ thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0, x=1$.

Nhận xét: bản chất của cách giải này vẫn là cách đặt ẩn phụ ở cách 3.

*** Cách 5:**

Cũng nhờ $(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 1$, ta nghĩ đến đẳng thức $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

Ta có thêm cách sau:

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = \sin a, \quad 0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Phương trình (*) trở thành } 1 + \frac{2}{3} \sin a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sin a + \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2 \sin a \cdot \cos a = 3 \sin a + 3 \cos a \quad (\text{Vì } \cos a \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\sin a + \cos a)^2 - 3(\sin a + \cos a) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a + \cos a = 1 \\ \sin a + \cos a = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin a + \cos a = 1 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} - 2 \sin^2 \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{a}{2} \left(\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{a}{2} = 0 \\ \tan \frac{a}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 0 \\ \sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$x=0, x=1$ thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0, x=1$.

Qua ví dụ trên ta thấy có rất nhiều cách khác nhau để giải một phương trình vô tỉ. Tuy nhiên các cách đó đều dựa trên cơ sở là loại bỏ căn thức và đưa về phương trình đơn giản hơn mà ta đã biết cách giải. Sau đây tôi xin đi vào một số phương pháp cụ thể.

Phương pháp 1: Phương pháp biến đổi tương đương**Bài toán 1:** Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x+17}=1-3x$ (1)

2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{3-3x}=-2$ (2)

3) $\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^3+2x+1}=x+1$ (3)

4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+8x+7}$ (4)

5) $\sqrt[3]{12x-12}-\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{x}$ (5)

6) $\sqrt{x+2}+2=x^2$. (6)

Bài toán 2: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2-2mx+2}=m$ (I), có nghiệm.**Bài toán 3:** Tìm m để phương trình $\sqrt{2x+m}=x+2$ (II), có hai nghiệm phân biệt.**Bài toán 4:** Giải các phương trình

1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-2x}=\sqrt{2x}+\sqrt{7-3x}$ (1)

2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$ (2)

3) $\sqrt{x}+\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x-1}$ (3)

4) $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}}+\sqrt{\frac{x^3+1}{4x-1}}$ (4)

5) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x+5}=\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{2x+6}$. (5)

Giải**Bài toán 1**

1) *Nhận xét:* ta thấy vế trái luôn không âm, do đó nếu vế phải âm thì phương trình vô nghiệm, nên ta chỉ cần giải phương trình khi vế phải không âm, tức là $1-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$. Khi đó hai vế đều không âm và bình phương hai vế ta được

phương trình tương đương: $x+17=(1+3x)^2$ với $x \leq \frac{1}{3}$. Do vậy ta không cần đặt điều kiện cho $x+17 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3x \geq 0 \\ x+17=(1-3x)^2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ x+17=1-6x+9x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2-7x-16=0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{16}{9} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x=-1$.

Chú ý: Dạng tổng quát của phương trình trên là $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Ta làm như sau

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Bài toán này có thể giải bằng cách đặt ẩn phụ $t = \sqrt{x+17}$ với $t \geq 0$.

2) Điều kiện $-3 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x+3} + 2 &= \sqrt{3-3x} & \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} + 2)^2 &= (\sqrt{3-3x})^2 \\ \Leftrightarrow x+3+4\sqrt{x+3}+4 &= 3-3x & \Leftrightarrow \sqrt{x+3} &= -x-1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ x+3 = (-x-1)^2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x+3 = x^2+2x+1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases} & \Leftrightarrow x=-2, \text{ thỏa mãn điều kiện} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = -2$.

$$\begin{aligned} 3) \quad \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+5x+\sqrt{x^3+2x+1} = (x+1)^2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x^3+2x+1} = 1-3x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 1-3x \geq 0 \\ x^3+2x+1 = (1-3x)^2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ x^3+2x+1 = 1-6x+9x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ x^3-9x^2+8x=0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ x(x^2-9x+8)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ x=0 \\ x=1 \\ x=8 \end{cases} & \Leftrightarrow x=0, \text{ thỏa mãn điều kiện} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 0$.

Chú ý:

Trong bài này ta không cần đặt điều kiện $\begin{cases} x^2+5x+\sqrt{x^3+2x+1} \geq 0 \\ x^3+2x+1 \geq 0 \end{cases}$.

4) Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -7 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 3x + 2} \right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 8x + 7} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + x^2 + 3x + 2 + 2\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{x^2 + 3x + 2} = x^2 + 8x + 7$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(x-1)} \cdot \sqrt{(x+1)(x+2)} = -x^2 + 5x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)^2(x-1)(x+2)} = (x+1)(6-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 6 \\ 4(x+1)^2(x^2 + x - 2) = (x+1)^2(6-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 6 \\ (x+1)^2(4x^2 + 4x - 8 - x^2 + 12x - 36) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 6 \\ \begin{cases} x = -1 \\ 3x^2 + 16x - 44 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 6 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -\frac{22}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$x = -1, x = 2$ thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1, x = 2$.

Chú ý : Bài này có thể giải bằng cách như sau

$$\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \sqrt{(x+1)(x-1)} + \sqrt{(x+1)(x+2)} = \sqrt{(x+1)(x+7)}$$

* Trường hợp 1: $x = -1$, thỏa mãn phương trình (4)

* Trường hợp 2: $x \geq 1$, phương trình (4) trở thành

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+7} \quad \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \right)^2 = \left(\sqrt{x+7} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x-1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{x+2} + x+2 = x+7 \quad \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x-2} = 6-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 4(x^2+x-2) = (6-x)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ 3x^2+16x-44=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x = 2 \\ x = -\frac{22}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = 2$$

$x = 2$, thỏa mãn điều kiện trường hợp 2

* Trường hợp 3: $x \leq -7$, phương trình (4) trở thành

$$\sqrt{(1-x)(-1-x)} + \sqrt{(-1-x)(-2-x)} = \sqrt{(1-x)(-7-x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{-2-x} = \sqrt{-7-x} \quad \Leftrightarrow (\sqrt{1-x} + \sqrt{-2-x})^2 = (\sqrt{-7-x})^2$$

$$\Leftrightarrow 1-x + 2\sqrt{1-x}\sqrt{-2-x} - 2-x = -7-x \quad \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}\sqrt{-2-x} + 6-x = 0$$

Phương trình vô nghiệm (Vì $2\sqrt{1-x}\sqrt{-2-x} + 6-x > 0, \forall x \leq -7$).

* Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1, x = 2$.

Nhận xét: Khi giải bằng cách này thường mắc sai lầm: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ khi $a \geq 0$ và $b \geq 0$

Còn $\sqrt{ab} = \sqrt{-a}\sqrt{-b}$ khi $a \leq 0$ và $b \leq 0$.

$$\begin{aligned} 5) & \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{12x-12} - \sqrt[3]{2x-3} \right)^3 = \left(\sqrt[3]{x} \right)^3 \\ & \Leftrightarrow 12x-12 - (2x-3) - 3\sqrt[3]{12x-12} \cdot \sqrt[3]{2x-3} \cdot \left(\sqrt[3]{12x-12} - \sqrt[3]{2x-3} \right) = x \\ & \Leftrightarrow \sqrt[3]{12x-12} \cdot \sqrt[3]{2x-3} \cdot \left(\sqrt[3]{12x-12} - \sqrt[3]{2x-3} \right) = 3(x-1) \\ & \Rightarrow \sqrt[3]{12(x-1)} \cdot \sqrt[3]{2x-3} \cdot \sqrt[3]{x} = 3(x-1) \quad (5^*) \\ & \Leftrightarrow 12(x-1)(2x-3)x = 27(x-1)^3 \\ & \Leftrightarrow (x-1)[4(2x^2-3x) - 9(x^2-2x+1)] = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1)(-x^2+6x-9) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ -x^2+6x-9=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Thay $x = 1, x = 3$ vào phương trình (5) đều thỏa mãn

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1, x = 3$.

Chú ý: Ở (5*) là không tương đương, (5*) là phương trình hệ quả của phương trình (5). Do đó nghiệm của phương trình (5*) phải được thay vào phương trình (5) để kiểm tra lại.

Với dạng tổng quát $\sqrt[3]{\alpha} \pm \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{\gamma}$ ta lập phương hai vế và sử dụng hằng đẳng thức $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$ để giải như bài trên.

6) Điều kiện $x \geq -2$

$$\stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} (x+2) + \sqrt{x+2} + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2} + \frac{1}{2} \right)^2 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} & (6.1) \\ \sqrt{x+2} + \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} & (6.2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} & (6.1) \\ \sqrt{x+2} + \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} & (6.2) \end{cases}$$

$$\stackrel{(6.1)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

$$\stackrel{(6.2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x+2} = -x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ x+2 = (-x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x+2 = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2, x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Chú ý: Có thể đưa về dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ và giải bằng cách bình phương hai vế, dẫn đến phương trình bậc bốn (nhắm được nghiệm $x = -1, x = 2$) và tìm được nghiệm của phương trình.

Ngoài ra còn cách nữa là phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình (tôi xin trình bày ở phương pháp 5).

Bài toán 2

*) Nếu $m < 0$ thì phương trình (I) vô nghiệm

*) Nếu $m \geq 0$ thì:

$$\stackrel{(I)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} m \geq 0 \\ x^2 - 2mx + 2 = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ x^2 - 2mx + 2 - m^2 = 0 \end{cases} \quad (I^*)$$

$$(I^*) \text{ có nghiệm khi } \Delta' = m^2 - 2 + m^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases} \Rightarrow m \geq 1 \text{ (thỏa mãn } m \geq 0)$$

Kết luận: $m \geq 1$ thì phương trình (I) có nghiệm.

Bài toán 3

$$\stackrel{(II)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x+m = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x+m = x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+2x+4 = m \end{cases} \quad (II^*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 4$, $x \in [-2; +\infty)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x)$				

Số nghiệm phương trình (II) bằng số nghiệm phương trình (II*) với $x \geq -2$
 Vậy phương trình (II) có hai nghiệm phân biệt khi $3 < m \leq 4$.

