BÀI 26. KHOẢNG CÁCH

CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là $a\sqrt{2}$ và tam giác SAC đều. Tính độ dài cạnh bên của hình chóp.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn A

Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên $AC = 2a$.

Tam giác SAC đều nên cạnh bên $SA = AC = 2a$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 3a, BD = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Biết AC vuông góc BD. Tính MN.

A. $MN = \frac{5a}{2}$. **B.** $MN = \frac{7a}{2}$. **C.** $MN = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

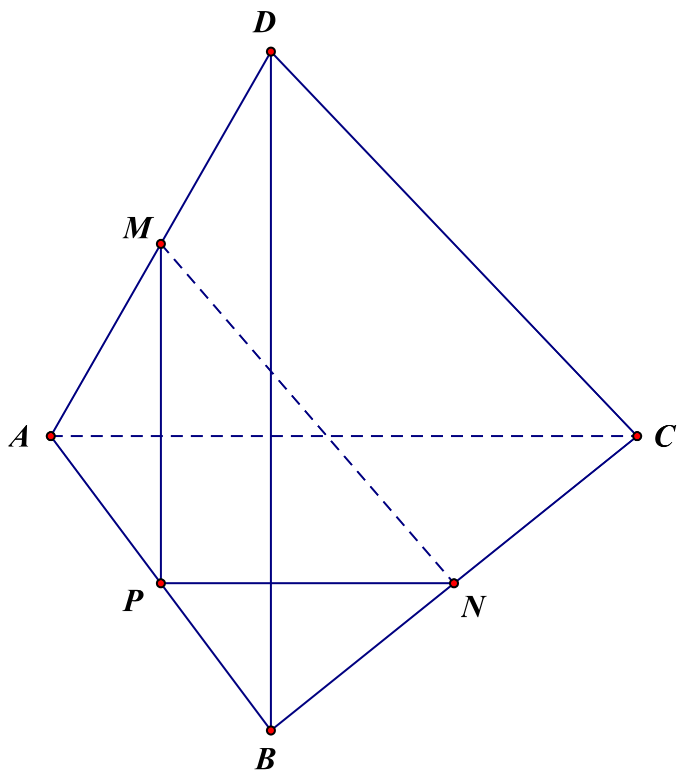
Lời giải

Chọn A

Gọi P là trung điểm AB

Ta có $\begin{cases} AC // PN \\ BD // PM \end{cases} \Rightarrow PN \perp PM$ và $PN = \frac{AC}{2} = \frac{3a}{2}; PM = \frac{BD}{2} = 2a$

$MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} = \frac{5a}{2}$

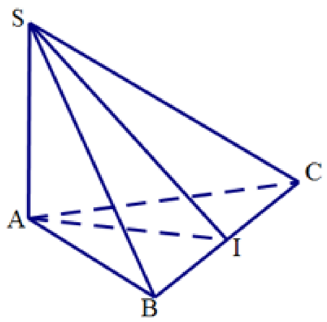


Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là 60°. Độ dài cạnh SA bằng

A. $\frac{3a}{2}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm BC, khi đó $BC \perp AI$

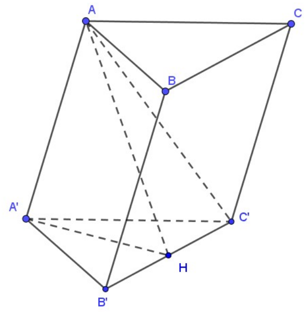
Mặt khác $BC \perp AI, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là $\widehat{SIA}$.

Tam giác SIA vuông tại A nên $\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = IA.\tan \widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $B'C'$. Tính theo a khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Lời giải

Chọn A.

Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° nên $\widehat{AA'H} = 30^\circ$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

$AH = AA'.\sin\widehat{AA'H} = AA'.\sin 30^\circ = \frac{a}{2}$.

Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 2a$, $CD = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Đường chéo AC' có độ dài bằng

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $a\sqrt{7}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

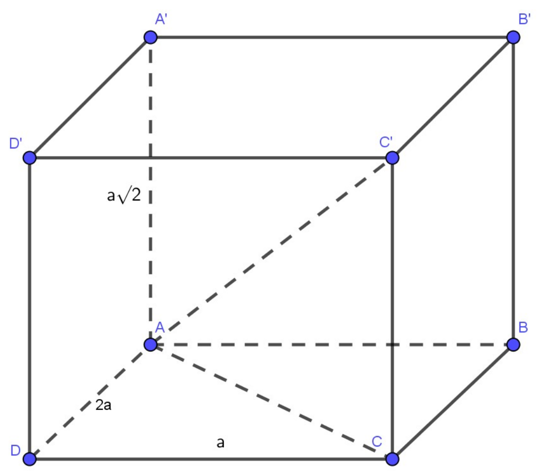
$AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{7}$.

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 2a$, $CD = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Đường chéo AC' có độ dài bằng:

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $a\sqrt{7}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

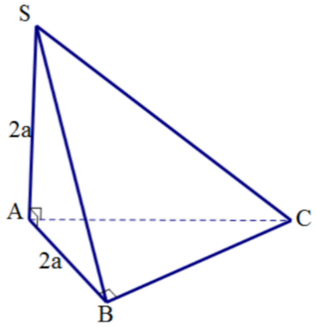
Lời giải

Chọn B



Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = a\sqrt{5}$. Nên $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{5a^2 + 2a^2} = a\sqrt{7}$.

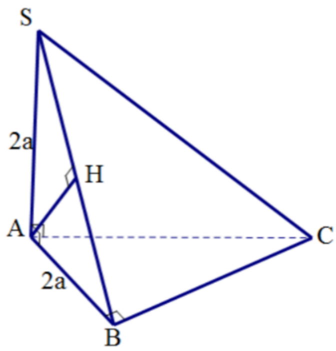
Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = AB = 2a$, tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng



A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm cạnh SB.

$$\begin{cases} AH \perp BC \left(BC \perp (SAB)\right) \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

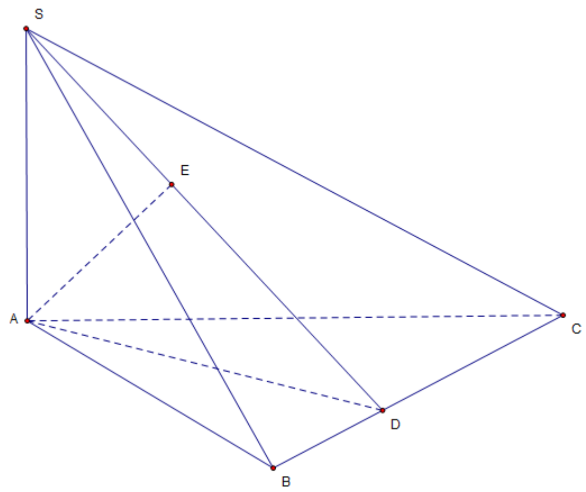
Do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $AH = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Câu 8. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{19}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{38}}{19}$.

Lời giải

Chọn B



Từ A kẻ $AD \perp BC$ mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$ mà $(SAD) \cap (SBC) = SD$

$\Rightarrow$ Từ A kẻ $AE \perp SD \Rightarrow AE \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(A;(SBC)) = AE$

Trong $\triangle ABC$ vuông tại A ta có: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{3a^2}$

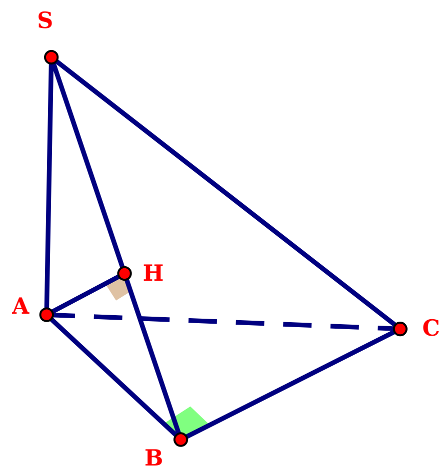
Trong $\triangle SAD$ vuông tại A ta có: $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AE = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $2SA = AC = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lờigiải

Chọn C



Kẻ $AH \perp SB\,(H \in SB)$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA\left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \subset (SAB)$.

Vì $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $d_{(A,(SBC))} = AH$.

Xét tam giác ABC vuông cân tại B, có $AC = 2a \Rightarrow AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{3}{2a^2}$

$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

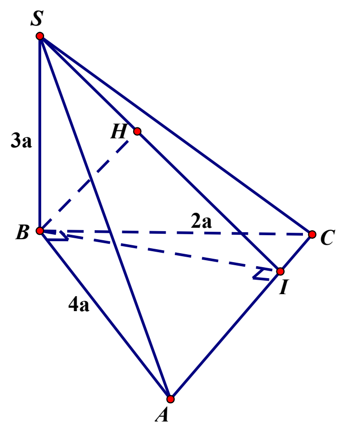
Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $d_{(A,(SBC))} = AH = \dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SB = 3a, AB = 4a, BC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\dfrac{12\sqrt{61}a}{61}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{14}a}{14}$. **C.** $\dfrac{4a}{5}$. **D.** $\dfrac{12\sqrt{29}a}{29}$.

Lời giải

Chọn A



Từ B kẻ $BI \perp AC$ nối S với I và kẻ $BH \perp SI$ dễ thấy BH là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC)

Ta có $B.SAC$ là tam diện vuông tại B nên:

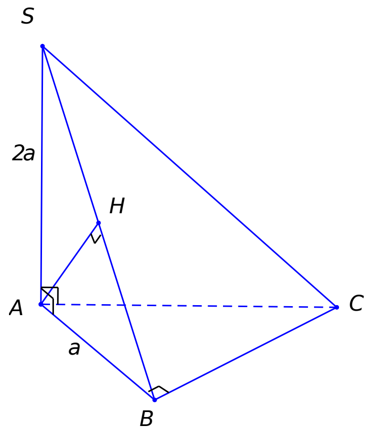
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BS^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{16a^2} = \frac{61}{144a^2} \Rightarrow BH = \frac{12\sqrt{61}a}{61}$$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Kẻ $AH \perp SB$. Khi đó $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

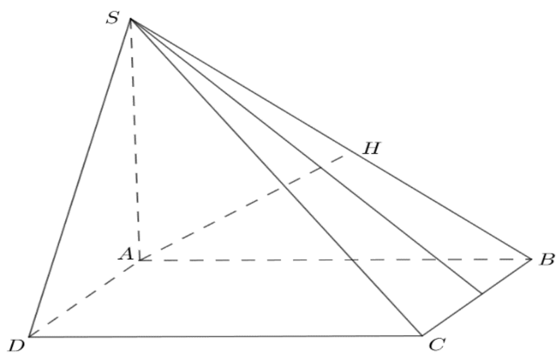
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{4a^2}{5} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow \begin{cases} (SAB) \perp (SBC) \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \end{cases}$

Trong mặt phẳng (SAB): Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH = d(A;(SBC))$

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{4}{3a^2}.$$

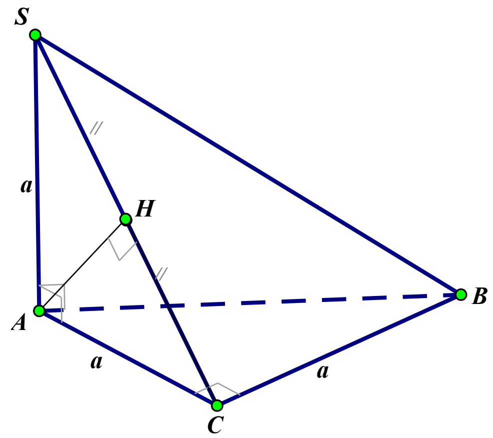
$$\Rightarrow d\left(A;(SBC)\right)=AH=\frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $C, BC=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $\begin{cases} BC\perp AC \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)$

Khi đó $(SBC)\perp(SAC)$ theo giao tuyến là SC.

Trong (SAC), kẻ $AH\perp SC$ tại H suy ra $AH\perp(SBC)$ tại H.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH.

Ta có $AC=BC=a$, $SA=a$ nên tam giác SAC vuông cân tại A.

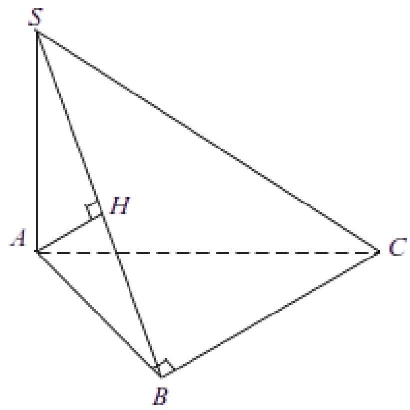
Suy ra $AH=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $AH \perp SB$ trong mặt phẳng (SBC)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

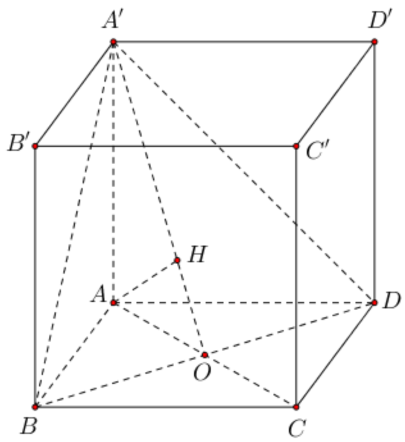
Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

A. $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d = \frac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $d = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'O)$

Suy ra $(BDA') \perp (AA'O)$.

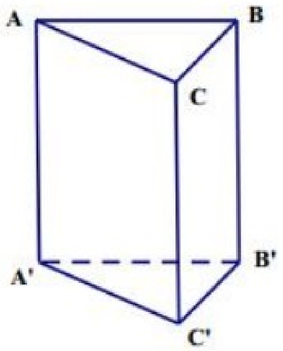
Kẻ $AH \perp A'O \Rightarrow AH \perp (BDA')$.

Suy ra $AH = d(A,(BDA'))$.

Xét tam giác $AA'O$ vuông tại A có $AA'=1$, $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $AH=\frac{AA'.AO}{\sqrt{AA'^2+AO^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d\left(A,(BDA')\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16. Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC=2a$, $AB=a\sqrt{3}$, (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là



A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Vì lăng trụ $ABCA'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $(ABC)\perp(BCC'B')$.

Do đó kẻ $AH\perp BC\Rightarrow AH\perp(BCC'B')$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là đoạn AH.

Ta có $AC=\sqrt{4a^2-3a^2}=a$.

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

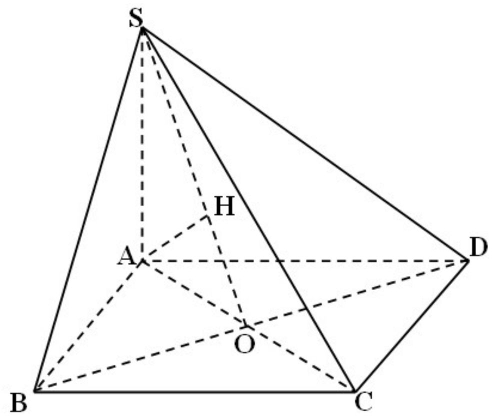
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt đáy. Hỏi mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $d\left(B,(SCD)\right)=2d\left(O,(SCD)\right)$. **B.** $d\left(A,(SBD)\right)=d\left(B,(SAC)\right)$.

