

Năm học 2023-2024

Môn: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian  
giao đề

Câu 1. (4,5 điểm)

a. Tính giá trị biểu thức:  $A = (3 + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{2})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$

b. Rút gọn biểu thức  $C = (\sqrt{x - \sqrt{2024}} - \sqrt{x + \sqrt{2024}}) \sqrt{(x + \sqrt{x^2 - 2024})}$  (Với  $x \geq \sqrt{2024}$ )

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho  $0^\circ < x < 90^\circ$ . Chứng minh rằng  $\frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} + \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x}} = 2\sqrt{\tan^2 x + 1}$

b) Giải phương trình  $5x^2 - 4x\sqrt{x+3} - x + 4 = 0$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Tìm số nguyên n sao cho  $C = n^2 - 3n + 4$  là số chính phương

b) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn  $a + b + c = 2023$ .

Chứng minh rằng  $a^3 + b^3 + c^3 - 1$  chia hết cho 6

Câu 4. (6,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BC, AC.  
Đường thẳng qua C vuông góc với BC cắt DE tại F, H là hình chiếu của C lên BF

a) Chứng minh  $FH \cdot FB = FE \cdot FD$

b) Chứng minh tam giác ABH đồng dạng với tam giác ECH

c) Gọi I là trung điểm của FE. Chứng minh A, H, I thẳng hàng

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn  $a + b + c = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{a^2 - ab + 2b^2}{a + 2b} + \frac{2a^2 + 5c}{9}$

....HẾT ....



(Đáp án gồm 04 trang)

Môn: TOÁN

Câu	Nội dung	Điểm
<b>Câu 1</b>		
<b>a</b> (2,5 điểm)	$(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3-\sqrt{5}}$	0,5đ
	$= (3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)\sqrt{6-2\sqrt{5}}$	
	$= (3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$	0,5đ
	$= (3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2$	0,5 0,5 0,5
	$= (3+\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})$	
	$= 2.(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$	
$= 2.(9-5) = 8$		
<b>b</b> (2,0 điểm)	$C = (\sqrt{x-\sqrt{2024}} - \sqrt{x+\sqrt{2024}}) \sqrt{(x+\sqrt{x^2-2024})}$	0,5
	$\sqrt{2}C = (\sqrt{x-\sqrt{2024}} - \sqrt{x+\sqrt{2024}}) \sqrt{(2x+2\sqrt{x^2-2024})}$	
	$\sqrt{2}C = (\sqrt{x-\sqrt{2024}} - \sqrt{x+\sqrt{2024}}) \sqrt{(\sqrt{x-\sqrt{2024}} + \sqrt{x+\sqrt{2024}})^2}$	0,5
	$\sqrt{2}C = (\sqrt{x-\sqrt{2024}} - \sqrt{x+\sqrt{2024}}) (\sqrt{x-\sqrt{2024}} + \sqrt{x+\sqrt{2024}})$	0,5
	$\sqrt{2}C = x - \sqrt{2024} - x - \sqrt{2024}$	0,5
$C = -\sqrt{4048}$		
<b>Câu 2</b>		
<b>a</b> (2,0 điểm)	$VT = \frac{\sqrt{(1+\sin x)^2}}{\sqrt{1-\sin^2 x}} + \frac{\sqrt{(1-\sin x)^2}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	0,5đ
		0,5

	$\frac{1+\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} + \frac{1-\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{2}{\cos x}$ <p>VP <math>\dot{2} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1}</math></p> <p><math>\dot{2} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}</math></p> $= \frac{2}{\cos x}$	0,5đ  0,5															
<b>b(2,0 đ)</b>	<p>ĐK: <math>x \geq -3</math></p> $5x^2 - 4x\sqrt{x+3} - x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + x + 3) + (x^2 - 2x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+3})^2 + (x-1)^2 = 0$ <p>Lập luận được <math>x = 1</math> là nghiệm</p>	0,75 0,5 0,75															
<b>Câu 3</b>																	
<b>a (2,0 điểm)</b>	<p><math>n^2 - 3n + 4</math> là số chính phương</p> $\Rightarrow n^2 - 3n + 4 = a^2$ $\Rightarrow 4n^2 - 12n + 9 + 7 = 4a^2$ $\Rightarrow (2n-3)^2 - 4a^2 = -7$ $\Rightarrow (2n-3-2a)(2n-3+2a) = -7$ <p>Ta có bảng kết quả</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td><math>2n-3-2a</math></td> <td>1</td> <td>7</td> <td>-1</td> <td>-7</td> </tr> <tr> <td><math>2n-3+2a</math></td> <td>-7</td> <td>-1</td> <td>7</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>N</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>3</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table> <p>Vậy <math>n = 0</math> hoặc <math>n = 3</math></p>	$2n-3-2a$	1	7	-1	-7	$2n-3+2a$	-7	-1	7	1	N	0	3	3	0	0,25  0,5 0,5 0,5 0,25
$2n-3-2a$	1	7	-1	-7													
$2n-3+2a$	-7	-1	7	1													
N	0	3	3	0													
<b>b (2,0 điểm)</b>	<p>Ta có <math>a+b+c = 2023 \Rightarrow a+b+c-1 = 2022 \stackrel{\cdot}{:} 6</math></p> <p>Xét hiệu <math>(a^3 + b^3 + c^3 - 1) - (a+b+c-1) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c)</math></p> <p>Ta có <math>a^3 - a = a(a-1)(a+1)</math> là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6</p> <p>Tương tự <math>b^3 - b</math> và <math>c^3 - c</math> chia hết cho 6</p> $\Rightarrow (a^3 + b^3 + c^3 - 1) - (a+b+c-1) \text{ chia hết cho } 6$	0,5  0,5  0,5  0,5															