Bài toán 4

1) Điều kiện $0 \leq x \leq \frac{7}{3}$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (\sqrt{x+2} + \sqrt{5-2x})^2 = (\sqrt{2x} + \sqrt{7-3x})^2 \\ &\Leftrightarrow x+2+5-2x+2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{5-2x} = 2x+7-3x+2\sqrt{2x}\cdot\sqrt{7-3x} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+2}\cdot\sqrt{5-2x} = \sqrt{2x}\cdot\sqrt{7-3x} \\ &\Leftrightarrow (x+2)(5-2x) = 2x(7-3x) \\ &\Leftrightarrow -2x^2+x+10 = -6x^2+14x \\ &\Leftrightarrow 4x^2-13x+10=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{5}{4} \end{cases} \quad (\text{Thoả mãn điều kiện}) \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{5}{4}$, $x = 2$.

Chú ý: ta giải bằng cách trên vì có $x+2+5-2x = 2x+7-3x$

Dạng tổng quát của phương trình trên là

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}, \text{ với } f(x) + g(x) = h(x) + k(x)$$

Được giải bằng cách: tìm điều kiện xác định cho phương trình sau đó bình phương hai vế và giải tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện.

2) Điều kiện $x \geq 0$

$$\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x+3} - 2\sqrt{x} = \sqrt{2x+2} - \sqrt{3x+1}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{2x+2} - \sqrt{3x+1})^2 \quad (2^*)$$

$$\Leftrightarrow x+3+4x-4\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x} = 2x+2+3x+1-2\sqrt{2x+2}\cdot\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+3} = \sqrt{2x+2}\cdot\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 4x(x+3) = (2x+2)(3x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x = 6x^2 + 8x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

Thay $x=1$ vào phương trình (2) thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Chú ý:

Ta giải bằng cách trên vì có: $x+3+4x=2x+2+3x+1$

Biến đổi về (2*) là dẫn đến phương trình hệ quả, nên tìm được nghiệm (2*) ta phải thay vào phương trình (2) xem có thỏa mãn hay không.

Dạng tổng quát của phương trình trên là

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{k(x)} + \sqrt{h(x)}, \text{ với } f(x) + h(x) = g(x) + k(x)$$

Được giải bằng cách đưa về phương trình $\sqrt{f(x)} - \sqrt{h(x)} = \sqrt{k(x)} - \sqrt{g(x)}$, sau đó bình phương và giải phương trình hệ quả.

3) Điều kiện $x > 0$

$$\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^3+1}{x}} \right)^2 = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x^3+1}{x} + 2\sqrt{x^3+1} = x+1 + x^2-x+1 + 2\sqrt{x^3+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x} + x = x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 1 + x^2 = x^3 + 2x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x=1 \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

Chú ý:

$$\text{Ta giải bằng cách trên vì có: } \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{x^3+1}{x}} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x^2-x+1}$$

Dạng tổng quát của phương trình trên là

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{k(x)} + \sqrt{h(x)}, \text{ với } f(x) \cdot g(x) = h(x) \cdot k(x)$$

Được giải bằng cách tìm điều kiện xác định cho phương trình, sau đó bình phương hai vế và tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện.

4) Điều kiện $x > 1$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \sqrt{4x+1} - \sqrt{\frac{x^3+1}{4x+1}} = \sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}} - \sqrt{x-1} \\
 &\Rightarrow \left(\sqrt{4x+1} - \sqrt{\frac{x^3+1}{4x+1}} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}} - \sqrt{x-1} \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow 4x+1 + \frac{x^3+1}{4x+1} - 2\sqrt{x^3+1} = \frac{x^3+1}{x-1} + x-1 - 2\sqrt{x^3+1} \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^3+1}{4x+1} - \frac{x^3+1}{x-1} + (4x+1) - (x-1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (3x+2) \left[\frac{-x^3-1+4x^2-3x-1}{(4x+1)(x-1)} \right] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (3x+2)(x^3-4x^2+3x+2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (3x+2)(x-2)(x^2-2x-1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{3} \\ x = 2 \\ x = 1+\sqrt{2} \\ x = 1-\sqrt{2} \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1+\sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{Thoả mãn điều kiện } x > 1)
 \end{aligned}$$

Thay $x = 2$, $x = 1 + \sqrt{2}$ vào phương trình (4) thấy thỏa mãn
 Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2$, $x = 1 + \sqrt{2}$.

Chú ý:

Ta giải bằng cách trên vì: $\sqrt{4x+1} \cdot \sqrt{\frac{x^3+1}{4x+1}} = \sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}} \cdot \sqrt{x-1}$

Tuy nhiên ta vẫn có thể giải bằng cách: Đặt nhân tử chung $\sqrt{x^3+1}$ ở vế phải ra, sau đó quy đồng tiếp sẽ có nhân tử $(\sqrt{x-1} + \sqrt{4x+1})$, cách này có thể sẽ ngắn hơn cách giải trên. Nhưng cách giải trên đã áp dụng dạng tổng quát của phương trình: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}$. Trong đó: $f(x).h(x) = k(x).g(x)$

Được giải bằng cách đưa về phương trình:

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{h(x)} = \sqrt{k(x)} - \sqrt{g(x)}$$

Sau đó bình phương và giải phương trình hệ quả.

$$5) \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5} \right)^3 = \left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+6} \right)^3$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x+3x+5+3\sqrt[3]{x(3x+5)} \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5}) \\
&\qquad\qquad\qquad = 2x-1+2x+6+3\sqrt[3]{(2x-1)(2x+6)}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+6}) \\
&\Leftrightarrow \sqrt[3]{x(3x+5)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5}) = \sqrt[3]{(2x-1)(2x+6)}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+6}) \\
&\Rightarrow \sqrt[3]{x(3x+5)}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+6}) = \sqrt[3]{(2x-1)(2x+6)}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+6}) \quad (5^*) \\
&\Leftrightarrow \sqrt[3]{x(3x+5)} = \sqrt[3]{(2x-1)(2x+6)} \\
&\qquad\qquad\qquad (\text{Vì: } 2x+6 > 2x-1 \Rightarrow \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt[3]{2x-1} \neq 0) \\
&\Leftrightarrow x(3x+5) = (2x-1)(2x+6) \\
&\Leftrightarrow 3x^2 + 5x = 4x^2 + 10x - 6 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-6 \end{cases}
\end{aligned}$$

Thay $x=-6$, $x=1$ vào phương trình (5) thỏa mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-6$, $x=1$.

Chú ý: Phương pháp tương tự như các bài toán trên. Ở (5*) là ta đã sử dụng từ phương trình đề bài, tức là đã dẫn đến hệ, nên (5*) không tương đương với (5).

Thật vậy, nếu ta thay $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5})$ chứ không thay như bài giải vừa rồi, sẽ tìm được nghiệm $x = -\frac{5}{2}$ nhưng nghiệm này không thỏa mãn phương trình (5).

Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình

- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{x^2 + x - 2}$ | 2) $\sqrt{x^4 - 3x + 2} = x^2 - 1$ |
| 3) $\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + 1 = 2x$ | 4) $\sqrt{x^3 - x + 1} + 1 = 2x$ |
| 5) $\sqrt{2x^4 - 5x^2 + 3} = x^2 - 1$ | 6) $\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = x + 1$ |
| 7) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + 2 = 2x$ | 8) $\sqrt{x^3 + x^2 - 1} + 1 = 2x$ |
| 9) $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$ | 10) $x^2 + x + 1 = \sqrt{5x^2 + 8x - 4}$ |
| 11) $\sqrt{4 - 3\sqrt{10-3x}} = x - 2$ | (HSG Quốc Gia 2000) |
| 12) $x^2 - x + 1 = \sqrt{5x^2 - 8x - 4}$ | 13) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} = 3$ |
| 14) $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = x$ | 15) $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 2$ |
| 16) $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2$ | 17) $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} + 6\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = 5$ |
| 18) $\sqrt{x^2 - 4x - 12} + \sqrt{x^2 - x - 6} = x + 2$ | 19) $\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2x^2 - 1} = x + 1$ |

- 20) $\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} = 1$ 21) $\sqrt{1 - 3x} + \sqrt{2x + 3} = 3\sqrt{x + 2}$
 22) $\sqrt{3 + 3x} - 2\sqrt{4 - x} = \sqrt{x - 2}$ 23) $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{3 - x} = x$
 24) $\sqrt{2x^2 + 1} + 2\sqrt{x + 1} = \sqrt{2x^2 + x + 9}$ 25) $\sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[3]{1 + x} = -1$
 26) $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{5 - 2x} = \sqrt{-4x^2 + 16x - 15} + 1$
 27) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{x^2 + x - 2} + 1$ 28) $\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{1 + 2x} = 2 - x^2$
 29) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x + 5} = \sqrt{3 - 3x} - \sqrt{5 - 2x}$
 30) $\sqrt{\frac{x^3 + 1}{x + 3}} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x + 3}$
 31) $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = \sqrt{4x^2 - 18x + 18}$
 32) $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$ (ĐH BK HN 2001).

Bài 2: Tìm m để phương trình: $\sqrt{2x^2 + mx - 3} = x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3: Tìm m để phương trình: $\sqrt{2x^2 - mx} = \sqrt{x^2 - 4}$ có nghiệm.

Phương pháp 2: Phương pháp đặt ẩn phụ**I. Bài toán 1:** Dạng $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0, a \neq 0$ Phương pháp chung là đặt $t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0$

1) Cho phương trình: $(x+1)(x+3) - 6\sqrt{(x-1)(x+5)} + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình với $m = 0$ b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

2) Giải phương trình: $\sqrt{x-2} = \sqrt{x^2-8x-2} - \sqrt{x-8}$ (2).

II. Bài toán 2:

Dạng $a[\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}] + b\sqrt{f(x).g(x)} + c[f(x) + g(x)] + d = 0$
(Với $abc \neq 0$)

Phương pháp chung là đặt $t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$

1) Cho phương trình: $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{x-x^2} = m$ (3)

a) Giải phương trình với $m = 1$ b) Tìm m để phương trình vô nghiệm.

2) Cho phương trình: $2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} + x + \sqrt{x^2-x-2} = m$ (4)

a) Giải phương trình với $m = 11$ b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

3) Giải phương trình: $x\sqrt[3]{35-x^3} \left(x + \sqrt[3]{35-x^3} \right) = 30$ (5).

III. Bài toán 3: Đặt ẩn phụ đưa về dạng phương trình thuần nhất

Giải các phương trình:

1) $3\sqrt{1-x^3} = 2x^2 + 4x$ (6) (HSG Toán 10, NGT 2007)

2) $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$ (7)

3) $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}$ (8)

4) $\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$ (9)

IV. Bài toán 4: Dạng $af(x) + b.g(x).\sqrt{f(x)} + c.h(x) = 0, abc \neq 0$

Giải các phương trình:

1) $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$ (10)

2) $4\sqrt{x+1} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$ (11)

3) $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$ (12).