C. $d\left(C,(SAB)\right)=d\left(C,(SAD)\right)$. **D.** $d\left(S,(ABCD)\right)=SA$.

Lời giải

Chọn B



- Vì O là trung điểm của BD nên $d\left(B,(SCD)\right)=2d\left(O,(SCD)\right)$. Do đó câu A đúng.

- Kẻ AH vuông góc với SO mà hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau theo giao tuyến SO, suy ra AH vuông góc với mặt phẳng (SBD).

Ta có $d\left(A,(SBD)\right)=AH<OA$ và $d\left(B,(SAC)\right)=OB=OA$ nên $d\left(A,(SBD)\right)<d\left(B,(SAC)\right)$ Do đó câu B sai.

- Ta có $d\left(C,(SAB)\right)=CB$ và $d\left(C,(SAD)\right)=CD$ nên $d\left(C,(SAB)\right)=d\left(C,(SAD)\right)$. Do đó câu C đúng.

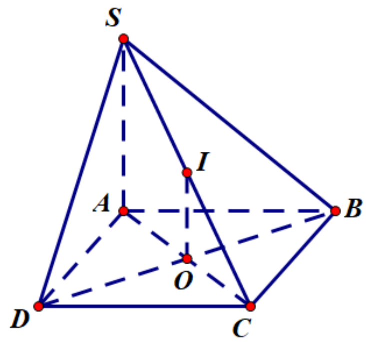
- Vì SA vuông góc với mặt đáy nên $d\left(S,(ABCD)\right)=SA$. Do đó câu D đúng.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $SA\perp(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

A. IB. **B.** IC. **C.** IA. **D.** IO.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết suy ra OI là đường trung bình của ΔSAC, do đó $OI\,//\,SA$.

Ta có $\begin{cases} IO\,//\,SA \\ SA\perp(ABCD) \end{cases} \Rightarrow IO\perp(ABCD)$.

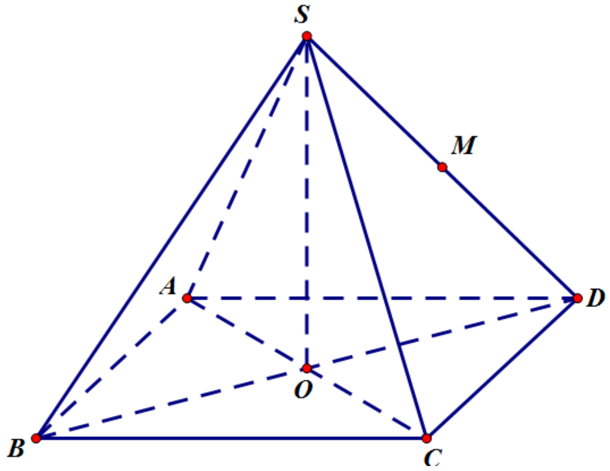
Vậy $d\left(I,(ABCD)\right)=OI$.

Câu 19. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi M là trung điểm của SD. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



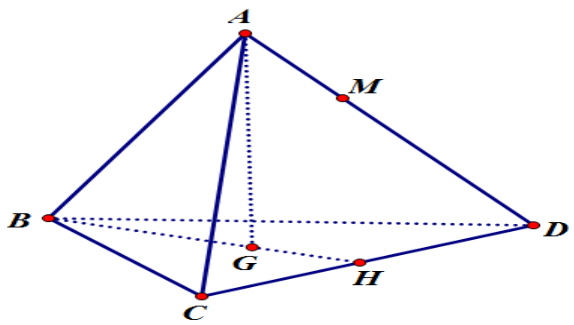
$d\left(M,(SAC)\right)=\frac{1}{2}d\left(D,(SAC)\right)=\frac{1}{2}DO=\frac{1}{4}BD=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 20. Cho tứ diện đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $DM=2MA$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (BCD).

A. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác BCD, AG là đường cao của tứ diện

Xét tam giác đều BCD có $BH=2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow BG=\frac{2}{3}BH=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Xét tam giác vuông ABG có $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a.$

$d(M;(BCD))=\frac{2}{3}d(A;(BCD))=\frac{2}{3}AG=\frac{4\sqrt{6}}{9}a.$

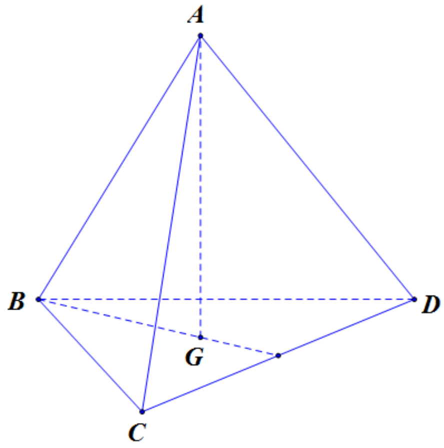
Mà

Câu 21. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Ta có $AG \perp (BCD)$ tại G nên $d(A,(BCD)) = AG$.

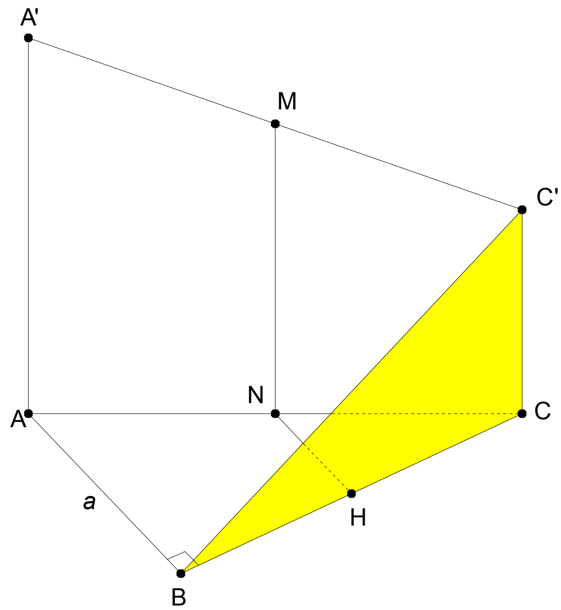
Xét tam giác ABG vuông tại G có $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 22. Trong không gian cho tam giác *ABC* có $\widehat{ABC} = 90^\circ, AB = a$. Dựng *AA', CC'* ở cùng một phía và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ trung điểm của *A'C'* đến (BCC').

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A



• Gọi *M, N, H* lần lượt là trung điểm của *A'C', AC, BC.*

$\Rightarrow MN // CC' \subset (BCC') \Rightarrow MN // (BCC')$

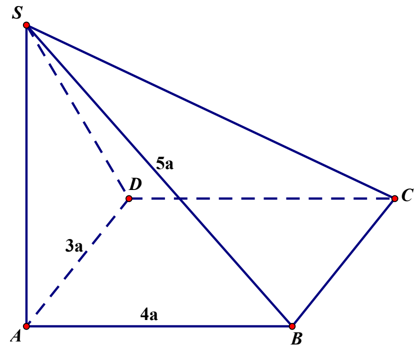
$\Rightarrow d\left(M;(BCC')\right)=d\left(N;(BCC')\right)=NH=\dfrac{a}{2}$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB=4a$, $AD=3a$, $SB=5a$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

A. $\dfrac{12\sqrt{41}\,a}{41}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{41}\,a}{12}$. **C.** $\dfrac{12\sqrt{61}\,a}{61}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{61}\,a}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{(5a)^2-(4a)^2}=3a$.

Ta có $d\left(C,(SBD)\right)=d\left(A,(SBD)\right)=h$.

Tứ diện $ASBD$ có các cạnh AB,AD,AS đôi một vuông góc với nhau và $AB=4a, AD=3a, AS=3a$ nên ta có

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{9a^2}=\frac{41}{144a^2}\Rightarrow h=\frac{12a\sqrt{41}}{41}$$

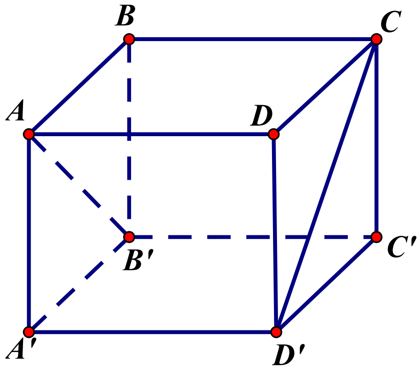
Vậy $d\left(C,(SBD)\right)=\dfrac{12a\sqrt{41}}{41}$.

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD'.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn B



* Do $AB' // (CDD'C')$ nên ta có:

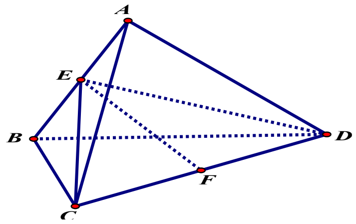
$$d(AB';CD') = d(AB';(CDD'C')) = d(A;(CDD'C')) = AD = a.$$

Câu 25. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Do tứ diện $ABCD$ đều cạnh a nên $DE = CE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.Xét trong tam giác cân ECD tại E có $EF^2 = ED^2 - FD^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$.

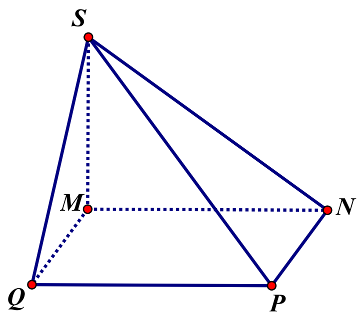
Do tam giác ABC, ABD đều nên $ED \perp AB, EC \perp AB$ suy ra $EF \perp AB$ mà tam giác ECD cân tại E nên $EF \perp CD$. Vậy khoảng cách giữa AB và CD bằng độ dài đoạn EF. Tức bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình vuông, $MN = 3a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$, biết SM vuông góc với đáy, $SM = 6a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng NP và SQ bằng

A. $6a$. ***B.*** $3a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $3a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



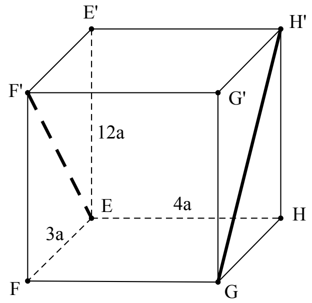
Do $MN \perp SM$ (giả thiết SM vuông góc với đáy) và $MN \perp MQ$ (do $MNPQ$ là hình vuông) vậy $MN \perp (SMQ)$ suy ra $d(NP,SQ) = \text{d}(NP,(SMQ)) = \text{d}(N,(SMQ)) = NM = 3a$.

Câu 27. Cho hình hộp chữ nhật $EFGH.E'F'G'H'$ có $EF = 3a, EH = 4a, EE' = 12a,$ với $0 < a \in \mathbb{R}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng EF' và GH' bằng

A. $12a$. **B.** $3a$. **C.** $2a$. **D.** $4a$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} EF' \subset (EFF'E') \\ GH' \subset (GHH'G') \\ (EFF'E') // (GHH'G') \end{cases} \Rightarrow d(EF', GH') = d((EFF'E'), (GHH'G')) = d(E, (GHH'G'))$.

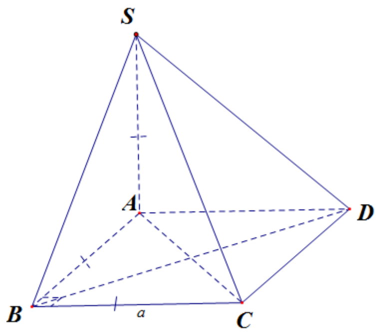
Vì $EH \perp (GHH'G') \Rightarrow d(E, (GHH'G')) = EH = 4a$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. $d = 2a$. **B.** $d = a\sqrt{3}$. **C.** $d = a\sqrt{2}$. **D.** $d = a$.

Lời giải

Chọn D



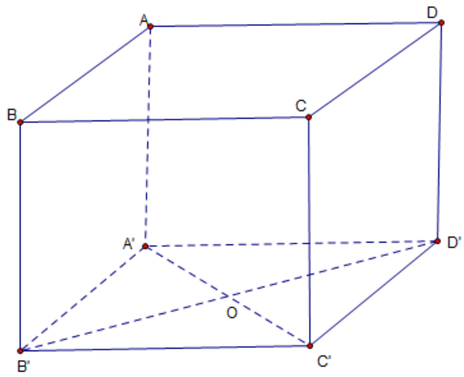
Vì $CD // AB$ nên $CD // (SAB)$. Do đó $d(CD; SB) = d(CD; (SAB)) = d(D; (SAB)) = DA = a$.

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C'$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = A'C' \cap B'D'$.

Ta có $BB' \perp B'O,\ A'C' \perp B'O \Rightarrow B'O = d\left(BB', A'C'\right)$.

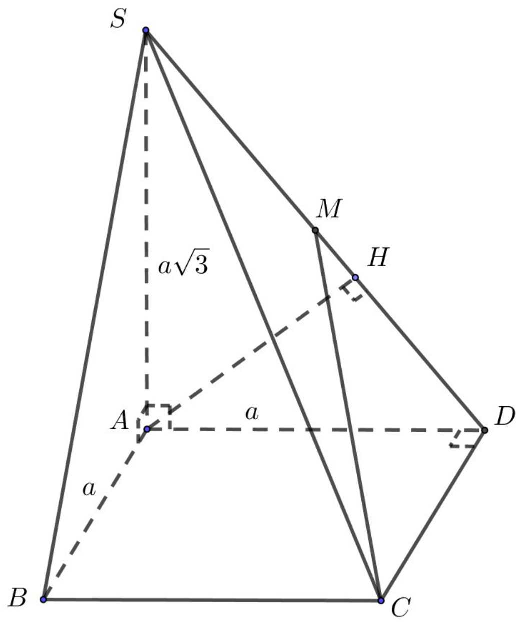
$B'O = \frac{1}{2}B'D' = \frac{1}{2}\sqrt{B'C'^2 + C'D'^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và CM.

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



*) Trong tam giác ΔSAD, kẻ đường cao $AH \Rightarrow AH \perp SD$ (1).

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).

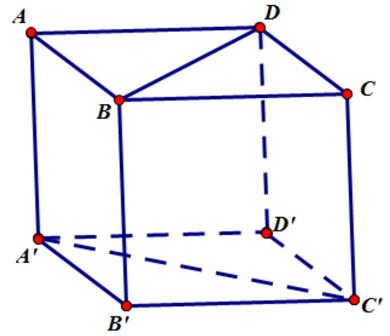
Từ (1), (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$, mà $CM \subset (SCD)$

$\Rightarrow d(AB, CM) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH$.

*) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 31. Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A. $\sqrt{3}a$.   **B.** a.   **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.   **D.** $\sqrt{2}a$.