	Mà $a+b+c-1$ chia hết cho 6 $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 1$ chia hết cho 6	
<b>Câu 4</b>		
		0,5
<b>a)</b> <b>3,0đ</b>	<p>Ta có DE là đường trung bình của tam giác ABC  <math>\Rightarrow DE \parallel AB</math> mà AC vuông góc với AB  <math>\Rightarrow DE</math> vuông góc với AC</p> <p>Tam giác CDF vuông tại C có đường cao CE  <math>\Rightarrow CF^2 = FE \cdot FD</math> (1)</p> <p>Tam giác FBC vuông tại C có đường cao CH  <math>\Rightarrow CF^2 = FH \cdot FB</math> (2)</p> <p>Từ (1) và (2) <math>\Rightarrow FH \cdot FB = FE \cdot FD</math></p>	0,5 0,5 0,75 0,75 0,5
<b>b)</b> <b>2,0đ</b>	<p>Xét Tam giác ABC và tam giác ECF  Có Góc BAC = góc CEF = <math>90^\circ</math>  Góc ECF = góc ABC (cùng phụ với góc BCA)</p> <p><math>\Rightarrow</math> tam giác ABC đồng dạng với tam giác ECF (gg) <math>\Rightarrow \frac{AB}{EC} = \frac{BC}{CF}</math> (3)</p> <p>Tam giác BHC đồng dạng với BCF (gg) <math>\Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{BC}{CF}</math> (4)</p> <p>Từ (3) và (4) <math>\Rightarrow \frac{AB}{EC} = \frac{BH}{HC}</math></p>	0,5 0,5

	<p>Xét tam giác ABH và tam giác ECH có</p> <p>Góc ACH = góc ECH ( cùng phụ với hai gócBOA và COH bằng nhau)</p> <p>Và <math>\frac{AB}{EC} = \frac{BH}{HC} \Rightarrow</math> tam giác ABH đồng dạng với tam giác ECH (cgc)</p>	0,5 0,5
<b>c)</b> <b>1,0đ</b>	<p>Ta có Góc BHA = góc CHE ( Vì tam giác BHA đồng dạng với tam giác CHE) mà góc BHC = 90<sup>0</sup> =&gt; góc AHE = 90<sup>0</sup></p> <p>Xét Tam giác FHE và tam giác CHA có</p> <p>Góc AHC = góc EHF = 90<sup>0</sup> + góc EHC</p> <p>Góc HFE = góc HCA ( cùng phụ với góc COF)</p> <p>=&gt; tam giác AHC đồng dạng với tam giác FHE (cgc)</p> <p><math>\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{FH}{FE} \Rightarrow \frac{AH}{2AE} = \frac{FH}{2IE} \Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{FH}{IE}</math></p> <p>=&gt; tam giác EHI đồng dạng với AHE (cgc)</p> <p>=&gt; góc EHI = góc AHE = 90<sup>0</sup></p> <p>=&gt; A, H, I thẳng hàng</p>	0,5 0,5
<b>Câu 5</b>		
<b>(1,0 điểm)</b>	<p><math>P = \frac{a^2 - ab + 2b^2}{a + 2b} + \frac{2a^2 + 5c}{9}</math></p> <p><math>9P = \frac{9a^2 - 9ab + 18b^2}{a + 2b} + 2a^2 + 5c</math></p> <p><math>9P = \frac{(8a^2 + 8b^2) - 9ab + a^2 + 10b^2}{a + 2b} + (2a^2 + 2) + 5c - 2</math></p> <p><math>9P \geq \frac{(16ab) - 9ab + a^2 + 10b^2}{a + 2b} + (4a) + 5c - 2</math></p> <p><math>9P \geq \frac{7ab + a^2 + 10b^2}{a + 2b} + (4a) + 5c - 2</math></p> <p><math>9P \geq \frac{(a + 2b)(a + 5b)}{a + 2b} + (4a) + 5c - 2</math></p> <p><math>9P \geq a + 5b + 4a + 5c - 2 = 5.3 - 2 = 13</math></p> <p><math>\Rightarrow P \geq \frac{13}{9} \Rightarrow \text{Min } P = 13/9 \text{ khi } a=b=c=1</math></p>	0,25 0,25 0,25 0,25

..... **Hết** .....

*Chú ý: Học sinh có cách trình bày khác hợp lý, kết quả đúng vẫn cho điểm tối đa.  
Điểm thành phần giám khảo tự phân chia, thống nhất trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.*