Giải**I. Bài toán 1:**

1) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -5 \end{cases}$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 + 4x - 6\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 3 + m = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$, $t \geq 0$

$$\Leftrightarrow t^2 = x^2 + 4x - 5$$

Phương trình (1) trở thành: $t^2 + 5 - 6t + m + 3 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 6t - 8 = m$ (1.1)

a) $m = 0$: $\stackrel{(1.1)}{\Leftrightarrow} t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$

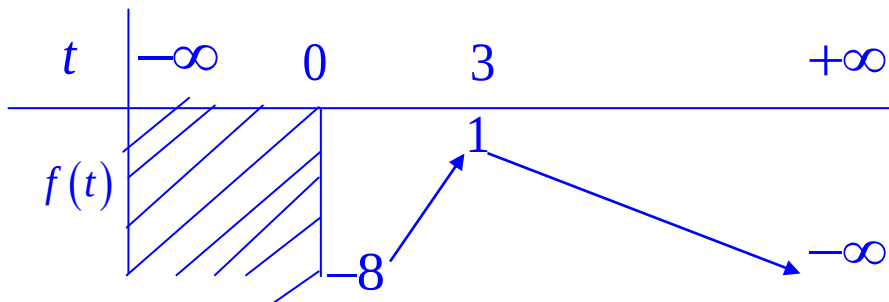
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x - 5} = 2 \\ \sqrt{x^2 + 4x - 5} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 4 \\ x^2 + 4x - 5 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 9 = 0 \\ x^2 + 4x - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \pm \sqrt{13} \\ x = -7 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy với $m = 0$, phương trình có bốn nghiệm: $x = -7$, $x = 3$, $x = -2 \pm \sqrt{13}$.

b) Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (1.1) có nghiệm $t \geq 0$

Gọi $f(t) = -t^2 + 6t - 8$ với $t \in (0; +\infty)$

Bảng biến thiên:



$$\Rightarrow f(t) \leq 1, \forall t \geq 0$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi $m \leq 1$.

2) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 8 \\ x^2 - 8x - 2 \geq 0 \end{cases}$

$$\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x-2} + \sqrt{x-8} = \sqrt{x^2 - 8x - 2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} + \sqrt{x-8})^2 = (\sqrt{x^2 - 8x - 2})^2$$

$$\Leftrightarrow x - 2 + x - 8 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{x-8} = x^2 - 8x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 2\sqrt{x^2 - 10x + 16} + 8 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 10x + 16}$, $t \geq 0$

$$\Leftrightarrow t^2 = x^2 - 10x + 16$$

Phương trình (2) trở thành: $t^2 - 16 - 2t + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2 \end{cases}$$

$t = -2$, loại

$$t = 4, \text{ có } \sqrt{x^2 - 10x + 16} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

Thay $x = 10$ vào điều kiện $x^2 - 8x - 2 \geq 0$ thỏa mãn
 Vậy phương trình có nghiệm $x = 10$.

Chú ý: Ở đây tôi chưa cần đến giải bất phương trình $x^2 - 8x - 2 \geq 0$.

II. Bài toán 2:

1) Điều kiện $0 \leq x \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$, với $-1 \leq t \leq 1$

$$\Leftrightarrow t^2 = x + 1 - x - 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} \quad \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} = \frac{1-t^2}{2}$$

$$\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} t - \frac{1-t^2}{2} = m \quad \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 2m \quad (3^*)$$

$$\text{a) } m = 1, \stackrel{(3^*)}{\Leftrightarrow} t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

$t = -3$, loại

$$t = 1, \text{ nên } \sqrt{x} - \sqrt{1-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 1 - x + 2\sqrt{1-x} \quad \Leftrightarrow 2(1-x) + 2\sqrt{1-x} = 0$$

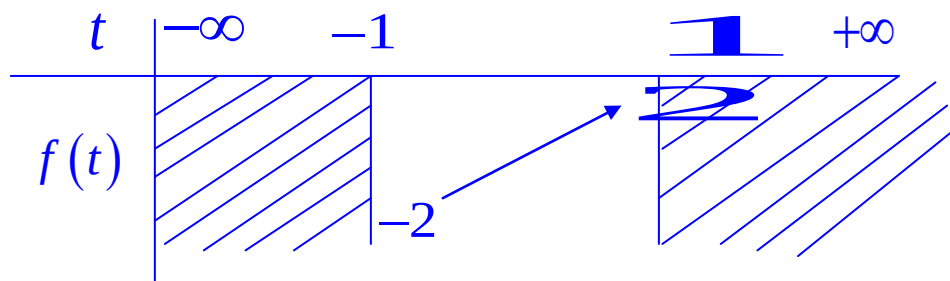
$$\Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{vì } 1-x \geq 0, \forall x \in [0;1])$$

Vậy với $m = 1$ phương trình có nghiệm $x = 1$.

b) Phương trình (3) vô nghiệm khi phương trình (3*) không có nghiệm thỏa mãn $-1 \leq t \leq 1$

Gọi $f(t) = t^2 + 2t - 1$ với $-1 \leq t \leq 1$

Bảng biến thiên:



$$\Rightarrow -2 \leq f(t) \leq 2, \forall t \in [-1;1]$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} 2m > 2 \\ 2m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

Kết luận: $m < -1, m > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

2) Điều kiện $x \geq 2$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}$, $t \geq \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow t^2 = x+1+x-2+2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-x-2}=\frac{t^2+1}{2}$$

$$\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} 2t+\frac{t^2+1}{2}=m \quad \Leftrightarrow t^2+4t+1=2m \quad (4^*)$$

$$a) m=11, \quad \stackrel{(4^*)}{\Leftrightarrow} t^2+4t+1=22 \quad \Leftrightarrow t^2+4t-21=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t=-7 \\ t=3 \end{cases}$$

$t=-7$, loại

$$t=3, \text{ nên } \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3 \quad \Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{x^2-x-2}=9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}=5-x$$

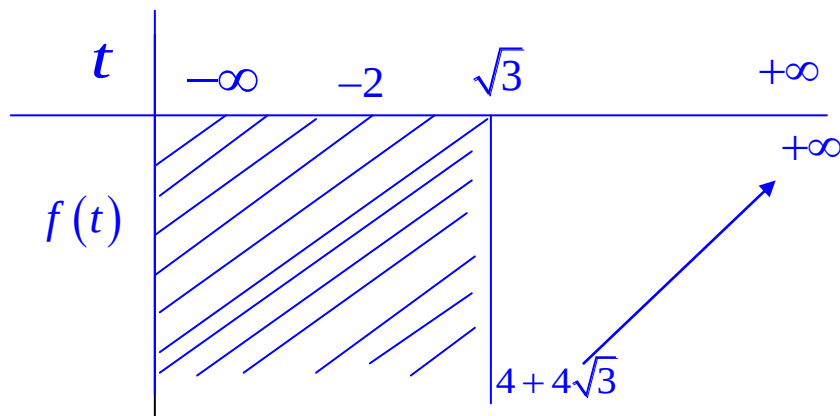
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x^2-x-2=25-10x+x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 9x=27 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x=3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x=3$$

Vậy với $m=1$ phương trình có nghiệm $x=3$.

b) Phương trình (4) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (4*) có nghiệm thỏa mãn $t \geq \sqrt{3}$

Gọi $f(t)=t^2+4t+1, t \geq \sqrt{3}$

Bảng biến thiên:



$$\Rightarrow f(t) \geq 4+4\sqrt{3}; \quad \forall t \geq \sqrt{3}$$

$$\text{Do đó: } 2m \geq 4+4\sqrt{3} \Leftrightarrow m \geq 2+2\sqrt{3}$$

Kết luận: $m \geq 2+2\sqrt{3}$ thì phương trình có nghiệm.

$$3) \text{ Đặt } t = x + \sqrt[3]{35-x^3}$$

$$\Leftrightarrow t^3 = x^3 + 35 - x^3 + 3x\sqrt[3]{35-x^3} \cdot (x + \sqrt[3]{35-x^3})$$

$$\Rightarrow x\sqrt[3]{35-x^3} = \frac{t^3-35}{3t} \quad (5^*)$$

$$\text{Phương trình (5) trở thành: } \frac{t^3-35}{3t} \cdot t = 30 \quad \Leftrightarrow t^3 = 125 \quad \Leftrightarrow t = 5$$

Thay $t=5$ vào (5*) có:

$$x^3\sqrt{35-x^3}=6 \Leftrightarrow x^3(35-x^3)=216 \Leftrightarrow x^6-35x^3+216=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=8 \\ x^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Thay $x=2$, $x=3$ vào phương trình ban đầu thỏa mãn

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=2$, $x=3$.

Chú ý: Ta có thể đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3}$ và đưa về hệ phương trình đối xứng loại 1 để giải cũng được. Phương pháp này sẽ được trình bày ở dưới.