Lời giải

Chọn B

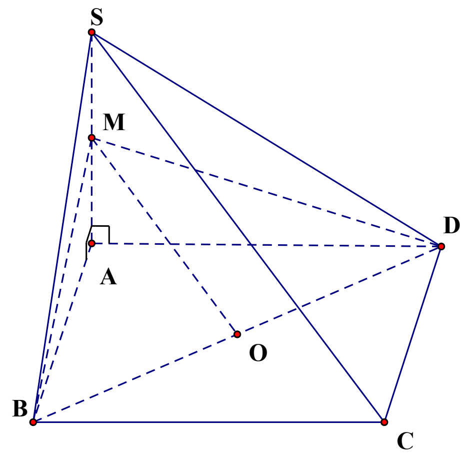
Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BD và $A'C'$ bằng khoảng cách giữa mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ thứ tự chứa BD và $A'C'$. Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng a.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD, SC bằng

A. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$.   **B.** $\frac{4\sqrt{21}a}{21}$.   **C.** $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$.   **D.** $\frac{a\sqrt{30}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình chữ nhật và M là trung điểm SA, ta có: $SC // (BMD)$.

Do đó $d(SC, BD) = d(SC, (BMD)) = d(S, (BMD)) = d(A, (BMD)) = h$

Ta có: AM, AB, AD đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2}$$

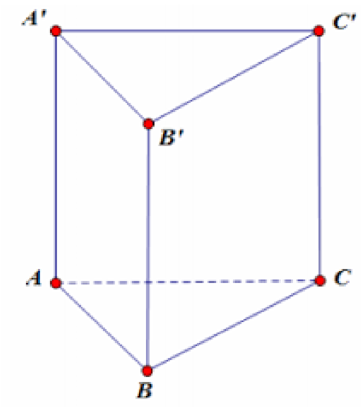
Suy ra: $h = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 33. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách giữa AB' và CC' bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AB.

Ta có: $CC'//BB'$ nên $CC'//(ABB'A')$.

Vì $AB' \subset (ABB'A')$ nên $d(CC', AB') = d(CC', (ABB'A')) = CI$.

Do lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ nên tam giác ABC đều cạnh a nên $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

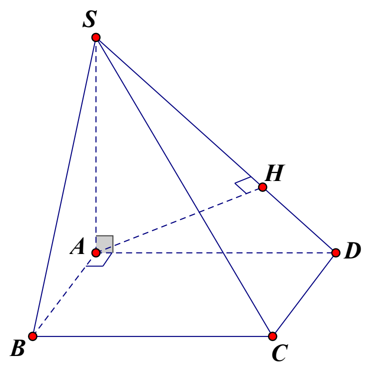
Nên $d(CC', AB') = CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 34. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác SAD kẻ đường cao AH ta có

$$AD.AS = AH.SD \Rightarrow AH = \frac{AD.AS}{SD} = \frac{2a.a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Dễ thấy AH chính là đường vuông góc chung của AB và SD

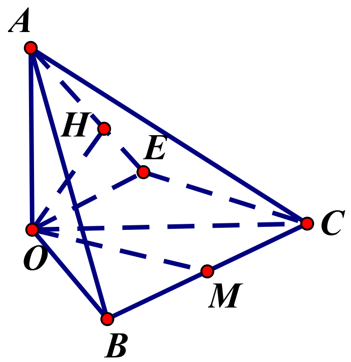
Vậy $d\left(AB,SD\right)=AH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 35. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=a,\ OB=OC=2a.$ Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



- Ta có được $OA\perp\left(OBC\right)$.
- Trong mặt phẳng (OBC), dựng điểm E sao cho $OMCE$ là hình bình hành thì OMCE cũng là hình vuông (do OBC là tam giác vuông cân tại O).
- Lại có: $\begin{cases} CE\perp OE \\ CE\perp OA \end{cases}\Rightarrow CE\perp\left(AOE\right)$.
- Kẻ $OH\perp AE$ tại H thì $OH\perp\left(AEC\right)$.

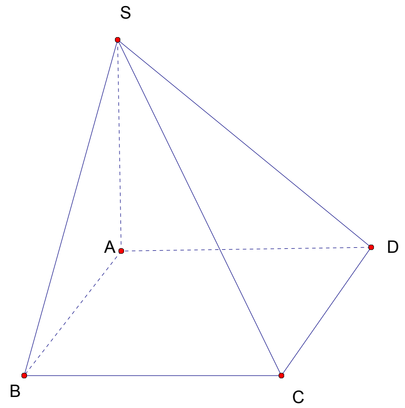
Vì $OM//\left(AEC\right)$ nên $d\left(AC;OM\right)=d\left(O;\left(ACE\right)\right)=OH=\dfrac{OA.OE}{\sqrt{OA^2+OE^2}}=\dfrac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+2a^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} DA \perp SA \\ DA \perp AB \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$.

Mặt khác $\begin{cases} CD \not\subset (SAB) \\ CD // AB \end{cases} \Rightarrow CD // (SAB)$.

Từ đó suy ra khoảng cách giữa SB và CD bằng khoảng cách giữa (SAB) và CD và bằng DA.

Tứ giác *ABCD* là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$ suy ra $DA = \sqrt{2}a$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là $a\sqrt{2}$.

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều cạnh bằng 2, tam giác ABC vuông tại B, $BC = \sqrt{3}$.

Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD bằng $\frac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó độ dài cạnh CD là

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Dựng hình chữ nhật $ABCE$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CE, $MH \perp DN$ tại H

Ta có

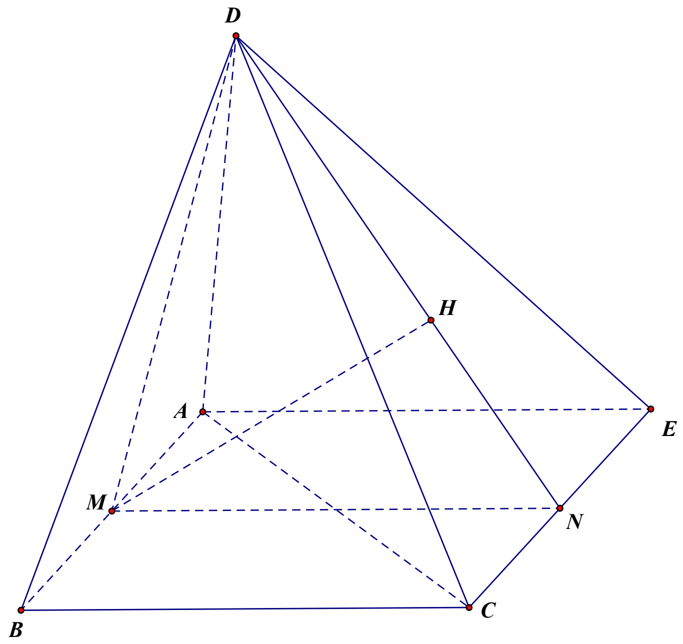
$$\begin{cases} AB \perp DM \\ AB \perp MN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DMN) \Rightarrow CE \perp (DMN) \Rightarrow MH \perp CE$$

$\begin{cases} MH \perp DN \\ MH \perp CE \end{cases} \Rightarrow MH \perp (CDE)$ tại H $\Rightarrow d(AB, CD) = d\left[M; (CDE)\right] = MH = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Tam giác DMN có $DM = MN = \sqrt{3}$ $\Rightarrow H$ là trung điểm DN, mà $HN = \sqrt{MN^2 - MH^2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow DN = 1$

Xét tam giác DNC vuông tại N $CD = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{2}$.

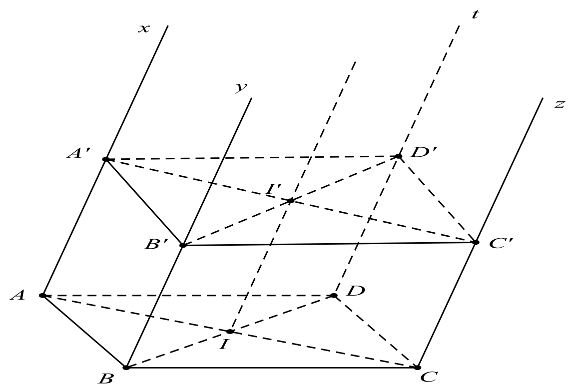


Câu 38. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A,B,C,D lần lượt vẽ bốn nửa đường thẳng Ax,By,Cz,Dt cùng phía so với $(ABCD)$ song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (β) lần lượt cắt các nửa đường thẳng Ax,By,Cz,Dt tại A',B',C',D' thỏa mãn $AA'=2, BB'=3, CC'=4$. Hãy tính DD'.

A. 3. **B.** 7. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C



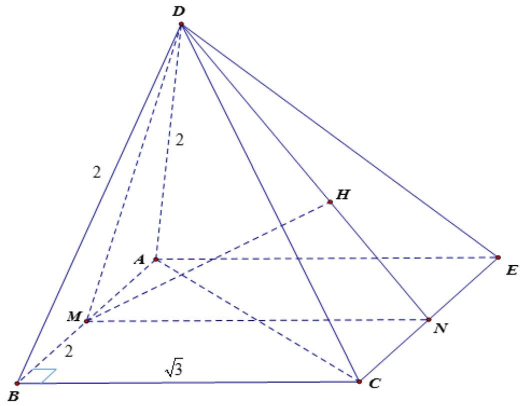
Gọi I là giao của AC và BD. I' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khi đó II' là đường trung bình của các hình thang $ACC'A'$ và $BDD'B'$. Theo tính chất của hình thang ta có $2II' = BB' + DD' = AA' + CC' = 2 + 4 = 6 \Rightarrow DD' = 3$.

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều cạnh bằng 2, tam giác ABC vuông tại B, $BC = \sqrt{3}$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD bằng $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó độ dài cạnh CD là

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình chữ nhật $ABCE$, gọi M,N lần lượt là trung điểm AB,CE, $MH\perp DN$ tại H

Ta có

$\begin{cases} AB\perp DM \\ AB\perp MN \end{cases} \Rightarrow AB\perp (DMN) \Rightarrow CE\perp (DMN) \Rightarrow MH\perp CE$

$\begin{cases} MH\perp DN \\ MH\perp CE \end{cases} \Rightarrow MH\perp (CDE)$ tại H $\Rightarrow d(AB,CD)=d\left[M;(CDE)\right]=MH=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

Tam giác DMN có $DM=MN=\sqrt{3}$ $\Rightarrow H$ là trung điểm DN, mà $HN=\sqrt{MN^2-MH^2}=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow DN=1$

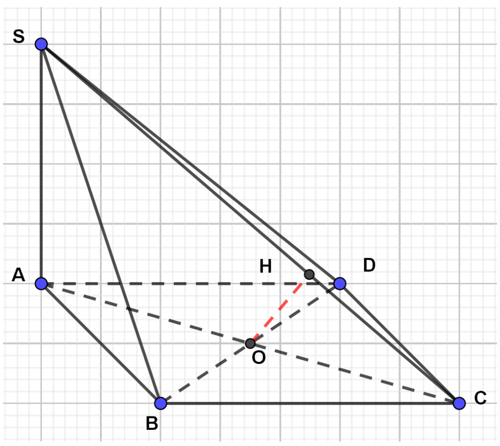
Xét tam giác DNC vuông tại N $CD=\sqrt{DN^2+CN^2}=\sqrt{2}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp (ABCD)$, $SA=2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

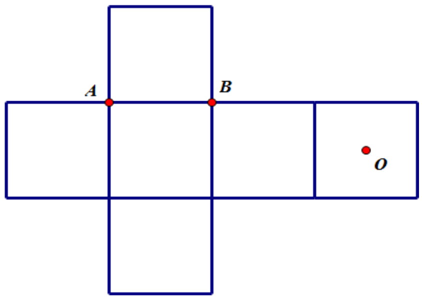


Kẻ $OH\perp SC \Rightarrow d(O,SC)=OH$.

$OC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=a\sqrt{6}$

$\Delta OHC \approx \Delta SAC \Rightarrow \dfrac{OH}{OC}=\dfrac{SA}{SC} \Rightarrow OH=\dfrac{OC.SA}{SC}=\dfrac{a\sqrt{2}.2a}{2a\sqrt{6}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 41. Một hình lập phương được tạo thành khi xếp miếng bìa carton như hình vẽ bên.

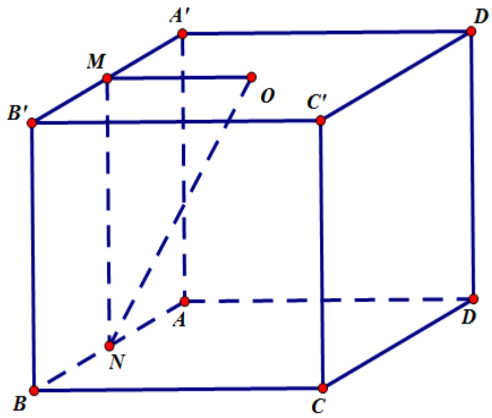


Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB sau khi xếp, biết rằng độ dài đoạn thẳng AB bằng $2a$.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Sau khi xếp miếng bìa lại ta được hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$, O là tâm của $A'B'C'D'$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, A'B$.

$\Rightarrow MN = AA' = 2a$, $OM = \dfrac{1}{2}A'D' = a$.

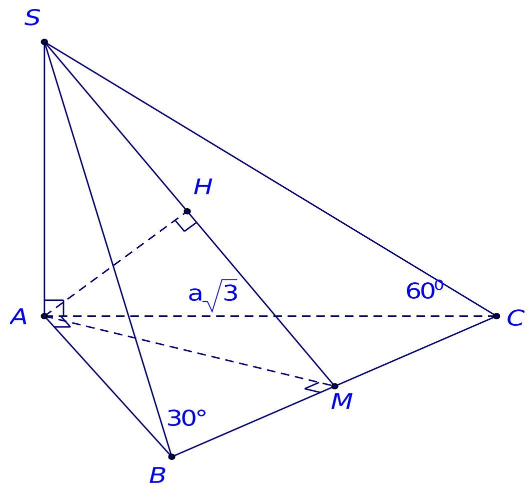
Lại có: $\begin{cases} AB \perp OM \\ AB \perp MN \end{cases} \Rightarrow AB \perp ON \Rightarrow d(O, AB) = ON = \sqrt{OM^2 + MN^2} = a\sqrt{5}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Góc giữa SC và mặt phẳng ABC bằng 60°. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$. **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{5}}$

Lời giải

Chọn D



Dựng $AM \perp BC$; $AH \perp SM$

Ta có:

$\left.\begin{matrix} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAM)$ $\Rightarrow AH \perp BC$ và $AH \perp SM$ $\Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(A; SBC) = AH$

Tam giác SAC vuông tại A $\Rightarrow SA = AC.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3a$

$\Delta SAC = \Delta BAC$ $(g - c - g)$ $\Rightarrow SA = BA = 3a$

Tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{9a^2}$

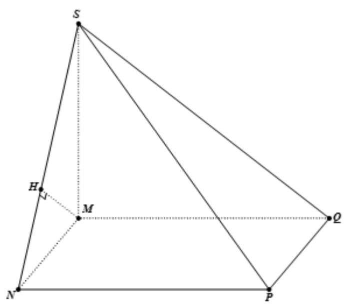
Tam giác SAM vuông tại A $\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{4}{9a^2} = \dfrac{5}{9a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$

Câu 43. Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình vuông cạnh $MN = 3a\sqrt{2}$, SM vuông góc với mặt phẳng đáy, $SM = 3a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SNP) bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $2a\sqrt{6}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của M trên SN. Ta có:

$\begin{cases} NP \perp MN \\ NP \perp SM \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SMN)$ mà $SH \subset (SMN) \Rightarrow NP \perp SH$.

$\begin{cases} SH \perp NP \\ SH \perp SN \end{cases} \Rightarrow SH \perp (SNP)$ hay khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SNP) bằng MH.

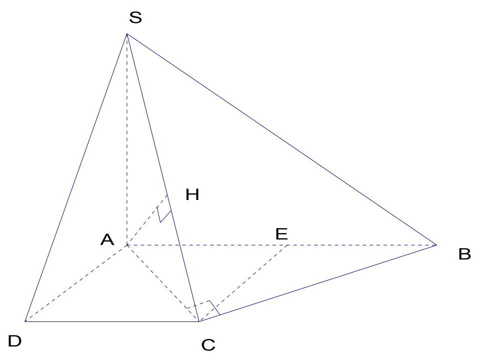
Trong tam giác vuông SMN có $MH = \dfrac{MN.SM}{\sqrt{MN^2 + SM^2}} = \dfrac{3a.3a\sqrt{2}}{\sqrt{9a^2 + 18a^2}} = a\sqrt{6}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = 2a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D, $AB = 2a, AD = CD = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



+ Lấy E là trung điểm AB $\Rightarrow$ tứ giác $ADCE$ là hình vuông cạnh bằng a

$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

+ ΔBCE vuông cân $CE \perp EB, CE = EB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

ΔACB có: $AC^2 + BC^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 4a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta ACB$ vuông tại C

$\Rightarrow BC \perp AC$ (1)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAC)$

+ Dựng $AH \perp SC$, có $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (SAC), (SAC) \supset AH$)

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = AH$

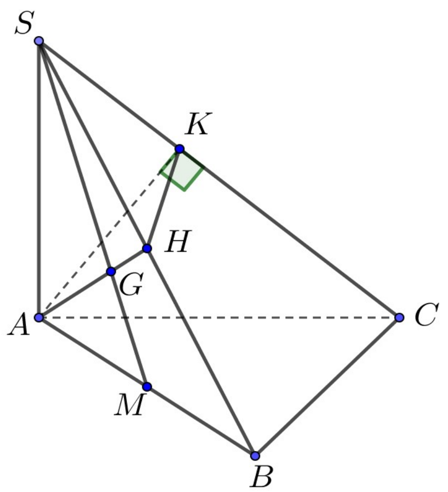
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{3}} = d\left(A;(SBC)\right)$$

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và K là hình chiếu của điểm A trên cạnh SC. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK). Tính $\cos\alpha$, biết rằng khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (KBC) bằng $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC vuông cân tại B mà $AC = a\sqrt{2}$ suy ra $AB = BC = a$.

Do $BC \perp BA$, $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$) nên $BC \perp (SAB)$.

Gọi H là hình chiếu của điểm A lên SB, thì $AH \perp SB$, $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$) nên $AH \perp (SAB)$ hay $AH = d(A,(SBC)) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAB với đường cao AH, ta được:

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{a^2}$ $\Rightarrow SA = a$ nên tam giác SAB vuông cân tại A do đó trọng tâm G thuộc AH.

Từ $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ và $AK \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AGK)$.

Vì $SC \perp (AGK)$ và $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AGK) và (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng SC và SA hay $\alpha = \widehat{CSA}$.

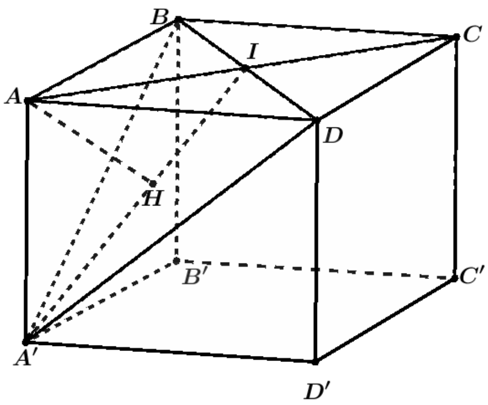
Theo trên ta có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$ suy ra $\cos\alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $I = AC \cap BD$ và H là hình chiếu của A lên đường thẳng $A'I$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AI \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp AH$

$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp A'I \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(A'BD)) = AH$.

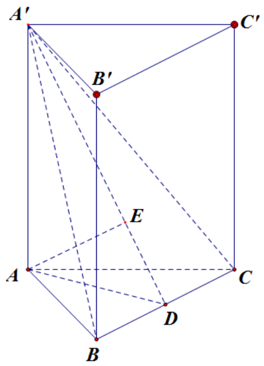
Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{12}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi D là trung điểm cạnh BC, E là hình chiếu của A lên $A'D$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADA') \Rightarrow BC \perp AE$.

$\begin{cases} AE \perp BC \\ AE \perp A'D \end{cases} \Rightarrow AE \perp (A'BC)$, suy ra $d(A,(A'BC)) = AE$.

Trong tam giác $A'AD$ có: $AA' = a, AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

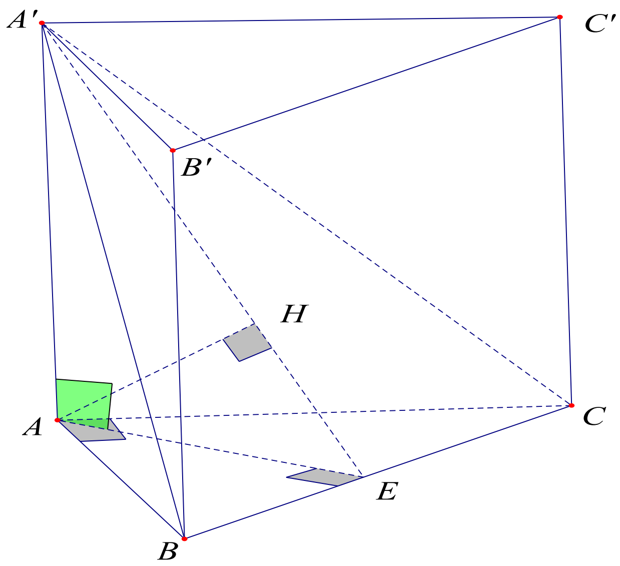
$$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{7}{3a^2} \Rightarrow AE=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 48. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AA'=AC=a$ và $AB=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $AE\perp BC\ (E\in BC)$; $AH\perp A'E\ (H\in A'E)$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} BC\perp AE \\ BC\perp AA' \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp (A'AE)\Rightarrow BC\perp AH$.

Mà $AH\perp A'E\Rightarrow AH\perp (A'BC)$.

Do đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng AH.

Xét tam giác ABC vuông tại A ta có $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{4}{3a^2}$.

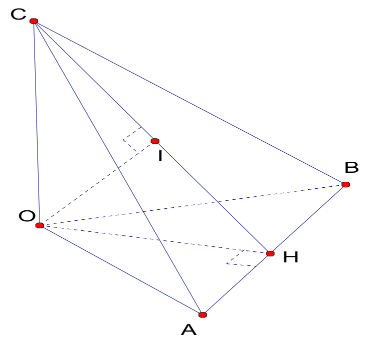
Xét tam giác $A'AE$ vuông tại A ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{A'A^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 49. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Biết $OA=a, OB=2a, OC=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. **C.** $\frac{a\sqrt{17}}{\sqrt{19}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác OAB dựng đường cao OH, trong tam giác OCH dựng đường cao $OI \Rightarrow OI \perp CH(1)$. Mặt khác ta có $\begin{cases} BC \perp OH \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OI(2)$. Từ (1) và (2) suy ra $OI \perp (ABC) \Rightarrow d(O;(ABC)) = OI$.

Xét tam giác OAB vuông tại O có $OA = a, OB = 2a \Rightarrow OH = \sqrt{\dfrac{OA^2.OB^2}{OA^2 + OB^2}} = \sqrt{\dfrac{4a^4}{5a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác OCH vuông tại O có

$OC = a\sqrt{3}, OH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow OI = \sqrt{\dfrac{OC^2.OI^2}{OC^2 + OI^2}} = \sqrt{\dfrac{12a^4}{19a^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Vậy $d(O;(ABC)) = OI = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Câu 50. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD). Biết khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD)$ lần lượt là $1; 2; \sqrt{5}$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAD).

A. $d = \sqrt{\dfrac{19}{20}}$.

B. $d = \sqrt{\dfrac{20}{19}}$.

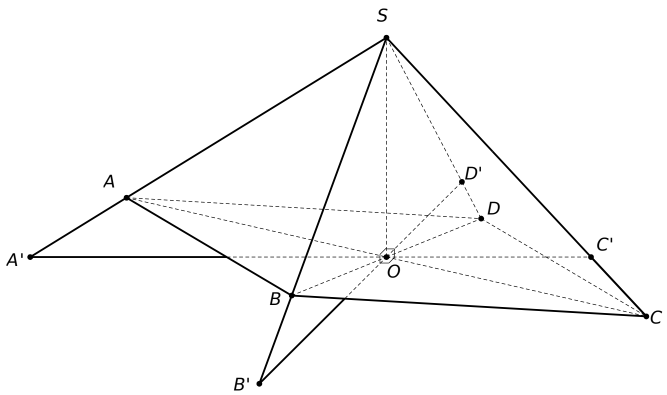
C. $d = \sqrt{2}$.

D. $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:



Gọi p,q,u,v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD),(SDA).$

Trong mặt phẳng (SAC) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SA,SC lần lượt tại A',C'

Trong mặt phẳng (SBD) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SB,SD lần lượt tại B',D'.

Do $(SAC)\perp(SBD),(SAC)\cap(SBD)=SO,A'C'\perp SO$ nên $A'C'\perp(SBD)$

$\Rightarrow A'C'\perp B'D'$.

Khi đó tứ diện $OSA'B'$ có OS,OA',OB' đôi một vuông góc nên ta chứng minh được

$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OA'^2}+\frac{1}{OB'^2}(1)$

Chứng minh tương tự: $\frac{1}{q^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OB'^2}+\frac{1}{OC'^2}(2)$;

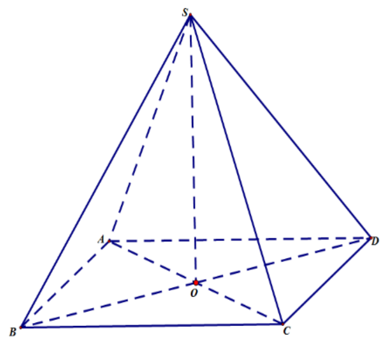
$\frac{1}{u^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OC'^2}+\frac{1}{OD'^2}(3)$

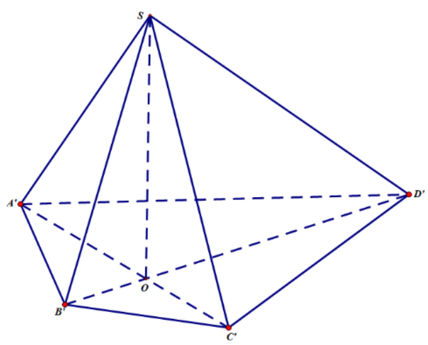
$\frac{1}{v^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OD'^2}+\frac{1}{OA'^2}(4)$

Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta có $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{u^2}=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{v^2}.$

Với $p=1;q=2;u=\sqrt{5}\Rightarrow\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{v^2}\Rightarrow\frac{1}{v^2}=\frac{19}{20}\Rightarrow d=v=\sqrt{\frac{20}{19}}$.

Cách 2:





Dựng mặt phẳng qua O, vuông góc với SO, cắt các đường thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt tại $A', B', C', D' \Rightarrow SO \perp (A'B'C'D')$.

Vì $(SAC) \perp (SBD) \Rightarrow A'C' \perp B'D'$.

Ta có: $\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} = \frac{1}{d(O,(SA'B'))} = 1$ (1).

$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{d(O,(SB'C'))} = \frac{1}{4}$ (2).

$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OD'^2} = \frac{1}{d(O,(SC'D'))} = \frac{1}{5}$ (3).

$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OD'^2} + \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{d(O,(SD'A'))} = \frac{1}{d^2}$ (4).

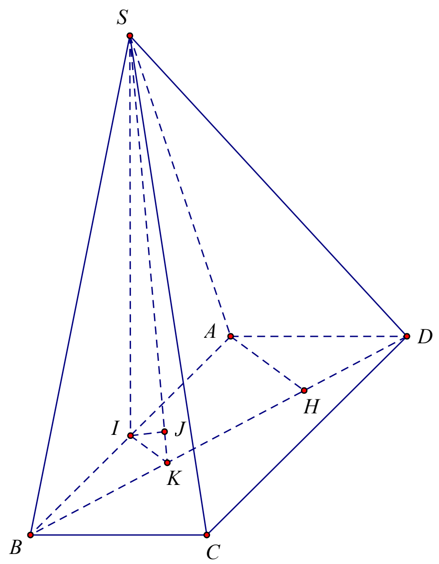
$(1),(2),(3),(4) \Rightarrow 1 + \frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{d^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{20}{19}}$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$ Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $SI \perp AB$.

Do tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$.

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AB và $SI \perp (ABCD)$.

ΔSAB đều cạnh $2a$ $\Rightarrow SI=\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}.$

$\mathrm{IK}\perp\mathrm{BD}\,(K\in BD)$, $\mathrm{AH}\perp\mathrm{BD}\,(H\in BD)$ $\Rightarrow IK=\dfrac{1}{2}AH$

Kẻ

Kẻ $IJ\perp SK,(J\in SK)$ (1).

Ta có $\begin{cases} IK\perp BD \\ SI\perp(ABCD)\Rightarrow SI\perp BD\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SIK)\Rightarrow BD\perp IJ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $IJ\perp(SBD)\Rightarrow d\left(I,(SBD)\right)=IJ.$

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}\Rightarrow\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{5}{4a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow IK=\dfrac{a}{\sqrt{5}}.$

$\dfrac{1}{\mathrm{IJ}^2}=\dfrac{1}{SI^2}+\dfrac{1}{IK^2}\Rightarrow\dfrac{1}{IJ^2}=\dfrac{16}{3a^2}\Rightarrow IJ=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\Rightarrow d\left(I,(SBD)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$

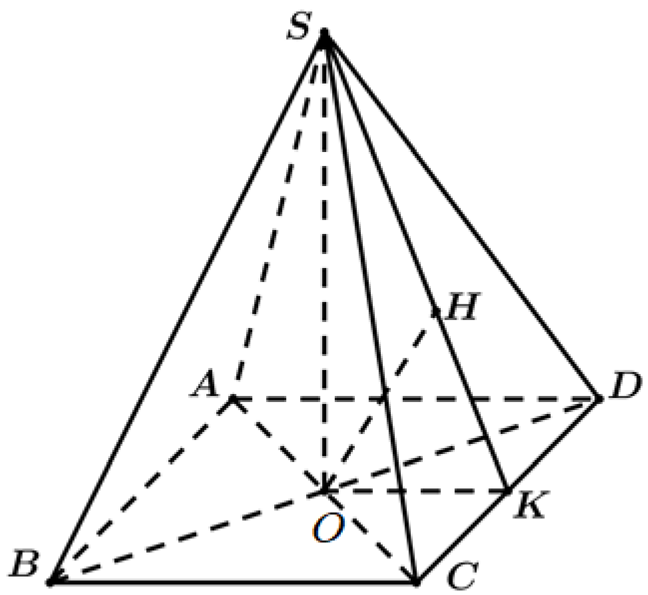
I là trung điểm AB $\Rightarrow d\left(A,(SBD)\right)=2d\left(I,(SBD)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Câu 52. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn C



Vì chóp $SABCD$ là chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$.