III. Bài toán 3:

1) Điều kiện $x \leq 1$

$$\text{Đề ý: } 2x^2 + 4x = 2(x^2 + x + 1) - 2(1 - x)$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{1-x}, b = \sqrt{1+x+x^2}, a \geq 0, b \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Phương trình (6) trở thành: } 3ab = 2b^2 - 2a^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{b}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = -2 \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = -2, \text{ loại}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = 2a \Leftrightarrow \sqrt{1+x+x^2} = 2\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 1+x+x^2 = 4-4x \Leftrightarrow x^2+5x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2} \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Kết luận: phương trình có hai nghiệm } x = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

2) Điều kiện $x \geq -2$

Nhận thấy $x = -2$ không là nghiệm phương trình

$$\text{Đặt } y = \sqrt{x+2}, y > 0$$

$$\text{Phương trình (7) trở thành: } x^3 - 3x(x+2) + 2(\sqrt{x+2})^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 1\right) \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{x}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\text{Với } y = x, \text{ có: } \sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -1 \Leftrightarrow x = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } y = -\frac{1}{2}x, \text{ có: } \sqrt{x+2} = -\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 4(x+2) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 4x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = 2 \pm 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = 2 - 2\sqrt{3}$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = 2, x = 2 - 2\sqrt{3}$.

$$3) \text{ Điều kiện } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Đề ý: } 3x^2 + 4x + 1 = 3(x^2 + 2x) - (2x - 1)$$

Nhận thấy $x = \frac{1}{2}$ không là nghiệm phương trình

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x^2 + 2x}, b = \sqrt{2x - 1}, a > 0, b > 0$$

$$\text{Phương trình (8) trở thành: } a + b = \sqrt{3a^2 - b^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 3a^2 - b^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 2ab - 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } \frac{a}{b} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ loại}$$

$$\text{Với } \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2a = (1 + \sqrt{5})b \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 2x} = (1 + \sqrt{5})\sqrt{2x - 1}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2x) = (6 + 2\sqrt{5})(2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4(1 + \sqrt{5})x + 6 + 2\sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2x - (1 + \sqrt{5})\right]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (Thoả mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4) Điều kiện $x \geq 5$

$$\stackrel{(9)}{\Leftrightarrow} \sqrt{5x^2 + 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 14x + 9 = x^2 - x - 20 + 25x + 25 + 10\sqrt{x-1}\sqrt{x^2 - x - 20}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) + 3(x+4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x+4)}$$

Đặt $a = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$, $b = \sqrt{x+4}$, $a \geq 0$, $b \geq 3$

$$\stackrel{(9)}{\Leftrightarrow} 2a^2 + 3b^2 = 5ab \quad \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2a = 3b \end{cases}$$

Với $a = b$, có: $\sqrt{x^2 - 4x - 5} = \sqrt{x+4} \quad \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = x + 4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{61}}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{5+\sqrt{61}}{2}$, thỏa mãn điều kiện

Với $2a = 3b \quad \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 4x - 5} = 3\sqrt{x+4} \quad \Leftrightarrow 4x^2 - 16x - 20 = 9x + 36$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$x = 8$, thỏa mãn điều kiện

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm $x = 8$, $x = \frac{5+\sqrt{61}}{2}$.

Chú ý: Ta phải giải được như trên vì

$$2x^2 - 5x + 2 = 2(x^2 - 4x - 5) + 3(x+4)$$

$$\text{và: } (x+1)(x^2 - x - 20) = (x+1)(x+4)(x-5) = (x+4)(x^2 - 4x - 5).$$

IV. Bài toán 4:

$$1) \stackrel{(10)}{\Leftrightarrow} (x^2 - 2x + 3) - (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2x - 2 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, $t \geq \sqrt{2}$

Ta có: $t^2 - (x+1)t + 2x - 2 = 0$

$$\Delta = x^2 + 2x + 1 - 8x + 8 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$\stackrel{(10)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t = 2 \\ t = x - 1 \end{cases}$$

Với $t = 2$, có $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

Với $t = x - 1$, có $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x - 1$: phương trình vô nghiệm

$$(\text{vì: } \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{(x+1)^2 + 2} > \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \geq x-1)$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

2) Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$

$$\stackrel{(11)}{\Leftrightarrow} 4\sqrt{x+1} = 2(x+1) - (1-x) + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}$$

Đặt $t = \sqrt{1-x}$, $t \geq 0$

$$\stackrel{(11)}{\Leftrightarrow} 4\sqrt{1+x} = 2(x+1) - t^2 + 2t + \sqrt{1+x} \cdot t$$

$$\Leftrightarrow t^2 - (2 + \sqrt{1+x})t + 4\sqrt{1+x} - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4\sqrt{1+x} + 1 + x - 16\sqrt{1+x} + 8x + 8 = 4 - 12\sqrt{1+x} + 9(1+x) = (2 - 3\sqrt{1+x})^2$$

$$\stackrel{(11)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t = 2\sqrt{1+x} \\ t = 2 - \sqrt{1+x} \end{cases}$$

Với $t = 2\sqrt{1+x}$, có: $\sqrt{1-x} = 2\sqrt{1+x} \Leftrightarrow 1-x = 4x+4$

$$\Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5} \quad (\text{Thỏa mãn điều kiện})$$

Với $t = 2 - \sqrt{1+x}$, có: $\sqrt{1-x} = 2 - \sqrt{1+x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 \quad \Leftrightarrow 1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow 1-x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{Thỏa mãn điều kiện})$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = -\frac{3}{5}$, $x = 0$.

Chú ý:

Bài toán này ta tách: $3x = 2(1+x) - (1-x) - 1$ để phương trình bậc hai theo t có Δ là dạng bình phương

3) Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$

$$\stackrel{(12)}{\Leftrightarrow} 4(2x+4) + 16(2-x) + 16\sqrt{2x+4} \cdot \sqrt{2-x} = 9x^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 16\sqrt{2(4-x^2)} - 8x + 32 = 9x^2 \quad \Leftrightarrow 4(8-2x^2) + 16\sqrt{8-2x^2} - x^2 - 8x = 0$$

Đặt $t = 2\sqrt{8-2x^2}$, $t \geq 0$

$$\stackrel{(12)}{\Leftrightarrow} t^2 + 8t - x^2 - 8x = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = -x - 8 \end{cases}$$

Với $t = x$, có: $2\sqrt{8-2x^2} = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4(8-2x^2) = x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 = 32 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Với $t = -x - 8$, có: $2\sqrt{8-2x^2} = -x - 8$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{8-2x^2} + x + 8 = 0 \text{ phương trình không có nghiệm } x \in [-2; 2]$$

Kết luận: phương trình có một nghiệm $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Bài tập

Giải các phương trình:

$$1) (x-2)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+1)(x-2) = 6$$

$$2) \sqrt{x-1} = \sqrt{x^2+4x-1} - \sqrt{x+3}$$

$$3) \sqrt{2x} - \sqrt{5-2x} + x\sqrt{\frac{5-2x}{2x}} = 2$$

$$4) \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + x \geq \sqrt{x^2+x-2} + 1$$

$$5) \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + 2 = 0$$

$$6) 2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$$

$$7) (x^2 - 6x + 11) \cdot \sqrt{x^2 - x + 1} = 2(x^2 - 4x + 7) \sqrt{x - 2}$$

$$8) x^3 + (3 - \sqrt{x^2 + 2})x = 1 + 2\sqrt{x^2 + 2}$$

$$9) x^2 - 3x + 1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

$$10) 2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}.$$

Phương pháp 3: Phương pháp xuất hiện biểu thức liên hợp

Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{3x+4} + \sqrt{x-3} = \frac{2x+7}{3} \quad (1)$$

$$2) (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})(\sqrt{x^2+x-2} - 1) = 3 \quad (2) \text{ (HSG Toán 12 NGThiều 2011)}$$

$$3) \sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3(x^2-x-1)} - \sqrt{x^2-3x+4} \quad (3)$$

$$4) \sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5} \quad (4)$$

$$5) \sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2} \quad (5)$$

$$6) \sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3 \quad (6)$$

$$7) \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2-5x-1 \quad (7)$$

$$8) \sqrt{2x^2+x+9} + \sqrt{2x^2-x+1} = x+4. \quad (8)$$

Giải1) Điều kiện $x \geq 3$ Đề ý: $(3x+4) - (x-3) = 2x+7$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 3(\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-3}) = (\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-3})(\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3})$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-3})(\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-3} - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} - 3 = 0 \quad (1^*)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4} = \sqrt{x-3} + 3$$

$$\Leftrightarrow 3x+4 = x-3+9+6\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-3} = x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 9(x-3) = x^2-2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-11x+28=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x=4 \\ x=7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=7 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x=4, x=7$.**Chú ý:**

Từ (1*) đưa về: $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} = 3$ rồi bình phương hai vế tìm nghiệm thỏa mãn $x \geq 3$ (do: $\sqrt{3x+4} > \sqrt{x-3}, \forall x \geq 3$).

2) Điều kiện $x \geq 1$ Đề ý: $(x+2) - (x-1) = 3$ và $\sqrt{x+2} > \sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} [x+2-(x-1)](\sqrt{x^2+x-2}-1) = 3(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2}-1 = \sqrt{x+2}-\sqrt{x-1} \quad (2^*) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x-2}-1 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2+x-2}-1\right)^2 = \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x-2} \geq 1 \\ x^2+x-2+1-2\sqrt{x^2+x-2} = x+2+x-1-2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-1} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 \geq 1 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-3 \geq 0 \\ \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện $x \geq 1$, ta tìm được nghiệm là $x = 2$.

Chú ý:

Ở (2*) ta giải bằng cách bình phương hai vế vì sau khi bình phương hai vế ta làm mất được $2\sqrt{x^2+x-2}$.

$$\begin{aligned}
3) \text{ Đề ý: } &(3x^2-5x+1)-(3x^2-3x-3) = (x^2-2)-(x^2-3x+4) \\
&\stackrel{(3)}{\Rightarrow} (\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}) - (\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{3x^2-3x-3}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-2-(x^2-3x+4)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} - \frac{3x^2-5x+1-(3x^2-3x-3)}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} - \frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} + \frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}} \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow x=2, \text{ vì } \frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} + \frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}} > 0
\end{aligned}$$

Thay $x = 2$ vào phương trình ban đầu thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Chú ý: Ở đây ta không đặt điều kiện vì $x^2-3x-3 \geq 0$ giải ra kết quả xấu, do vậy ta tìm nghiệm phương trình hệ quả rồi thay lại phương trình ban đầu xem thỏa mãn sẽ lấy làm nghiệm.

$$\begin{aligned}
4) \text{ Phương trình: } &\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5 \text{ có nghiệm thì } x > \frac{5}{3} \\
&\text{(vì: } \sqrt{x^2+12} > \sqrt{x^2+5} \text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2+12}-4=(3x-6)+(\sqrt{x^2+5}-3) \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2+12-16}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2+5-9}{\sqrt{x^2+5}+3} \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}-3(x-2)=0 \\
&\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0 \\
&\Leftrightarrow x=2
\end{aligned}$$

Vì: $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3 < \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3 < 0, \forall x > \frac{5}{3}$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x=2$.

Chú ý: ta giải bài toán này được là do ta đã nhẩm được một nghiệm $x=2$ của phương trình.

5) Điều kiện $x \geq \sqrt[3]{2}$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} (\sqrt[3]{x^2-1}-2)+(x-3)=\sqrt{x^3-2}-5 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-1-8}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}}+(x-3)=\frac{x^2-2-25}{\sqrt{x^3-2}+5} \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}}+(x-3)-\frac{x^3-27}{\sqrt{x^2-2}+5}=0 \\
&\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}}+1-\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^2-2}+5}\right]=0 \\
&\Leftrightarrow x=3
\end{aligned}$$

Vì: $1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}}=1+\frac{x+3}{(\sqrt[3]{x^2-1}+1)^2+3} < 2 < \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^2-2}+5}$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x=3$.

Chú ý: Ở bài này ta cũng nhẩm được nghiệm $x=3$ nên đã thêm bớt để xuất hiện $(x-3)$ và giải tiếp.

6) Điều kiện $\begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq -1 \end{cases}$

Đề ý: $(4x^2+5x+1)-4(x^2-x+1)=9x-3$

$$\stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} [4x^2 + 5x + 1 - 4(x^2 - x + 1)] = (9x - 3) \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow (9x - 3) \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vì:

$$\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 \geq 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 = 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}} - 1 > 0$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

7) Điều kiện $2 \leq x \leq 4$

$$\stackrel{(7)}{\Leftrightarrow} (\sqrt{x-2} - 1) + (\sqrt{4-x} + 1) = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{4-x-1}{\sqrt{4-x}+1} - (x-3)(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} - 2x-1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} = 2x+1 \end{cases} \quad (7^*)$$

$x=3$, thỏa mãn điều kiện

$$\text{Có } \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} \leq 1, \quad \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} \leq 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2}$$

Lại có: $2x+1 \geq 2 \cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow$ phương trình (7^*) vô nghiệm

Kết luận: phương trình có nghiệm $x=3$.

Chú ý: Ta giải thế này là do đã nhầm được nghiệm $x=3$.

$$8) \text{ Nhận thấy: } (2x^2 + x + 9) - (2x^2 - x + 1) = 2(x+4)$$

$$\stackrel{(8)}{\Leftrightarrow} 2 \left(\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} \right) = \left[(2x^2 + x + 9) - (2x^2 - x + 1) \right]$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} \right) = \left(\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} \right) \left(\sqrt{2x^2 + x + 9} - \sqrt{2x^2 - x + 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x + 9} - \sqrt{2x^2 - x + 1} = 2 \quad (8^*)$$

$$\text{Lại có: } \sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2 + x + 9} = x + 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 4(2x^2+x+9) = x^2+12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ 7x^2-8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x=0 \\ x=\frac{8}{7} \end{cases}$$

Thay $x=0$, $x=\frac{8}{7}$ trở lại phương trình ban đầu thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$, $x=\frac{8}{7}$.

Chú ý: Ở (8*) có thể giải bằng cách bình phương hai vế cũng được, nhưng sẽ dài và khó. Ở đây kết hợp với phương trình ban đầu để đưa ra phương trình hệ quả, giải nhanh hơn. Tìm ra x , thử lại kết quả để chọn nghiệm.

Bài tập

Giải các phương trình sau

- 1) $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{2x+x^2}{1+x^2}$
- 2) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2} + \sqrt[3]{2x^2+1}$
- 3) $\sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1$
- 4) $\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt{3x^3-2} = 3x-2$
- 5) $\sqrt[3]{x^2+4} = \sqrt{x-1} + 2x+3$
- 6) $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}$.

Phương pháp 4: Đưa về phương trình tích

Giải các phương trình sau

$$1) \sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} = \sqrt[3]{4x-3} \quad (1)$$

$$2) 1+x = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{2-x} + \sqrt{2-x} \cdot \sqrt{5-x} + \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \quad (2)$$

$$3) \sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2} \quad (3)$$

$$4) \sqrt{x+1} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3} \quad (4)$$

Giải

$$1) \text{ Xuất phát từ } (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Áp dụng vào giải phương trình (1):

$$\Leftrightarrow^{(1)} \left(\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} \right)^3 = \left(\sqrt[3]{4x-3} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow 3x+1+5-x+2x-9+3\left(\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}\right)\left(\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}\right)\left(\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{2x-9}\right)=4x-3$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}\right)\left(\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}\right)\left(\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{2x-9}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+1} = -\sqrt[3]{5-x} \\ \sqrt[3]{5-x} = -\sqrt[3]{2x-9} \\ \sqrt[3]{3x+1} = -\sqrt[3]{2x-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = -(5-x) \\ 5-x = -(2x-9) \\ 3x+1 = -(2x-9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -6 \\ x = 4 \\ 5x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \\ x = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có ba nghiệm $x = -3, x = 4, x = \frac{8}{5}$.

Chú ý: Có thể xuất phát từ: $(3x+1)+(5-x)=(4x-3)-(2x-9)$ hoặc $(5-x)+(2x-9)=(4x-3)-(3x+1)$, để ta có cách giải khác như phương pháp 1, bài toán 3.

$$2) \text{ Điều kiện } x \leq 1$$

Đặt $a = \sqrt{1-x}, b = \sqrt{2-x}, c = \sqrt{5-x}$, với $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ab+bc+ca=2-a^2 \\ ab+bc+ca=3-b^2 \\ ab+bc+ca=6-c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a+c)=2 \\ (a+b)(b+c)=3 \\ (a+c)(b+c)=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [(a+b)(b+c)(c+a)]^2 = 36 \quad \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 6$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} b+c=3 \\ c+a=2 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow 2(a+b+c)=6 \quad \Leftrightarrow a+b+c=3$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x=1$.

$$3) \text{ Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{2x^2 - 1} \\ b = \sqrt{x^2 - 3x - 2} \\ c = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} \\ d = \sqrt{x^2 - x + 2} \end{cases}, \quad \begin{matrix} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c > 0 \\ d > 0 \end{matrix}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a+b=c+d \\ a^2-b^2=c^2-d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=c+d \\ a-b=c-d \end{cases} \quad (\text{vì } c+d > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} = \sqrt{2x^2+2x+3} \\ \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{x^2-x+2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1=2x^2+2x+3 \\ x^2-3x-2=x^2-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x=-2$.

Chú ý: Dạng phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ được giải bằng cách:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

4) Điều kiện $x \geq -1$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{(x+1)(x+3)} \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+3}\sqrt{x+1}) - (2x - 2x\sqrt{x+1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+3}(1 - \sqrt{x+1}) - 2x(1 - \sqrt{x+1}) = 0 \quad \Leftrightarrow (1 - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+3} - 2x) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=1 \\ \sqrt{x+3}=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ x \geq 0 \\ x+3=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \geq 0 \\ 4x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \geq 0 \\ x=1 \\ x=-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x=0, x=1$.

Bài tập

Giải các phương trình

- 1) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}$
- 2) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2+x}$.

Phương pháp 5: Phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình**I. Bài toán 1. Đưa về hệ thông thường**

Giải phương trình sau: $\sqrt{2x+8} - \sqrt[3]{2x-9} = 5$ (1)

II. Bài toán 2. Đưa về hệ đối xứng loại 1

Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{2+x} + \sqrt{3-x} = 1 + \sqrt{(2+x)(3-x)} \quad (2)$$

$$2) \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17-x} = 3 \quad (3)$$

$$3) \sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{(5+x)(2-x)} = -1 \quad (4)$$

$$4) \sqrt{2-x^2} = (2-\sqrt{x})^2 \quad (5)$$

III. Bài toán 3. Đưa về hệ đối xứng loại 2

Giải các phương trình sau:

$$1) \left(\frac{x^3+2}{3} \right)^3 = 3x-2 \quad (6)$$

$$2) x^2 - 2 = \sqrt{x+2} \quad (7)$$

$$3) x^3 - 3x^2 + 3x = \sqrt[3]{16x-24} \quad (8)$$

$$4) 4x^2 + 7x + 1 = 2\sqrt{x+2} \quad (9)$$

$$5) \sqrt{2x+15} = 32x^2 + 32x - 20 \quad (\text{Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 303}) \quad (10)$$

$$6) \sqrt[3]{3x-5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 \quad (\text{Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 303}) \quad (11)$$

IV. Bài toán 4. Đưa về hệ gần đối xứng

Giải các phương trình sau:

$$1) \left(\frac{x^2+1}{3} \right)^2 + 3x + 1 = 0 \quad (12)$$

$$2) x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6 \quad (13)$$

Giải**I. Bài toán 1.**

Điều kiện $x \geq -4$

Đặt $a = \sqrt{2x+8}$, $b = \sqrt[3]{2x-9}$, $a \geq 0$, $b \geq \sqrt[3]{-17}$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a - b = 5 & (1.1) \\ a^2 - b^3 = 17 & (1.2) \end{cases}$$

Từ (1.1) có $a = b + 5$ thay vào (1.2): $(b+5)^2 - b^3 = 17 \Leftrightarrow b^2 + 10b + 25 - b^3 = 17$

$$\Leftrightarrow b^3 - b^2 - 10b - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow (b+1)(b^2 - 2b - 8) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$b = -1, \text{ nên } \sqrt[3]{2x-9} = -1 \Leftrightarrow 2x-9 = -1 \Leftrightarrow x = 4$$

$$b = -2, \text{ nên } \sqrt[3]{2x-9} = -2 \Leftrightarrow 2x-9 = -8 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$b = 4, \text{ nên } \sqrt[3]{2x-9} = 4 \Leftrightarrow 2x-9 = 64 \Leftrightarrow x = \frac{73}{2}$$

Kết luận: phương trình có ba nghiệm $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$, $x = \frac{73}{2}$.

Chú ý: Dạng bài tập này ta nên đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình và giải bằng phương pháp thế.

II. Bài toán 2.

1) Đây chính là phương pháp 2, bài toán 2 đã biết. Ở đây ta sẽ giải bằng cách khác.

Điều kiện $-2 \leq x \leq 3$

Đặt $a = \sqrt{2+x}$, $b = \sqrt{3-x}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a+b=1+ab \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1+ab & (2.1) \\ (a+b)^2-2ab=5 & (2.2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (2.1) vào (2.2) có: } (1+ab)^2-2ab=5 \Leftrightarrow (ab)^2+2ab+1-2ab=5$$

$$\Leftrightarrow (ab)^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \\ ab=-1 \end{cases}$$

$ab=-1$, loại

$$\text{Với } \begin{cases} ab=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow a, b \text{ là nghiệm phương trình: } t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{Nên } \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}=1 \\ \sqrt{3-x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = -1$, $x = 2$.