Gọi O là tâm hình vuông, ta có $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $d\left(A,(SCD)\right)=2d\left(O,(SCD)\right)$.

Gọi K trung điểm $CD\Rightarrow OK\perp CD$. Lại có $CD\perp SO$.

Suy ra $CD\perp(SOK)$ suy ra $(SCD)\perp(SOK)$.

Trong (SOK) kẻ $OH\perp SK\Rightarrow OH\perp(SCD)\Rightarrow d(O,(SCD))=OH$.

Xét ΔSOK vuông tại O, đường cao OH, ta có

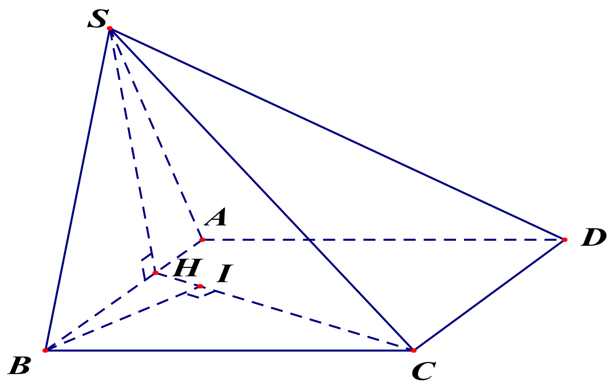
$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OK^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow d(A,(SCD))=2OH=a\sqrt{3}.$$

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $4a$. Gọi H là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{0}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SHC) đều vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC).

A. $\frac{5a}{6}$. **B.** $\frac{12a}{5}$. **C.** $\frac{6a}{5}$. **D.** $\frac{5a}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $BI\perp HC$.

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SHC)=SH\\(SAB)\perp(ABCD);(SHC)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Khi đó: $\begin{cases}BI\perp HC\\BI\perp SH\end{cases}\Rightarrow BI\perp(SHC)\Rightarrow d(B,(SHC))=BI$.

Xét trong tam giác BHC vuông tại B ta có:

$$\frac{1}{BI^2}=\frac{1}{BH^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{(3a)^2}+\frac{1}{(4a)^2}=\frac{25}{144a^2}\Rightarrow BI=\frac{12a}{5}.$$

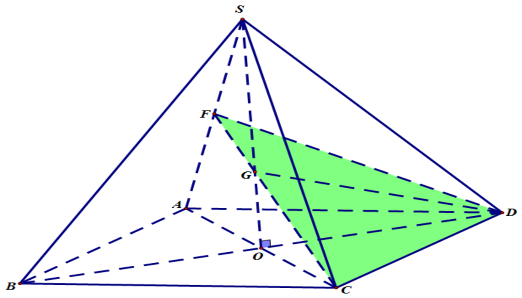
Suy ra: Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC) bằng $\frac{12a}{5}$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi F là trung điểm của cạnh SA. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (FCD)?

A. $\frac{1}{2}a$. **B.** $\sqrt{\frac{1}{5}}a$. **C.** $\sqrt{\frac{2}{11}}a$. **D.** $\sqrt{\frac{2}{9}}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$, $G = SO \cap FC \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác SAC.

Do đó: $\dfrac{d\left(S,(FCD)\right)}{d\left(O,(FCD)\right)} = \dfrac{SG}{OG} = 2 \Rightarrow d\left(S,(FCD)\right) = 2d\left(O,(FCD)\right) = 2h$.

Lại có: $ABCD$ là hình thoi nên O là trung điểm của AC, BD và $OC \perp OD$.

Mà: $SA = SB = SC = SD \Rightarrow \begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ OA = OB = OC = OD \end{cases} \Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

$\Rightarrow OC = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OS = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OG = \dfrac{1}{3}OS = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Khi đó: $O.GCD$ là tứ diện vuông đỉnh O $\Rightarrow \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OG^2} = \dfrac{22}{a^2} \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{1}{22}}a$.

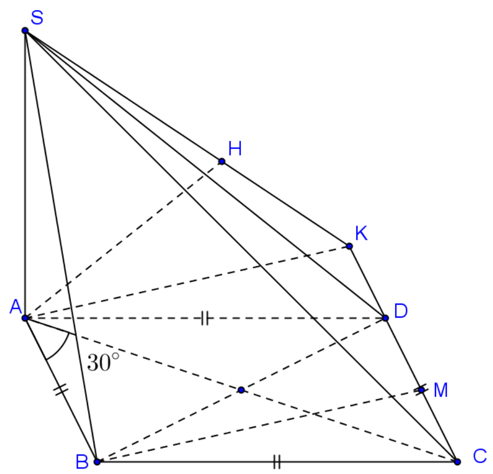
Vậy $\Rightarrow d\left(S,(FCD)\right) = 2h = \sqrt{\dfrac{2}{11}}a$.

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $SA = a$ và $BA = BC = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{7}a$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Lời giải

Chọn A



Do D là điểm đối xứng với B qua AC và ΔABC cân tại B nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Suy ra ΔBCD là tam giác đều cạnh a.

Gọi M là trung điểm của CD, suy ra $BM \perp CD$ và $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Qua điểm A, dựng đường thẳng song song với BM và cắt CD tại K.

Khi đó $AK \perp CD$ và $AK = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AK \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAK) \Rightarrow (SCD) \perp (SAK)$.

Trong mặt phẳng (SAK), dựng $AH \perp SK$, với $H \in SK$. Suy ra $AH \perp (SCD)$ tại H.

Do AB song song với mặt phẳng (SCD) nên $d(B,(SCD)) = d(A,(SCD)) = AH$.

Xét ΔSAK vuông tại A, ta có

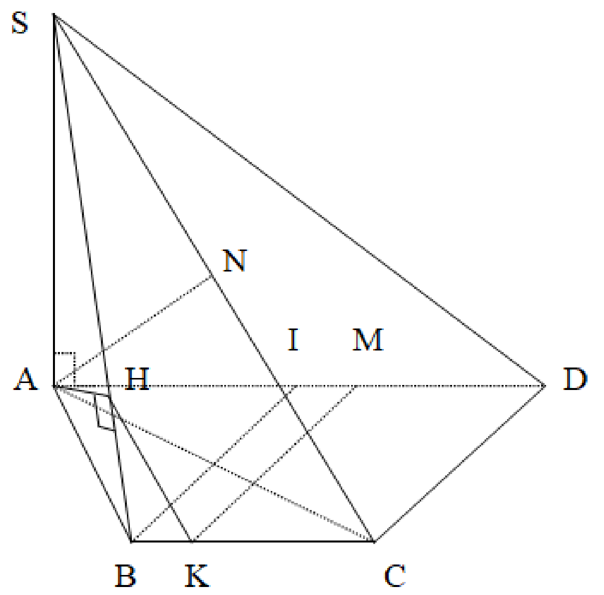
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$$

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{6}}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Do $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AD nên tứ giác $ABCD$ cũng nội tiếp đường tròn đường kính AD. Gọi I là trung điểm AD thì các tam giác $\Delta IAB, \Delta IBC, \Delta ICD$ đều cạnh a và $AC \perp CD$ nên $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$. Lấy $K \in BC; M \in AD$ sao cho $HK \parallel SC;\ KM \parallel CD \Rightarrow d\left(H;(SCD)\right) = d\left(K;(SCD)\right) = d\left(M;(SCD)\right)$

$\triangle SAB$ vuông tại A có $SB = 2a$ và $SH.SB = SA^2 \Leftrightarrow SH = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{3}{4} = \frac{KC}{CB} = \frac{MD}{DI}$.

Vậy $\frac{MD}{AD} = \frac{MD}{2DI} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{d(M;(SCD))}{d(A;(SCD))} = \frac{3}{8}$. Do $\begin{cases} AC \perp CD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

Trong $mp(SAC)$ kẻ $AN \perp SC$ tại N thì $AN \perp (SCD) \Rightarrow d(A;(SCD)) = AN$.

$\triangle SAC$ vuông cân tại A (Do $SA = AC = a\sqrt{3}$) nên $AN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

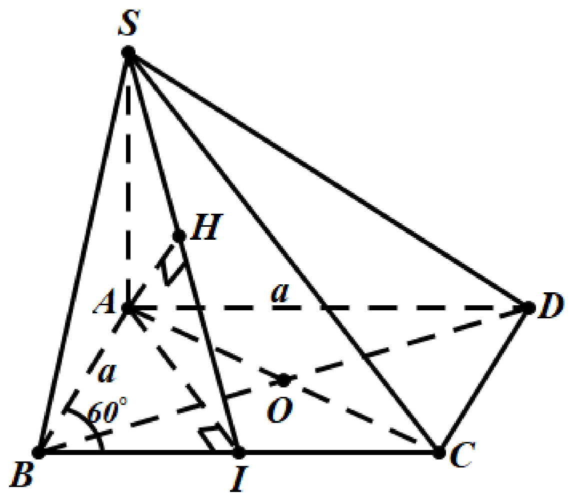
Vậy $d(H;(SCD)) = d(M;(SCD)) = \frac{3}{8}.AN = \frac{3a\sqrt{6}}{16}$

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \frac{3a}{2}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{3a}{8}$. **B.** $\frac{5a}{8}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{5a}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1:

Xét ΔABC đều do $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $AB = BC$.

Lấy I là trung điểm BC, kẻ $AH \perp SI$ tại H.

Ta có: $AI \perp BC$, mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAI), AH \subset (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$.

Từ và $\Rightarrow AH \perp (SBC)$ tại H $\Rightarrow AH = d(A,(SBC))$.

Ta có: ΔABC đều cạnh $a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSAI vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4} = d(A,(SBC)).$$

Ta có:

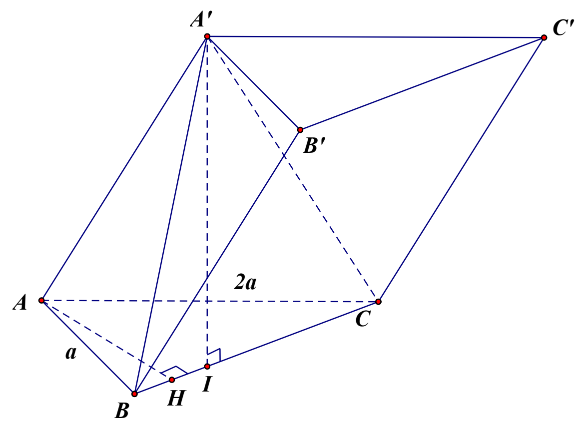
$$\frac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))}=\frac{OC}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(O,(SBC))=\frac{1}{2}d(A,(SBC))=\frac{3a}{8}.$$

Câu 58. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a,\ AC=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là điểm I thuộc cạnh BC. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{2}{3}a$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. **D.** $\frac{1}{3}a$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC có $AB=a,\ AC=2a\Rightarrow BC=a\sqrt{5}$.

Trong mp (ABC) kẻ $AH\perp BC,\ H\in BC$.

Ta có: $\begin{cases}(ABC)\perp(A'BC)\\(ABC)\cap(A'BC)=BC\Rightarrow AH\perp(A'BC)\Rightarrow d(A,(A'BC))=AH\\AH\perp BC\end{cases}$

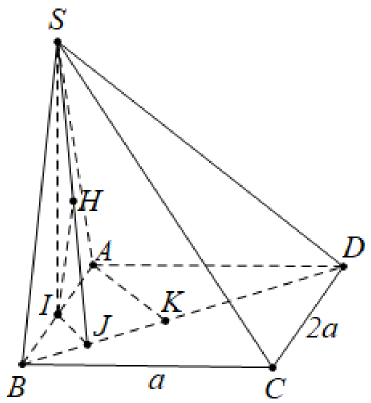
Trong tam giác vuông ABC ta có $AH=\frac{AB.AC}{BC}=\frac{2\sqrt{5}}{5}a\Rightarrow d(A,(A'BC))=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB=2AD=2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow SI \perp AB$.

Ta có: $\begin{cases} SI \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD)(gt) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Xét ΔSAB đều có cạnh bằng $2a \Rightarrow SI = a\sqrt{3}$

Kẻ $AK \perp BD$ tại K. Ta xét ΔBAD có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Kẻ $JI \perp BD$ tại $J \Rightarrow JI // AK \Rightarrow JI = \frac{1}{2}AK = \frac{\sqrt{5}a}{5}$. Ta có: $BD \perp SI \Rightarrow BD \perp (SJI)$.

Kẻ $HI \perp SJ$ tại $H \Rightarrow IH \perp (SBD)$ tại $H \Rightarrow d(I;(SBD)) = IH$.

Xét ΔSJI có: $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{JI^2} + \frac{1}{SI^2} = \frac{5}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do I là trung điểm của AB nên:

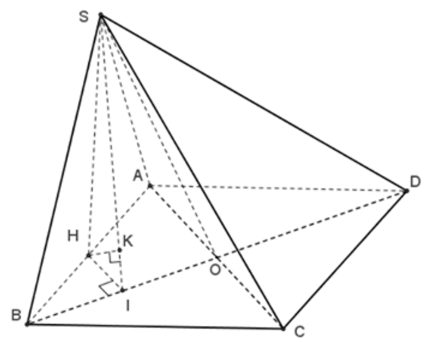
$$\frac{d(A;(SBD))}{d(I;(SBD))} = \frac{AB}{AI} = 2 \Rightarrow d(A;(SBD)) = 2d(I;(SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm AB. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\dfrac{d(H,(SBD))}{d(A,(SBD))} = \dfrac{BH}{BA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD))$.

Gọi I là trung điểm OB, suy ra $HI \parallel OA$ (với O là tâm của đáy hình vuông).

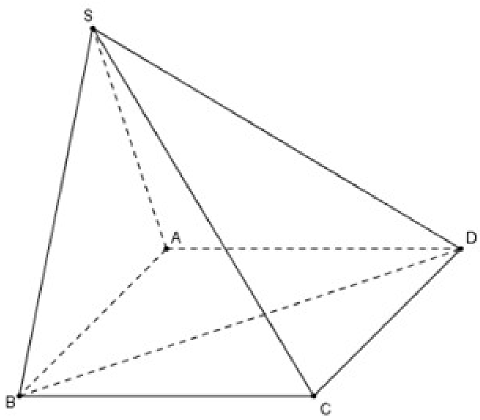
Suy ra $HI = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Lại có $\begin{cases} BD \perp HI \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHI)$.

Vẽ $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SBD)$. Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Suy ra $d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD)) = 2HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

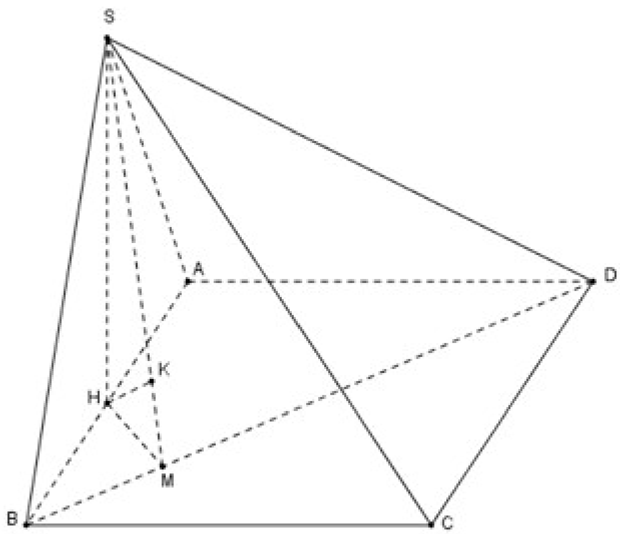
Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.



Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Từ H kẻ $HM \perp BD$, M là trung điểm của BI và I là tâm của hình vuông.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM)$.

Từ H kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp BD$ (Vì $BD \perp (SHM)$).

$\Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow d(H;(SBD)) = HK$.

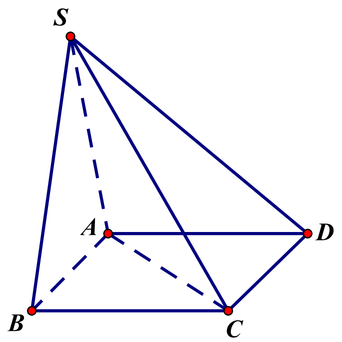
Ta có: $HM = \frac{AI}{2} = \frac{AC}{4} = \frac{\sqrt{2}a}{4}$. $SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

$$HK = \frac{HM.HS}{\sqrt{HM^2 + HS^2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{4}.\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{21}a}{14}.$$

$$d(C;(SBD)) = d(A;(SBD)) = 2d(H;(SBD)) = 2HK = 2.\frac{\sqrt{21}a}{14} = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Vậy: $d(C;(SBD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

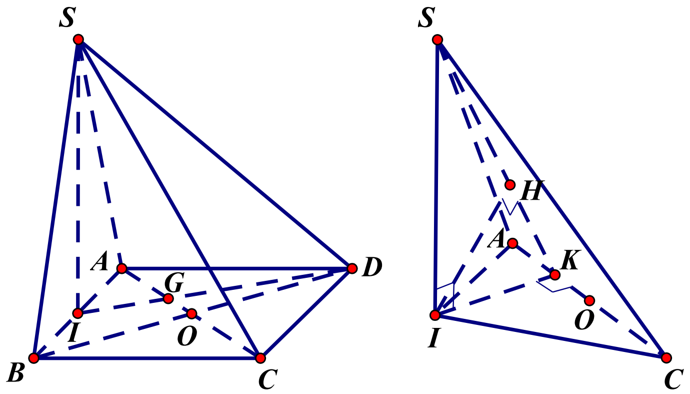
Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng



A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{28}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



* Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ABD, I là trung điểm của AB ta có

$SI \perp (ABCD)$ và $\dfrac{d(D;(SAC))}{d(I;(SAC))} = \dfrac{DG}{IG} = 2 \Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC))$.

* Gọi K là trung điểm của AO, H là hình chiếu của I lên SK ta có $IK \perp AC;\ IH \perp (SAC)$

$\Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC)) = 2.IH$

* Xét tam giác SIK vuông tại I ta có: $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2};\ IK = \dfrac{BO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{2a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

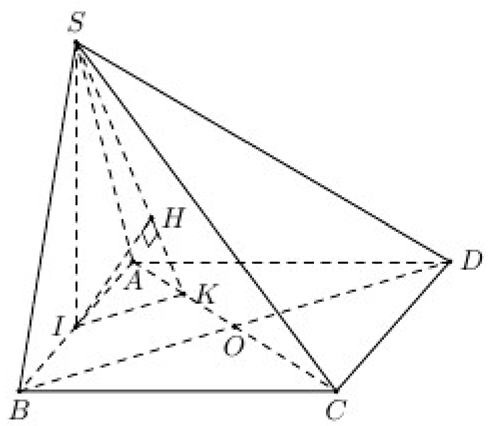
$$\Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC)) = 2.IH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của AB.

Kẻ $IK // BD, K \in AC$; kẻ $IH \perp SK, H \in SK$ (1).

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và tam giác SAB đều nên $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp AC$

Lại có $IK \perp AC$, suy ra $AC \perp (SIK) \Rightarrow AC \perp IH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IH \perp (SAC)$ suy ra IH là khoảng cách từ I đến đến mặt phẳng (SAC) bằng

Ta có $IK = \frac{1}{2}BO = \frac{\sqrt{2}a}{4}$, tam giác SIK vuông tại I nên

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{7}}$$

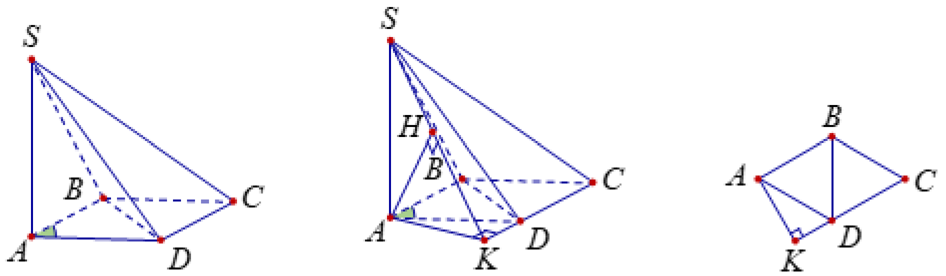
Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng hai lần khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) nên khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) là $d = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$, suy ra $d(B,(SCD)) = d(A,(SCD))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AK \perp CD$ tại K.

Trong mặt phẳng (SAK), kẻ $AH \perp SK$ tại H.

Suy ra $AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = AH$.

Tam giác SAK vuông tại A, AH là đường cao, suy sa:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$, do $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

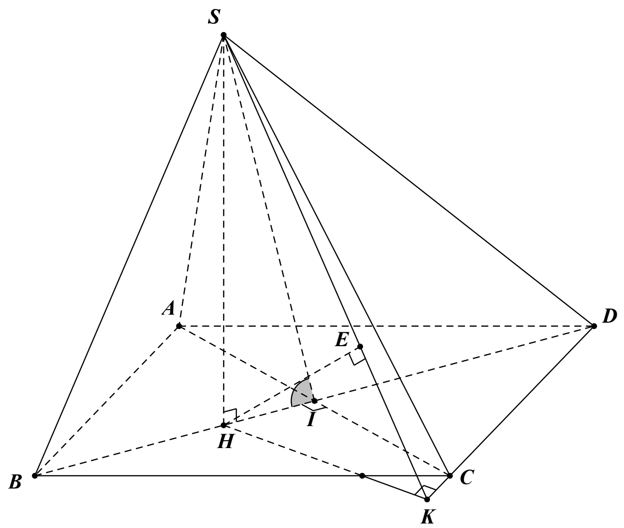
Vậy $d(B,(SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Góc $\widehat{BAC}=60^\circ$, hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ là 60°. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{9a}{2\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{a}{2\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $I=AC\cap BD$, H là trọng tâm của tam giác ABC.

Do $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAC}=60^\circ$ nên $\Delta ABC, \Delta ACD$ là các tam giác đều cạnh a.

$\Rightarrow \widehat{\left((SAC),(ABCD)\right)}=\widehat{SIH}=60^\circ$.

Ta có: $BI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow IH=\dfrac{1}{3}BI=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $SH=IH.\tan 60^\circ=\dfrac{a}{2}$; $HD=\dfrac{2}{3}BD=\dfrac{4}{3}BI=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $HK\perp CD, HE\perp SK\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right)=HE$.

Trong tam giác vuông HKD ta có $HK=HD.\sin 30^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $d\left(H,(SCD)\right)=HE=\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{7}}$.

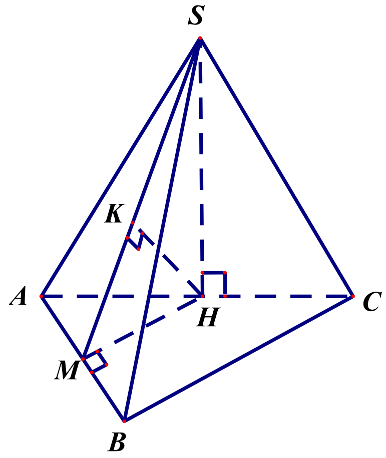
Mặt khác $\dfrac{d\left(B,(SCD)\right)}{d\left(H,(SCD)\right)}=\dfrac{BD}{HD}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{3}{2}.\dfrac{a}{\sqrt{7}}=\dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$.

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B biết $BC=a\sqrt{3}$, $BA=a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AC và biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Tính khoảng cách d từ C đến mặt phẳng (SAB).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **B.** $d=\dfrac{2a\sqrt{66}}{11}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SH \perp (ABC)$.

Mà $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH \Leftrightarrow \frac{a^3\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3}.SH \Leftrightarrow SH = a\sqrt{2}$.

Vì H là trung điểm của cạnh $AC \Rightarrow d(C;(SAB)) = 2d(H;(SAB))$.

Gọi M là trung điểm của cạnh $AB \Rightarrow HM \perp AB$.

Mà $AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHM)$ và $HM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $KH \perp SM$ tại K.

Do $AB \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp HK \Rightarrow HK \perp (SAB)$ tại K.

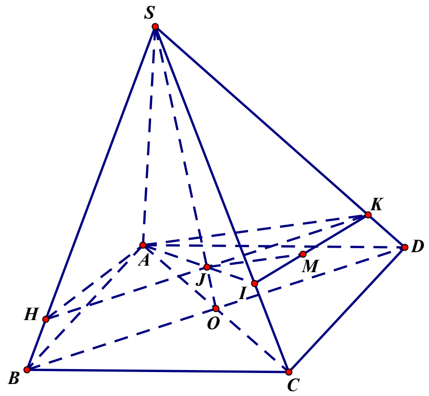
$$\Rightarrow d(H;(SAB)) = HK = \frac{SH.HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2a^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{66}}{11} \Rightarrow d(C;(SAB)) = \frac{2a\sqrt{66}}{11}.$$

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{4a\sqrt{5}}{25}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{8a\sqrt{5}}{25}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Dựng $AK \perp SD$ tại $K \Rightarrow CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK \Rightarrow AK \perp (SCD)$

Ta có: $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK // BD$.

ΔSBD cân đỉnh S, gọi $J = HK \cap SO \Rightarrow HJ = JK$. Dựng AJ cắt SC tại I. Dựng $JM // AK \Rightarrow JM \perp (SCD) \Rightarrow d(H;(SCD)) = 2d(J;(SCD)) = 2JM$.

Ta có: $AH = AK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$; $AI = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; $SO = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$; $AJ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$; $IJ = \dfrac{4a\sqrt{3}}{15}$; $HJ = \dfrac{2a\sqrt{2}}{5}$.

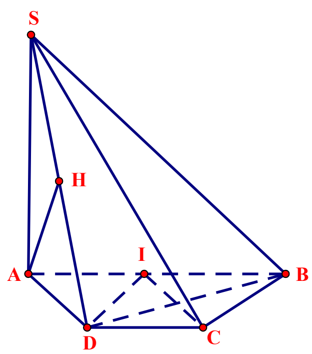
Ta có: $\dfrac{IJ}{AI} = \dfrac{JM}{AK} \Rightarrow JM = \dfrac{4a\sqrt{5}}{25} \Rightarrow d(H;(SCD)) = \dfrac{8a\sqrt{5}}{25}$.

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, đáy lớn AB. Biết $AD = DC = CB = a, AB = 2a,$ cạnh SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBD) tạo với đáy góc 45^0. Gọi I là trung điểm cạnh AB. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \dfrac{a}{4}$. **B.** $d = \dfrac{a}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Hai tứ giác $ADCI$ và $BCDI$ là hình thoi $\Rightarrow \begin{cases} AD \| CI \\ CI \perp BD \end{cases} \Rightarrow AD \perp BD$

$\Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow SD \perp BD$. Suy ra góc giữa mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SDA} = 45^0$.

Do đó $SA = AD = a$. Gọi H là hình chiếu của A lên $SD \Rightarrow AH \perp (SBD)$

$\Rightarrow d(A,(SBD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

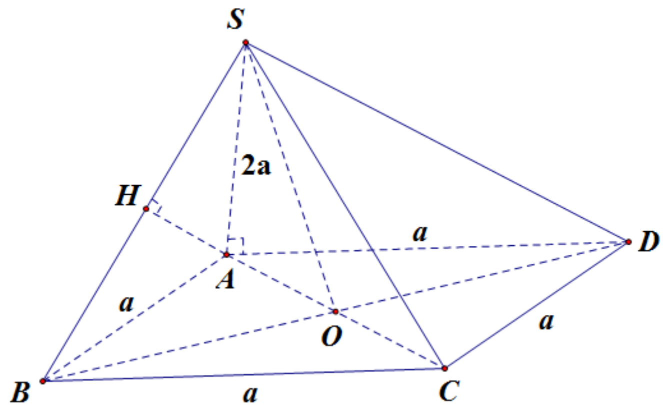
Ta có $\dfrac{d(I,(SBD))}{d(A,(SBD))} = \dfrac{IB}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d(I,(SBD)) = \dfrac{1}{2} d(A,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Biết $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $d(O;(SBC)) = \dfrac{1}{2} d(A;(SBC))$.

Kẻ $AH \perp SB \quad (1)$.

+) $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

$\Rightarrow AH \perp BC \quad (2)$.

Từ (1) và $(2) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$.

+) Xét tam giác SAB, ta có: $AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$.

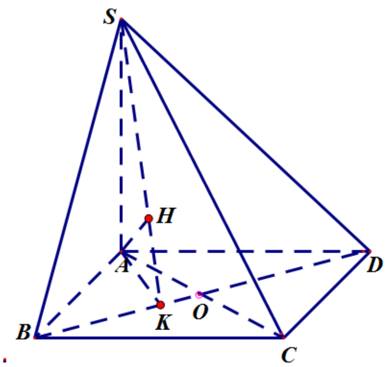
Vậy khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD).

A. $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$. Suy ra, O là trung điểm của AC nên $d\left(C,(SBD)\right) = d\left(A,(SBD)\right)$.

Kẻ $AK \perp BD$, $AH \perp SK$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BD \\ AK \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAK) \Rightarrow (SBD) \perp (SAK)$.

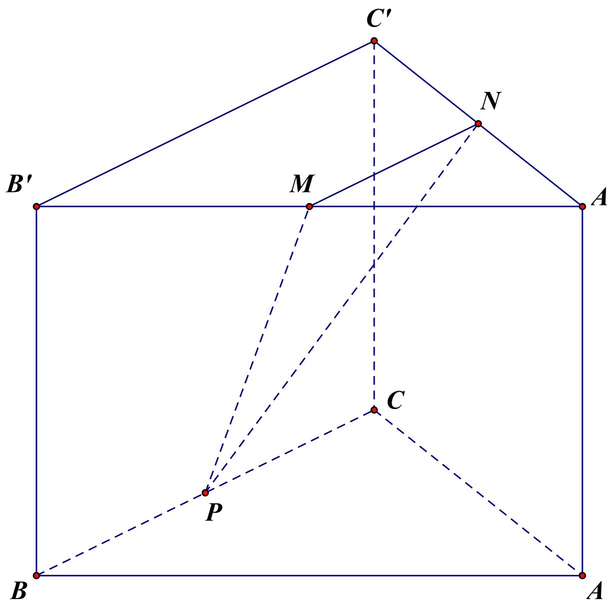
Lại do $\begin{cases} (SBD) \cap (SAK) = SK \\ AH \perp SK \end{cases}$, suy ra $AH \perp (SBD)$ nên $d\left(A,(SBD)\right) = AH$.