2) Điều kiện $0 \leq x \leq 17$

Đặt $a = \sqrt[4]{x}$, $b = \sqrt[4]{17-x}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a^4+b^4=17 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2+b^2)^2-2a^2b^2=17 \\ a+b=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [(a+b)^2-2ab]^2-2(ab)^2=17 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-2ab)^2-2(ab)^2=17 \\ a+b=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(ab)^2 - 36ab + 64 = 0 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 16 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 16 \end{cases}, \text{ loại, (vì } 9 = 3^2 < 16 \cdot 4 = 64)$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \Rightarrow a, b \text{ là nghiệm phương trình: } t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt[4]{x} = 1 \\ \sqrt[4]{17-x} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[4]{x} = 2 \\ \sqrt[4]{17-x} = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 16 \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = 1, x = 16$.

$$3) \text{ Đặt } a = \sqrt[3]{5+x}, b = \sqrt[3]{2-x}$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a + b + ab = -1 \\ a^3 + b^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -1 - (a + b) \\ (a + b)^3 - 3ab(a + b) - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (4.1) \\ (4.2) \end{matrix}$$

Thay (4.1) vào (4.2) có:

$$(a + b)^3 + 3[1 + (a + b)](a + b) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^3 + 3(a + b)^2 + 3(a + b) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - 1)[(a + b)^2 + 4(a + b) + 7] = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b = 1 \quad (\text{Vì: } (a + b)^2 + 4(a + b) + 7 > 0)$$

$$a + b = 1 \text{ thay vào (4.1) có } ab = -2$$

$$\text{Nên } a, b \text{ là nghiệm phương trình: } t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt[3]{5+x} = -1 \\ \sqrt[3]{2-x} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{5+x} = 2 \\ \sqrt[3]{2-x} = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 3 \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = -6, x = 3$.

Chú ý: Bài này có thể giải bằng cách đặt $t = \sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{2-x}$.

4) Điều kiện $0 \leq x \leq \sqrt{2}$

Đặt $a = \sqrt{x}$, $b = 2 - \sqrt{x}$, $a \geq 0$, $2 - \sqrt{2} \leq b \leq 2$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} b^2 = \sqrt{2 - a^4} \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 = 2 - a^4 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + b^4 = 2 \\ a + b = 2 \end{cases} \quad (*)$

Ta có: $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = 2$ và $a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq 2$

$\Rightarrow a^4 + b^4 \geq 2$

Vậy hệ (*) xảy ra khi $a = b = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x = 1$.

III. Bài toán 3.

1) Bài này ta không khai triển vì phương trình sau khai triển là bậc 9, ta không thể giải được. Do vậy ta giải theo cách sau:

Đặt $\frac{x^3 + 2}{3} = a$. Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^3 = 3x - 2 & (6.1) \\ x^3 = 3a - 2 & (6.2) \end{cases}$

Lấy (6.1) trừ (6.2) có: $a^3 - x^3 = 3x - 3a$

$\Leftrightarrow (a - x)(a^2 + x^2 + ax) + 3(a - x) = 0$

$\Leftrightarrow (a - x)(a^2 + x^2 + ax + 3) = 0$

$\Leftrightarrow a = x$ (Vì: $a^2 + x^2 + ax + 3 > 0$)

$\Leftrightarrow \frac{x^3 + 2}{3} = x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = -2$, $x = 1$.

Chú ý: Dạng phương trình $\left[\frac{(f(x))^n + a}{b} \right]^n = b \cdot f(x) - a$

Ta sẽ giải như sau:

Đặt $t = f(x)$ và $\frac{t^n + a}{b} = y$

Từ đó có hệ phương trình: $\begin{cases} y^n = bt - a \\ t^n = by - a \end{cases}$.

2) Phương pháp 1, bài toán 1 ta đã giải bài này, sau đây là cách giải khác:

Điều kiện $x \geq -2$.

Đặt $\sqrt{x + 2} = a$, $a \geq 0$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2 = a & (7.1) \\ a^2 - 2 = x & (7.2) \end{cases}$

Lấy (7.1) trừ (7.2) có: $x^2 - a^2 = a - x$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x+a+1)=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a=x \\ a=-x-1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a=x, \text{ có } \sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{Với } a=-x-1, \text{ có } \sqrt{x+2}=-x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x+2=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x=2$.

Chú ý: Dạng phương trình $[f(x)]^n + a = b \cdot \sqrt[n]{b \cdot f(x) - a}$

Ta sẽ giải như sau:

$$\text{Đặt } t = f(x) \text{ và } y = \sqrt[n]{bt-a}$$

$$\text{Từ đó có hệ phương trình: } \begin{cases} t^n + a = by \\ y^n + a = bt \end{cases}$$

$$3) \stackrel{(8)}{\Leftrightarrow} (x-1)^3 + 1 = \sqrt[3]{16(x-1)-8} \quad \Leftrightarrow (x-1)^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2(x-1)-1}$$

$$\text{Đặt } a = x-1, b = \sqrt[3]{2a-1}.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a^3 + 1 = 2b & (8.1) \\ b^3 + 1 = 2a & (8.2) \end{cases}$$

Lấy (8.1) trừ (8.2) có:

$$a^3 - b^3 = 2b - 2a \quad \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + b^2 + ab + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a=b \quad (\text{Vì: } a^2 + b^2 + ab + 2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2(x-1)-1} = x-1 \quad \Leftrightarrow 2x-3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có ba nghiệm $x=2$, $x=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

4) Điều kiện $x \geq -2$

$$\stackrel{(9)}{\Leftrightarrow} (2x+1)^2 + 3x = 2\sqrt{2(2x+1)-3x}$$

Đặt $a = 2x+1$, $b = \sqrt{2a-3x}$, $b \geq 0$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a^2 + 3x = 2b & (9.1) \\ b^2 + 3x = 2a & (9.2) \end{cases}$$

Lấy (9.1) trừ (9.2) có:

$$a^2 - b^2 = 2b - 2a \Leftrightarrow (a-b)(a+b+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b = -a - 2 \end{cases}$$

Với $b = a$, có: $a^2 + 3x = 2a \Leftrightarrow (2x+1)^2 + 3x = 2(2x+1)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (Thoả mãn điều kiện)}$$

Với $b = -a - 2$, có: $a^2 + 3x = 2(-a - 2)$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 + 3x = 2(-2x-1-2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 11x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{7}{4} \end{cases} \text{ (Thoả mãn điều kiện)}$$

Kết luận: phương trình có 3 nghiệm $x = -1$, $x = -\frac{7}{4}$, $x = \frac{1}{4}$.

5) Điều kiện $x \geq -\frac{15}{2}$

$$\stackrel{(10)}{\Leftrightarrow} \sqrt{2x+15} = 2(4x+2)^2 - 28$$

Đặt $\sqrt{2x+15} = 4y+2$ với $y \geq -\frac{1}{2}$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4y+2 = 2(4x+2)^2 - 28 \\ 2x+15 = (4y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x+2)^2 = 2y+15 & (10.1) \\ (4y+2)^2 = 2x+15 & (10.2) \end{cases}$$

Lấy (10.1) trừ (10.2) có: $(4x+2)^2 - (4y+2)^2 = 2y - 2x$

$$\Leftrightarrow (4x+2+4y+2)(4x+2-4y-2) + 2(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(4x+4y+4)(x-y) + 2(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(8x+8y+8+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x - \frac{9}{8} \end{cases}$$

Với $y = x$, thay (10.1) có: $(4x+2)^2 = 2x+15$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 14x - 11 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{11}{8} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}, \text{ lấy}$$

$$x = -\frac{11}{8}, \text{ loại vì } x = y \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Với } y = -x - \frac{9}{8}, \text{ thay (10.1) có: } (4x+2)^2 = -2x - \frac{9}{4} + 15$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 18x - \frac{35}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-9 - \sqrt{641}}{16} \\ x = \frac{-9 + \sqrt{641}}{16} \end{cases}$$

$$x = \frac{-9 - \sqrt{641}}{16}, \text{ lấy}$$

$$x = \frac{-9 + \sqrt{641}}{16}, \text{ loại vì } y \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \leq -\frac{5}{8}$$

$$\text{Kết luận: phương trình có hai nghiệm } x = \frac{1}{2}, x = \frac{-9 - \sqrt{641}}{16}.$$

Chú ý: Dạng phương trình $\sqrt{ax+b} = r(ux+v)^2 + dx + e$, với $\begin{cases} u = ar + d \\ v = br + e \end{cases}$

Thì ta đặt $\sqrt{ax+b} = uy + v$ với $uy + v \geq 0$, để giải tiếp.

$$6) \stackrel{(11)}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{3x-5} = (2x-3)^3 - x + 2$$

Đặt $\sqrt[3]{3x-5} = 2y-3$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2y-3 = (2x-3)^3 - x + 2 \\ (2y-3)^3 = 3x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)^3 = 2y-3 + (x-2) \\ (2y-3)^3 = 2x-3 + (x-2) \end{cases} \begin{matrix} (11.1) \\ (11.2) \end{matrix}$$

$$\text{Lấy (11.1) trừ (11.2) có: } (2x-3)^3 - (2y-3)^3 = 2(y-x)$$

$$\Leftrightarrow [(2x-3) - (2y-3)][(2x-3)^2 + (2y-3)^2 + (2x-3)(2y-3)] + 2(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-y)[(2x-3)^2 + (2y-3)^2 + (2x-3)(2y-3) + 1] = 0$$

$$\Rightarrow x = y \quad \text{Vì } (2x-3)^2 + (2y-3)^2 + (2x-3)(2y-3) + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-5} = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow 3x-5 = (2x-3)^3$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(8x^2 - 20x + 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có ba nghiệm $x = 2, x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$.

Chú ý: Dạng phương trình $\sqrt[3]{ax+b} = r(ux+v) + dx + e$, với $\begin{cases} u = ar + d \\ v = br + e \end{cases}$

Thì ta đặt $\sqrt[3]{ax+b} = uy + v$, để giải tiếp.