Ta có $AK = \dfrac{AB.AD}{BD} = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Vậy khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) là $d\left(C,(SBD)\right) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

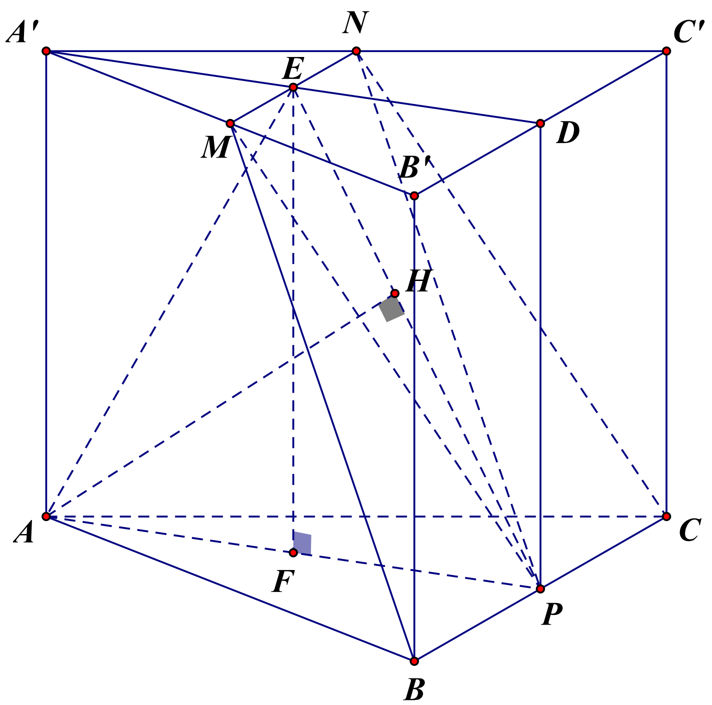
Câu 71. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ dưới). Khoảng cách từ A đến (MNP) bằng



A. $\dfrac{17}{65}$. **B.** $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn D



- Gọi D là trung điểm của $B'C' \Rightarrow \begin{cases} MN \perp A'D \\ MN \perp DP \end{cases} \Rightarrow MN \perp (A'DPA) \Rightarrow (MNP) \perp (A'DPA)$

- Gọi $E = MN \cap A'D \Rightarrow EP$ là giao tuyến của (MNP) và $(A'DPA)$.

- Dựng $AH \perp EP \Rightarrow AH \perp (MNP) \Rightarrow AH = d(A;(MNP))$.

- Gọi F là trung điểm của $AP \Rightarrow EF \perp AP$ và $EF = A'A = 2$, $FP = \dfrac{AP}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow EP = \sqrt{EF^2 + FP^2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{EF.AP}{EP} = \dfrac{2.3}{\frac{5}{2}} = \dfrac{12}{5}$.

Vậy $d\left(A;(MNP)\right)=\dfrac{12}{5}$.

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại C và D, $\widehat{ABC}=30^\circ$. Biết $AC=a$, $CD=\dfrac{a}{2}$, $SA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $a\sqrt{6}$.

B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

C. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi E là giao điểm của AB và CD; H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SD, BC. Ta có

$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=CK$, $KB=AK.\cot\widehat{ABC}=CD.\cot 30^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$BC=BK+KC=a\sqrt{3}$.

Tam giác EBC có $AD\,//\,BC$ và $BC=2AD$ nên AD là đường trung bình, suy ra A là trung điểm của cạnh EB.

$\begin{cases} CD\perp AD \\ CD\perp SA \end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp AH$.

$\begin{cases} AH\perp CD \\ AH\perp SD \end{cases}\Rightarrow AH\perp(SCD)\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=AH$.

Tam giác SAD vuông cân tại A nên $AH=\dfrac{AD\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

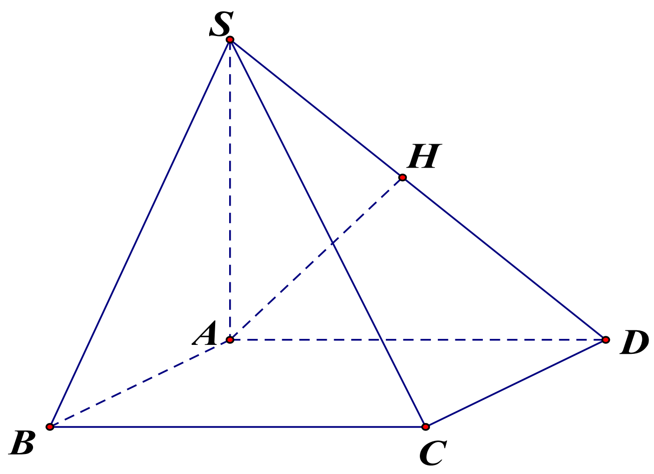
Vậy $d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{EB}{EA}.d\left(A,(SCD)\right)=2AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, các mặt $(SAB),(SAD)$ vuông góc với đáy. Góc giữa (SCD) và đáy bằng 60°, $BC=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** $2\sqrt{\dfrac{3}{13}}a$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $2\sqrt{\dfrac{3}{5}}a$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết các mặt $(SAB),(SAD)$ vuông góc với đáy nên suy ra $SA\perp(ABCD)$.

Xét 2 mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ có: $\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\ AD\perp CD\,(gt)\\ SD\perp CD\,(vì\ CD\perp(SAD))\end{cases}$

Suy ra $((SCD),(ABCD))=(AD,SD)=\widehat{SDA}=60^\circ$.

Mặt khác, $AB//CD\subset(SCD)\Rightarrow AB//(SCD)\Rightarrow d(AB,SC)=d(AB,(SCD))=d(A,(SCD))$.

Trong (SAD), từ A dựng $AH\perp SD$ tại H thì $AH\perp(SCD)$ nên $d(A,(SCD))=AH$.

Xét tam giác SAD vuông tại A có:

$$AD=a, SA=AD.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AD^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

A. $\frac{\sqrt{6}a}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Kẻ $Dx//AC,\ Dx\cap AB=\{I\}$.

$AC//DI;\ AC\not\subset mp(SDI)\Rightarrow AC//mp(SDI)$

Khi đó $d(AC;SD)=d(A,(SDI))$

Kẻ AH vuông góc với DI tại H, do $SA\perp DI$

nên $DI\perp mp(SAH)\Rightarrow mp(SAH)\perp mp(SDI)=SH$

Trong $mp(SAH)$, kẻ $AP\perp SH=\{P\}$ suy ra $d(A;(SDI))=AP$

Ta có, trong $mp(ABCD)$: $AH//=CD=a\sqrt{2}$.

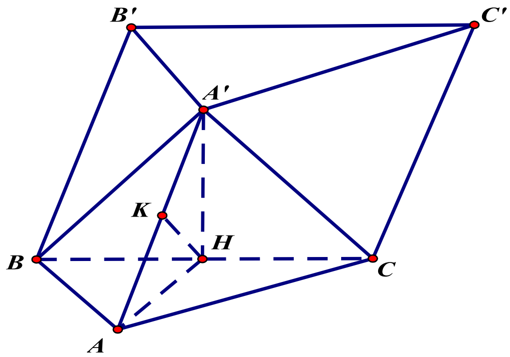
Trong tam giác: SAH vuông tại A, có AP là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{AP^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a\sqrt{2})^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow AP=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow d(AC;SD)=AP=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 75. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 2a$; $BC = 2a\sqrt{3}$. Tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Khoảng cách giữa hai AA' và BC bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Chọn D

Gọi H là trung điểm của BC và K là hình chiều của H trên $A'A$.

Theo giả thiết ta có tam giác ABC cân tại A nên $BC \perp AH$ (1) và $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$. Mặt khác $(A'BC) \perp (ABC)$ và tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' nên $A'H \perp BC$ (2) và $A'H = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{3}.$ Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AHA') \Rightarrow BC \perp HK$ nên HK là đoạn vuông góc chung của $A'A$ và BC.

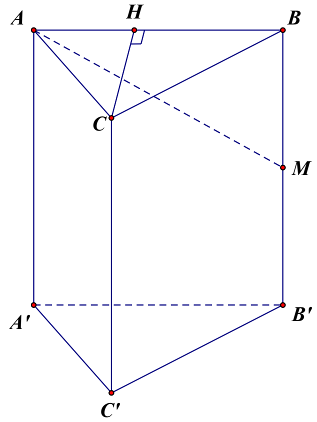
Vậy $d(A'A, BC) = HK = \dfrac{AH.A'H}{\sqrt{AH^2 + A'H^2}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Câu 76. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CC' theo a.

A. $a\frac{\sqrt{3}}{7}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB.

Có $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên $CH \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C,(ABB'A')) = CH$

$CC'//BB' \Rightarrow CC'//(ABB'A')$ nên $d(CC', AM) = d(CC',(ABB'A')) = d(C,(ABB'A')) = CH$

Xét tam giác ABC có $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2.CA.CB.\cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CA.CB.\sin C = \frac{1}{2}AB.CH \Rightarrow a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{7}.CH \Rightarrow CH = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

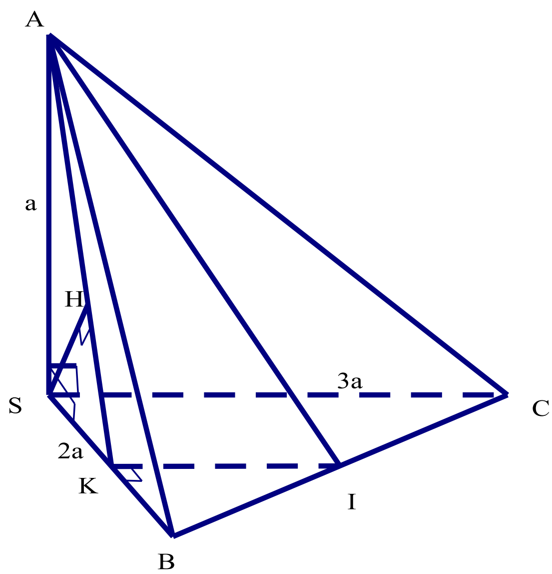
Vậy $d(AM, CC') = a\sqrt{\frac{3}{7}}$

Câu 77. Cho tứ diện $SABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$. Gọi I là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AI theo a.

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Trong (SBC) kẻ $IK//SC \Rightarrow SC//(AIK)$

Khoảng cách $d\left(SC;AI\right)=d\left(SC;\left(AIK\right)\right)=d\left(S;\left(AIK\right)\right)$.

SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau $\Rightarrow SC\perp\left(SAB\right)$, mà $IK//SC\Rightarrow IK\perp\left(SAB\right)$.

Trong $\left(SAB\right)$ kẻ $SH\perp AK$

$SH\perp IK$ $\left(IK\perp\left(SAB\right)\right)$

$\Rightarrow SH\perp\left(AIK\right)\Rightarrow d\left(S;\left(AIK\right)\right)=SH$.

$\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{SK^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{2}{a^2}\Rightarrow SH=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

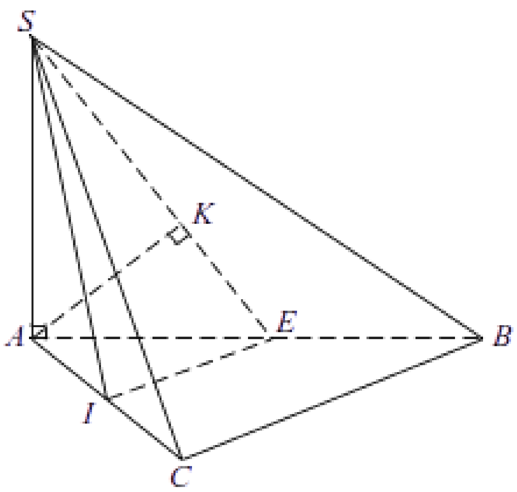
Vậy $d\left(SC;AI\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa đường thẳng SE và đường thẳng BC bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AC, ta có $EI//BC$ nên $d\left(BC,SE\right)=d\left(BC,\left(SEI\right)\right)=d\left(B,\left(SEI\right)\right)=d\left(A,\left(SEI\right)\right)=AK$ (hình vẽ).

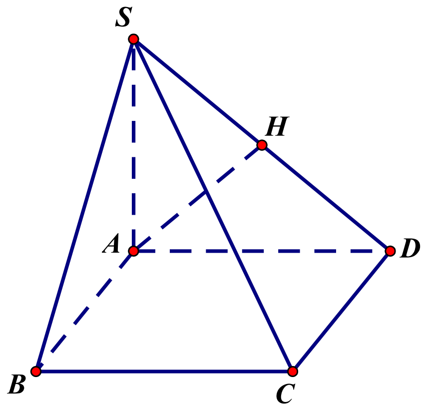
Trong tam giác vuông SAE ta có $AK=\dfrac{AS.AE}{\sqrt{AS^2+AE^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{2a^2+\dfrac{a^2}{4}}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD=2a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh SD. Ta có

$$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH.$$

Suy ra AH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB và SD. Do đó $d(AB, SD) = AH$.

ΔSAD vuông cân tại A có AH là đường cao nên H là trung điểm của SD, suy ra $AH = \frac{1}{2}SD = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

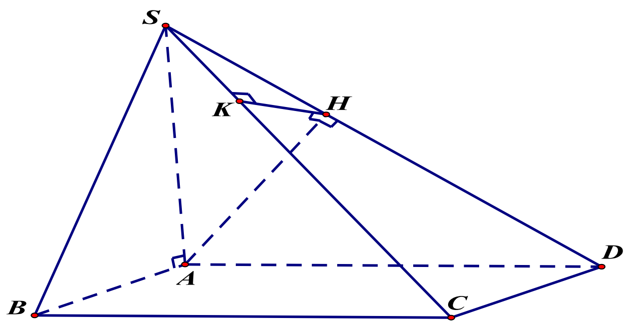
Vậy $d(AB, SD) = a\sqrt{2}$.

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD. Tính khoảng cách giữa AH và SC biết $AH = a$.

A. $\frac{\sqrt{19}}{19}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{19}a}{19}$. **C.** $\frac{\sqrt{73}}{73}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{73}}{73}a$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

* $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$, mà $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Trong (SCD) kẻ $HK \perp SC$ tại $K \Rightarrow AH \perp HK$.

$\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của AH và SC.

* Ta có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AD^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{3}{4a^2}\Rightarrow SA^2=\dfrac{4a^2}{3}$.