IV. Bài toán 4.

1) Đặt $\frac{x^2+1}{3} = a, a \geq \frac{1}{3}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^2 + 3x + 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 3x + 1 = 0 & (12.1) \\ x^2 - 3a + 1 = 0 & (12.2) \end{cases}$

Lấy (12.1) trừ (12.2) có: $a^2 - x^2 + 3x + 3a = 0$

$$\Leftrightarrow (a+x)(a-x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x \\ a = -3+x \end{cases}$$

$$\text{Với } a = -x, \text{ có: } x^2 + 1 = -3x \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(Thoả mãn: $x = -a \leq -\frac{1}{3}$)

Với $a = x - 3$, có: $x^2 + 1 = 3(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 10 = 0$: phương trình vô nghiệm

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2) Điều kiện $x \geq 1$

Đặt $a = \sqrt{x-1}, b = \sqrt{5+\sqrt{x-1}}, a \geq 0, b \geq \sqrt{5}$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^2 + 1 + b = 6 \\ b^2 = 5 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b = 5 & (13.1) \\ b^2 - a = 5 & (13.2) \end{cases}$

Lấy (13.1) trừ (13.2) có: $(a^2 - b^2) + (b + a) = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b+1) = 0$

$$\Leftrightarrow b = a + 1 \text{ (Vì } a + b > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5+\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 5 + \sqrt{x-1} = x - 1 + 1 + 2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 5-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x-1 = (5-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 26 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x = \frac{11 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11 - \sqrt{17}}{2}, \text{ thoả mãn điều kiện}$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x = \frac{11 - \sqrt{17}}{2}$.

Bài tập

Giải các phương trình:

1) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$

2) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{x^2+x-1} + \sqrt[6]{1-x} = 1$

3) $8x^2 + 8x = \sqrt{x + \frac{3}{2}}$

4) $\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$

(HSG NGThiều 2006)

5) $\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1}$

6) $\sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1.$

Phương pháp 6: Phương pháp đánh giá

Giải các phương trình

$$1) x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 - 2x + 16} + 2x^2 - 6x + 20 = 0 \quad (1)$$

$$2) \sqrt{1 - 2011x} + \sqrt{1 + 2011x} = \sqrt{x + 1} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \quad (2)$$

$$3) x^2 - 2x + 4 = \sqrt{2x^3 + x^2 - 10x + 15} \quad (3)$$

$$4) \sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} = 6 \quad (4)$$

$$5) \sqrt{13x^3 - 6x + 10} + \sqrt{5x^2 - 13x + \frac{17}{2}} + \sqrt{17x^2 - 48x + 36} = \frac{1}{2}(36x - 8x^2 - 21) \quad (5)$$

$$6) \sqrt{4x - y^2} - \sqrt{y + 2} = \sqrt{4x^2 + y} \quad (6)$$

$$7) \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}} = \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} \quad (7)$$

Giải

$$1) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \left[x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 - 2x + 16} + (x^2 - 2x + 16) \right] + (x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 16} \right)^2 + (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 16} = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = 2$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x = 2$.

Chú ý: Ở đây ta đã sử dụng phương pháp $f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$.

$$2) \text{ Điều kiện } \frac{-1}{2011} \leq x \leq \frac{1}{2011}$$

$$\text{Ta có : } \left(\sqrt{1 - 2011x} + \sqrt{1 + 2011x} \right)^2 \leq 2(1 - 2011x + 1 + 2011x)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1 - 2011x} + \sqrt{1 + 2011x} \right)^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \sqrt{1 - 2011x} + \sqrt{1 + 2011x} \leq 2$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \sqrt{1 - 2011x} = \sqrt{1 + 2011x} \quad \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x+1}} = 2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = 0$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x = 0$.

Nhận xét: Ta đã sử dụng phương pháp $\begin{cases} f(x) \geq m \\ g(x) \leq m \end{cases}, \forall x \in D$

Nên phương trình $f(x) = g(x)$ với $x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m \\ g(x) = m \end{cases}, x \in D.$

3) Điều kiện: $2x^3 + x^2 - 10x + 15 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x+3)(2x^2+5x+5) \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq -3 \quad (\text{do } 2x^2+5x+5 > 0)$$

$$\text{Có: } \sqrt{2x^3 + x^2 - 10x + 15} = \sqrt{x+3} \sqrt{2x^2 - 5x + 5} \leq \frac{x+3+2x^2-5x+5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + x^2 - 10x + 15} \leq x^2 - 2x + 4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x^2 - 5x + 5}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 5 = x + 3 \quad \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét: Ta đã sử dụng phương pháp $f(x) \geq g(x), \forall x \in D$ bằng cách áp dụng các bất đẳng thức

Do vậy phương trình $f(x) = g(x), x \in D$ xảy ra khi dấu đẳng thức xảy ra ở phép sử dụng trên.

4) Điều kiện $x < 2$

*) Bằng cách thử trực tiếp ta thấy phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{2}$

*) Với $x < \frac{3}{2}$, có

$$3-x > 3-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{6}{3-x} < \frac{6}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{6}{3-x}} < 2$$

$$2-x > 2-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{8}{2-x} < \frac{8}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{8}{2-x}} < 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} < 6, \quad \forall x: x < \frac{3}{2}$$

*) Với $\frac{3}{2} < x < 2$, có

$$0 < 3 - x < 3 - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{6}{3-x} > \frac{6}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{6}{3-x}} > 2$$

$$0 < 2 - x < 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{8}{2-x} > \frac{8}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{8}{2-x}} > 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} > 6, \quad \forall x: \frac{3}{2} < x < 2$$

Kết luận: phương trình có một nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

Chú ý: Điều quan trọng của phương pháp này là ta phải tìm được khoảng chứa nghiệm của phương trình, sau đó xét các trường hợp đặc biệt để tìm ra nghiệm của phương trình. Từ đó chứng minh phương trình không còn nghiệm khác nữa.

$$5) \sqrt{13x^2 - 6x + 10} = \sqrt{(3x+1)^2 + (2x-3)^2} \geq \sqrt{(3x+1)^2} = |3x+1|$$

$$\sqrt{5x^2 - 13x + \frac{17}{2}} = \sqrt{\left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \geq \sqrt{\left(2x - \frac{5}{2}\right)^2} = \left|2x - \frac{5}{2}\right|$$

$$\sqrt{17x^2 - 48x + 36} = \sqrt{x^2 + (4x-6)^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{13x^2 - 6x + 10} + \sqrt{5x^2 - 13x + \frac{17}{2}} + \sqrt{17x^2 - 48x + 36} \\ &\geq |3x+1| + \left|2x - \frac{5}{2}\right| + |x| \geq \left|3x+1 + 2x - \frac{5}{2} + x\right| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow VT \geq \left|6x - \frac{3}{2}\right| \geq 6x - \frac{3}{2}, \quad VT = 6x - \frac{3}{2} \text{ khi } x = \frac{3}{2}$$

$$VP = \frac{1}{2}(36x - 8x^2 + 32) = \frac{1}{2}[(12x-3) - 2(2x-3)^2] \leq \frac{1}{2}(12x-3) = 6x - \frac{3}{2}$$

$$VP = 6x - \frac{3}{2} \text{ khi } x = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình (5) có nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

$$6) \text{ Điều kiện } \begin{cases} 4x - y^2 \geq 0 \\ y \geq -2 \\ 4x^2 + y \geq 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} \sqrt{4x - y^2} = \sqrt{y+2} + \sqrt{4x^2 + y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x - y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{y+2} + \sqrt{4x^2 + y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x - y^2 = y + 2 + 4x^2 + y + 2\sqrt{y+2}\sqrt{4x^2+y}$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + 2\sqrt{y+2}\sqrt{4x^2+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + (y+1)^2 + 2\sqrt{y+2}\sqrt{4x^2+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ y+1=0 \\ \sqrt{y+2}\sqrt{4x^2+y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases} \quad (\text{Thoả mãn điều kiện})$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$.

7) *) Với $x \geq 1$, có: $VP = \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+5}} \leq 0$, $VT = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+4x+8}} > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

*) Với $x \leq -2$ có: $VP = \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+5}} > 0$, $VT = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+4x+8}} \leq 0$

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

*) Với $-2 < x < 1$, hai vế phương trình (7) đều không âm, bình phương 2 vế ta có

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+8} = \frac{x^2-2x+5}{x^2-2x+5} \Leftrightarrow \frac{x^2+4x+8}{x^2+4x+4} = \frac{x^2-2x+5}{x^2-2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{4}{x^2+4x+4} = 1 + \frac{4}{x^2-2x+1} \Leftrightarrow \frac{4}{x^2+4x+4} = \frac{4}{x^2-2x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4 = x^2-2x+1 \Leftrightarrow 6x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

Bài tập

Giải các phương trình

1) $4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x})$

2) $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} = -x^2 - 6x - 6$

3) $\sqrt{2x^2-x+1} + \sqrt{2x^2+x+1} = 2$

4) $\sqrt{x} + \sqrt{x+2\sqrt{x}} = \sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x+3\sqrt{x}}$

5) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$

6) $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

(ĐH QGHN 2001)

7) $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x-\frac{1}{x^2}} = 4-x-\frac{1}{x}$

8) $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$

Phương pháp 7: Phương pháp hàm số

Giải các phương trình

$$1) \sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} = (\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1} \quad (1)$$

$$2) \sqrt{x^3+5} + 2\sqrt[3]{2x+1} + x = 0 \quad (2)$$

$$3) \sqrt{x-1} = -x^2 + 2x + 17 \quad (3)$$

Giải1) Điều kiện $x \geq -1$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} = (\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1}$$

Gọi $a = \sqrt[3]{x^2-1}$, $a \geq -1$ và $b = \sqrt{x+1}$, $b \geq 0$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(a) = f(b) \quad \text{trong đó} \quad f(t) = t^2 + 2t$$

Lại có $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ Vậy $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1} = \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2 = (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - x^2 - 5x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \text{ (Thoả mãn điều kiện)} \\ x = 3 \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có 3 nghiệm $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$.**Chú ý:** Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì phương trình

$$f(a) = f(b), \quad (a, b \in D) \Leftrightarrow a = b, \quad (a, b \in D)$$

2) Điều kiện $x \geq -\sqrt[3]{5}$ Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^3+5} + \sqrt[3]{2x+1} + x$, với $x \in [-\sqrt[3]{5}; +\infty)$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + 1 > 0, \quad \forall x \in (-\sqrt[3]{5}; +\infty)$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\sqrt[3]{5}; +\infty)$

Mà $f(-1) = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Chú ý: Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì phương trình $f(x) = a$, $a \in D$ ($a = \text{const}$), nghiệm nếu có là duy nhất.

3) Điều kiện $x \geq 1$

Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$, $\forall x > 1$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \sqrt{x-1}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

Hàm số $g(x) = -x^2 + 2x + 17$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$

Lại có $f(5) = g(5)$

Vậy phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Chú ý: Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D và hàm số $y = g(x)$ luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = g(x)$ nhiều nhất là một.

Ta cũng có thể giải bài này bằng cách vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ, hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm phương trình.

Bài tập

Giải các phương trình sau

$$1) \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2}$$

$$2) \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+\sqrt{7x+2}} = 4$$

$$3) \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3.$$

Phương pháp 8: Phương pháp véc-tơ

Giải các phương trình

1) $\left| \sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50} \right| = 5$

2) $\sqrt{x^2 - 8x + 816} + \sqrt{x^2 + 10x + 267} = \sqrt{2003}$ (Olympic 30 – 4 – 2003)

Giải

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy chọn

$$\vec{a} = (x - 2; 1), \quad \vec{b} = (x - 5; 5)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x - 2)^2 + 1} = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(x - 5)^2 + 25} = \sqrt{x^2 - 10x + 50}$$

$$\Rightarrow \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| = \left| \sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50} \right|$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (3; -4)$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Lại có: $\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}, k > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = k(x - 5) \\ 1 = 5k \\ k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ k = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x = \frac{5}{4}$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy chọn

$$\vec{a} = (4 - x; 20\sqrt{2}), \quad \vec{b} = (5 + x; 11\sqrt{2})$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(4 - x)^2 + 800} = \sqrt{x^2 - 8x + 816}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(5 + x)^2 + 242} = \sqrt{x^2 + 10x + 267}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| + |\vec{b}| = \sqrt{x^2 - 8x + 816} + \sqrt{x^2 + 10x + 267}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (9; 31\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{81 + 1922} = \sqrt{2003}$$

Lại có $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$, $k > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = k(5 + x) \\ 20\sqrt{2} = 11\sqrt{2}k \\ k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{56}{31} \\ k = \frac{20}{11} \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x = -\frac{56}{31}$.

Phương pháp 9: Phương pháp lượng giác hoá

Giải các phương trình:

1) $1 + \sqrt{1 - x^2} = 2x^2$ (1)

2) $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$ (2)

3) $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{(x^2 + 1)^2}{2x(1 - x^2)}$ (3)

4) $x^3 - 3x = \sqrt{x + 2}$ (4)

Giải

1) Ở bài này ta có thể giải bằng cách bình phương hai vế hoặc đặt ẩn phụ. Các phương pháp đó đều cùng mục đích làm mất căn thức. Nhưng trong bài toán này lại xuất hiện: $-1 \leq x \leq 1$ và có $1 - x^2$, do vậy ta nhớ đến đẳng thức lượng giác $1 - \sin^2 a = \cos^2 a$ hoặc $1 - \cos^2 a = \sin^2 a$. Vậy ta có thêm cách nữa sau đây:

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$ Đặt $x = \cos a$, $0 \leq a \leq \pi$

Phương trình (1) trở thành:

$$1 + \sqrt{1 - \cos^2 a} = 2\cos^2 a \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\sin^2 a} = 2\cos^2 a$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin a = 2(1 - \sin^2 a) \quad (\text{Do: } 0 \leq a \leq \pi \Rightarrow \sin a \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 a + \sin a - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = -1 \\ \sin a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

 $\sin a = -1$, loại

$$\sin a = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \cos a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 a} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chú ý: Ở phương trình này có thể giải bằng cách bình phương hoặc đặt ẩn phụ $t = \sqrt{1 - x^2}$.

2) Trong phương trình thấy có đặc điểm sau: $|x| > 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} < 1$ và có

$x^2 - 1 = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ nên ta nghĩ đến cách giải:

Điều kiện $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

Do $VP = \frac{35}{12} > 0 \Rightarrow VT = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) > 0 \Rightarrow x > 0$

Do đó ta giải phương trình với $x > 1$

Đặt $\frac{1}{x} = \cos a$, do $x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow 0 < a < \frac{\pi}{2}$

Phương trình (2) trở thành: $\frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a} - 1}} = \frac{35}{12}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos a \sqrt{\tan^2 a}} = \frac{35}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos a \cdot \tan a} = \frac{35}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\sin a} = \frac{35}{12}$$

$$\Leftrightarrow 12(\sin a + \cos a) = 35 \sin a \cdot \cos a$$

$$\Leftrightarrow 144(\sin a + \cos a)^2 = 1225(\sin a \cdot \cos a)^2$$

$$\Leftrightarrow 144(1 + 2\sin a \cdot \cos a) = 1225(\sin a \cdot \cos a)^2$$

$$\Leftrightarrow 1225(\sin a \cdot \cos a)^2 - 288(\sin a \cdot \cos a) - 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin a \cdot \cos a = \frac{12}{25} \\ \sin a \cdot \cos a = -\frac{12}{45} \end{cases}$$

$$\sin a \cdot \cos a = -\frac{12}{45}, \text{ loại vì } \begin{cases} \sin a > 0 \\ \cos a > 0 \end{cases}$$

$$\sin a \cdot \cos a = \frac{12}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 a \cdot \cos^2 a = \frac{144}{625}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 a (1 - \cos^2 a) = \frac{144}{625}$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 a - \cos^2 a - \frac{144}{625} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 a = \frac{9}{25} \\ \cos^2 a = \frac{16}{25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos a = \frac{3}{5} \\ \cos a = \frac{4}{5} \end{cases} \quad (\text{Vì } \cos a > 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = \frac{5}{3}, x = \frac{5}{4}$.

3) Trong bài toán này có xuất hiện $(1+x^2)$ vậy ta nhớ đến công thức lượng giác

cơ bản: $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$. Do vậy ta có cách giải:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \tan a = x, \text{ với } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos a > 0 \\ \sin a \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó, phương trình (3) trở thành:

$$\sqrt{1 + \tan^2 a} + \frac{1 + \tan^2 a}{2 \tan a} = \frac{(1 + \tan^2 a)^2}{2 \tan a (1 - \tan^2 a)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a}} + \frac{\cos a}{2 \cos^2 a \cdot \sin a} = \frac{\cos a}{2 \cos^4 a \left(1 - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}\right) \cdot \sin a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{2 \sin a \cdot \cos a} = \frac{1}{2 \cos a (\cos^2 a - \sin^2 a) \sin a}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2 \sin a} = \frac{1}{2 \sin a \cdot \cos 2a}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin a \cdot \cos 2a + \cos 2a = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin a \cdot \cos 2a - 2 \sin^2 a = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin a (\cos 2a - \sin a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2a = \sin a \quad (\text{Vì } \sin a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2a = \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \frac{\pi}{2} - a + k2\pi \\ 2a = -\frac{\pi}{2} + a + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ a = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{Do: } -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) Điều kiện $x \geq -2$

Với $x > 2 \Rightarrow x^3 - 3x = x + x(x^2 - 4) > x > \sqrt{x+2} \Rightarrow$ phương trình (4) vô nghiệm

Với $-2 \leq x \leq 2$, đặt $x = 2 \cos a, 0 \leq a \leq \pi$

Khi đó, phương trình (4) trở thành:

$$8\cos^2 a - 6\cos a = \sqrt{2 + 2\cos a} \Leftrightarrow 2\cos 3a = \sqrt{4\cos^2 \frac{a}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3a = \cos \frac{a}{2} \quad (\text{Vì } \cos \frac{a}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = \frac{a}{2} + k2\pi \\ 3a = -\frac{a}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4k\pi}{5} \\ a = \frac{4k\pi}{7} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Do } 0 \leq a \leq \pi \Rightarrow \text{chọn } a = 0, a = \frac{4\pi}{5}, a = \frac{4\pi}{7}$$

$$\Rightarrow x = 2, x = 2\cos \frac{4\pi}{5}, x = 2\cos \frac{4\pi}{7}$$

Kết luận: phương trình có ba nghiệm $x = 2, x = 2\cos \frac{4\pi}{5}, x = 2\cos \frac{4\pi}{7}$.

Chú ý:

Bài này phải để ý thật sâu ta mới phát hiện ra phương pháp lượng giác hoá.

Bài tập

Giải các phương trình

1) $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$

2) $\sqrt[3]{6x+1} = 2x$

3) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2})$

4) $\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2}{|x-1|}$

5) $\sqrt{2-2\sqrt{1-x^2}} = x(1+\sqrt{1-x^2})$

6) $\sqrt{\frac{1}{2} + x\sqrt{1-x^2}} = 1-2x^2$.

MỤC LỤC

Trang

Bài toán mở đầu	1
Phương pháp 1: Phương pháp biến đổi tương đương	4
Phương pháp 2: Phương pháp đặt ẩn phụ	14
Phương pháp 3: Phương pháp xuất hiện biểu thức liên hợp	23
Phương pháp 4: Phương pháp đưa về phương trình tích	28
Phương pháp 5: Phương pháp đặt ẩn phụ và đưa về hệ phương trình	30
Phương pháp 6: Phương pháp đánh giá	39
Phương pháp 7: Phương pháp hàm số	43
Phương pháp 8: Phương pháp vectơ	45
Phương pháp 9: Phương pháp lượng giác hoá	47

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Các sách bài tập toán lớp 10, lớp 11, lớp 12
2. Các sách giới thiệu đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng
3. Các sách về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình ...

KẾT LUẬN

Trên đây là sáng kiến kinh nghiệm do tôi đúc rút được trong quá trình giảng dạy môn Toán bậc THPT. Tôi thấy học sinh học tập rất hào hứng và say mê, nên kết quả thu được như sau: về bản thân càng yêu thích công việc giảng dạy và nghiên cứu khoa học; về học sinh thì học tốt hơn, nhiều học sinh bình thường trở lên khá, học sinh khá giỏi càng giỏi hơn. Và quan trọng hơn học sinh yêu thích môn toán và cố gắng học tốt các phần khác của môn toán nữa. Thầy trò luôn say mê học tập và nghiên cứu để đưa ra được những bài toán hay hơn.

Mặc dù bản thân đã rất cố gắng, nhưng trong quá trình viết sáng kiến kinh nghiệm có thể chưa tránh hết những thiếu sót đáng tiếc, rất mong nhận được góp ý xây dựng của các thầy giáo cô giáo, những người quan tâm đến môn toán và sự nghiệp giáo dục để sáng kiến kinh nghiệm này ngày càng hoàn thiện hơn và phổ biến hơn.

Xin trân trọng cảm ơn.

Hà Nội, ngày 19/5/2011

Người viết

Nguyễn Quốc Hoàn