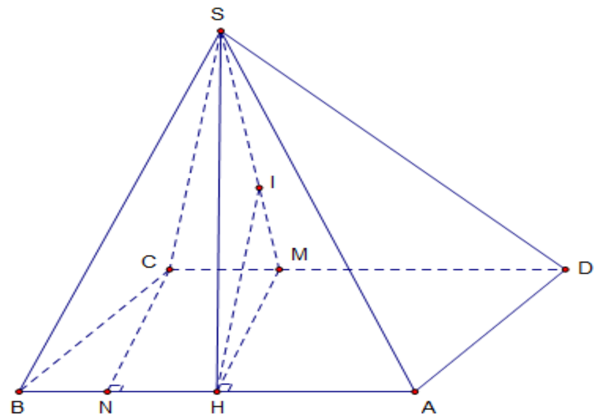
$SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{5}$; $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\dfrac{\sqrt{57}a}{3}$.

$\Delta SHK\sim\Delta SCD(g-g)\Leftrightarrow\dfrac{HK}{SH}=\dfrac{CD}{SC}\Leftrightarrow HK=\dfrac{SH.CD}{SC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a.\dfrac{3}{\sqrt{57}a}=\dfrac{\sqrt{19}}{19}a$

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA=SB=SC=11$, $\widehat{SAB}=30^0$, $\widehat{SBC}=60^0$ và $\widehat{SCA}=45^0$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. $d=4\sqrt{11}$. **B.** $d=2\sqrt{22}$. **C.** $d=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **D.** $d=\sqrt{22}$.

Lời giải



Chọn D

Do $SB=SC=11$ và $\widehat{SBC}=60^0$ nên ΔSBC đều, do đó $BC=11$.

Ta lại có, $SA=SC=11$ và $\widehat{SCA}=45^0$ nên ΔSAC vuông cân tại S, hay $AC=11\sqrt{2}$.

Mặt khác, $SA=SB=11$ và $\widehat{SAB}=30^0$ nên $AB=11\sqrt{3}$.

Từ đó, ta có $AB^2=BC^2+AC^2$ suy ra ΔABC vuông tại C.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Vì $SA=SB=SC$ nên $SH\perp(ABC)$.

Gọi M là điểm trên CD sao cho $HM\perp AB$, suy ra $HM\perp CD$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB. Khi đó, $HM//CN$ và $HM=CN$. Do ΔABC vuông tại C nên theo công thức tính diện tích ta có:

$$HM=CN=\frac{CA.CB}{\sqrt{CA^2+CB^2}}=\frac{11\sqrt{6}}{3}$$

Ta lại có, $CH=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$ nên $SH=\sqrt{SC^2-CH^2}=\dfrac{11}{2}$.

Trong tam giác vuông SHM, dựng đường cao HI $(I\in SM)$, suy ra $HI\perp(SCD)$. Khi đó,

$$d(AB,SD)=d(AB,(SCD))=d(H,(SCD))=HI=\frac{SH.HM}{\sqrt{SH^2+HM^2}}=\sqrt{22}.$$

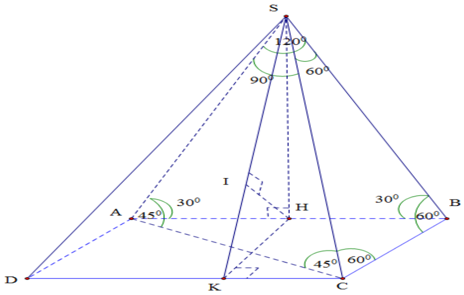
Vậy $d(AB,SD)=\sqrt{22}$.

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA=SB=SC=11$, $\widehat{SAB}=30^0$, $\widehat{SBC}=60^0$ và $\widehat{SCA}=45^0$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD?

A. $d=4\sqrt{11}$. **B.** $d=2\sqrt{22}$. **C.** $d=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **D.** $d=\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết: $SA=SB=SC=11$, $\widehat{SAB}=30^0$, $\widehat{SBC}=60^0$ và $\widehat{SCA}=45^0$ nên ta được các góc có số đo như hình vẽ.

Trong tam giác SAB: $AB=\sqrt{SA^2+SB^2-2SA.SB.\cos 120^0}=11\sqrt{3}$.

Tam giác SBC đều nên $BC=11$.

Tam giác SAC vuông tại C: $AC=\sqrt{SA^2+SC^2}=11\sqrt{2}$.

Từ đó $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C. Gọi H là trung điểm của AB.

Do $SA=SB=SC$ nên hình chiếu của S xuống đáy trùng với tâm H của đáy.

Do $AB//CD$ nên $d(AB,SD)=d(AB,(SDC))=d(H,(SDC))$.

Từ H kẻ $HK\perp DC$, mà $DC\perp SH$ nên $DC\perp(SHK)$.

Từ H kẻ $HI\perp SK$, $HI\perp DC$ (vì $DC\perp(SHK)$) $\Rightarrow HI\perp(SDC)$.

$HI=d(H,(SDC))$.

$$HK=d(C,AB)=\frac{AC.BC}{AB}=\frac{11\sqrt{2}.11}{11\sqrt{3}}=\frac{11\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác vuông SAH, $\widehat{SAH}=30^0 \Rightarrow SH=\frac{1}{2}SA=\frac{11}{2}$.

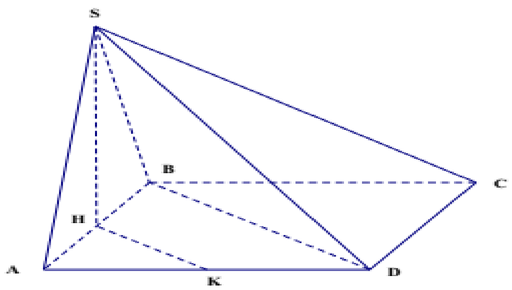
Ta có: $HI=\dfrac{HK.HS}{\sqrt{HK^2+HS^2}}=\sqrt{22}$.

Câu 83. Cho hình chóp đáy là hình vuông cạnh $a, SD=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $ABCD$ là điểm H trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{45}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{25}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $SH^2 = SD^2 - HD^2 = SD^2 - AH^2 - AD^2 = \frac{17a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - a^2 = 3a^2$

Do $HK // (SBD) \Rightarrow d(HK;(SBD)) = d(H;(SBO)) = h$, với O là giao điểm hai đường chéo

Do tứ diện $HSBO$ vuông tại O nên $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HO^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{25}{3a^2}$

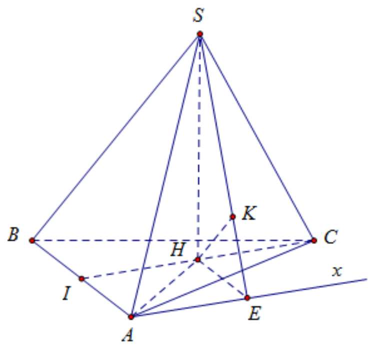
Vậy $h = \frac{a\sqrt{3}}{5}$

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, I là trung điểm của AB, hình chiếu S lên mặt đáy là trung điểm H của CI, góc giữa SA và đáy là 45°. Khoảng cách giữa SA và CI bằng:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{77}}{22}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ đường thẳng Ax song song với IC, kẻ $HE \perp Ax$ tại E.

Vì $IC // (SAE)$ nên $d(IC;SA) = d(IC;(SAE)) = d(H;(SAE))$.

Kẻ $HK \perp SE$ tại K, $K \in SE$. (1)

$Ax \perp HE, Ax \perp SH \Rightarrow Ax \perp (SEA) \Rightarrow Ax \perp HK$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $HK \perp (SAE)$. Vậy $d(H;(SAE)) = HK$.

$CH = IH = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $AH = \sqrt{IH^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

$\left(\widehat{SA;(ABC)}\right) = \widehat{SAH} = 45^\circ \Rightarrow \triangle SAH$ vuông cân tại H nên $SH = AH = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Ta có $HE = IA = \frac{a}{2}$ (vì tứ giác $AIHE$ là hình chữ nhật)

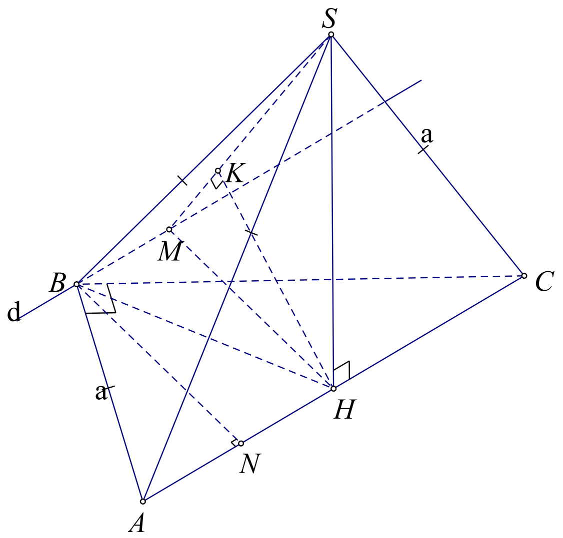
$$HK = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} \frac{\frac{a\sqrt{7}}{4}.\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{77}}{22}$$
.

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a, \widehat{ASB} = 60^0, \widehat{BSC} = 90^0, \widehat{CSA} = 120^0$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{22}}{11}$. **D.** $d = \frac{a\sqrt{22}}{22}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AB = SA = SB = a; BC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}; AC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a.a.\cos 120^0} = a\sqrt{3}$

Suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2$, hay ΔABC vuông tại B.

Gọi H là trung điểm của AC thì $HA = HB = HC$, mặt khác $SA = SB = SC$ nên SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC, do đó $SH \perp (ABC)$.

Gọi d là đường thẳng qua B và song song với AC, (α) là mặt phẳng xác định bởi SB và .

Khi đó $AC // (\alpha) \Rightarrow d(AC;SB) = d(SC;(\alpha)) = d(H;(\alpha))$.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của H lên d và K là hình chiếu vuông góc của H lên SM, dễ thấy $d(H;(\alpha)) = HK$.

Gọi N là chân đường cao hạ từ B xuống AC thì

$$\frac{1}{BN^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow BN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Ta có $HM = BN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $SH = a.\cos 60^0 = \frac{a}{2}$

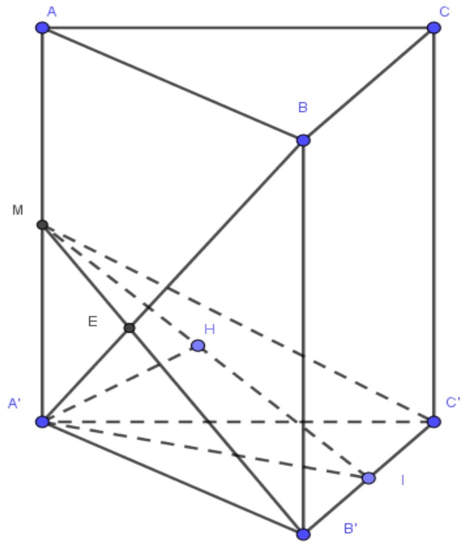
Trong tam giác vuông SHM ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{3}{2a^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 86. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. M là trung điểm của AA'. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng MB' và BC.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn B



Do $BC // B'C'$ nên $d\left(B'M;BC\right)=d\left(BC;\left(MB'C'\right)\right)=d\left(B;\left(MB'C'\right)\right)=2d\left(A;\left(MB'C'\right)\right)$ (do $\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{BB'}{AM}=2$).

$d\left(A;\left(MB'C'\right)\right)=A'H$, ta có $A'I=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'M=\dfrac{a}{2}$ suy ra $A'H=\dfrac{\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

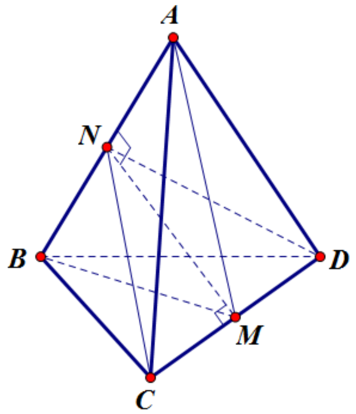
Vậy $d\left(B'M;BC\right)=2A'H=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 87. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Tam giác CND cân tại N $\Rightarrow MN \perp CD$ (1)

Tam giác AMB cân tại M $\Rightarrow MN \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD $\Rightarrow d(AB, CD) = MN$

Ta có $MD = \dfrac{CD}{2} = a$; $ND = a\sqrt{3}$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NMD ta có:

$MN = \sqrt{ND^2 - MD^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

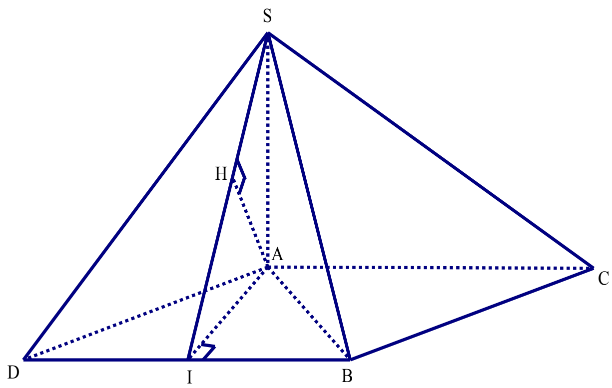
Vậy $d(AB, CD) = a\sqrt{2}$

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



$*SA \perp (ABC) \Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$, do đó $AS = AB\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$ Trong $mp(ABC)$ lấy điểm D sao cho tứ giác $ACBD$ là hình bình hành

$\star$ Ta có $AC \mathbin{/\mkern-6mu/} (SBD)$ nên $d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$

$\star$ Gọi I là trung điểm của BD, H là hình chiếu của A trên SI

Tam giác ABC đều và tứ giác $ACBD$ là hình bình hành nên $AB = AD = BD = a$ hay tam giác ABD đều $\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $AI \perp BD$ mà $SA \perp BD$ nên $BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp AH$, lại có $AH \perp SI$ nên $AH \perp (SBD)$

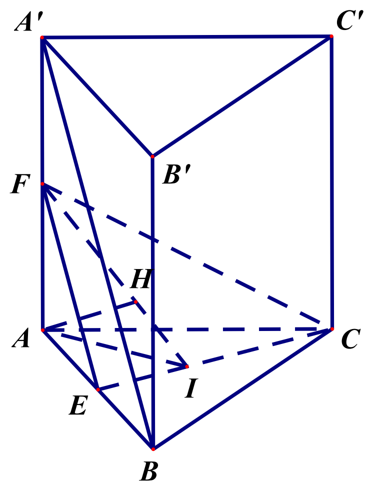
Vậy $d(AC, SB) = d(A,(SBD)) = AH = \sqrt{\frac{SA^2.AI^2}{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

Câu 89. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Gọi E là trung điểm của AB. Cho biết $AB = 2a$, $BC = \sqrt{13}a$, $CC' = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CE bằng

A. $\frac{4a}{7}$. **B.** $\frac{12a}{7}$. **C.** $\frac{6a}{7}$. **D.** $\frac{3a}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi F là trung điểm AA'.

Ta có $(CEF) // A'B$ nên $\mathrm{d}(CE, A'B) = \mathrm{d}(A'B,(CEF)) = \mathrm{d}(A',(CEF)) = \mathrm{d}(A,(CEF))$.

Kẻ $AI \perp CE; AH \perp FI$ thì $AH \perp (CEF)$ hay $\mathrm{d}(A,(CEF)) = AH$.

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{49}{36a^2}$.

Suy ra

$\mathrm{d}(CE, A'B) = \mathrm{d}(A,(CEF)) = AH = \frac{6a}{7}$.

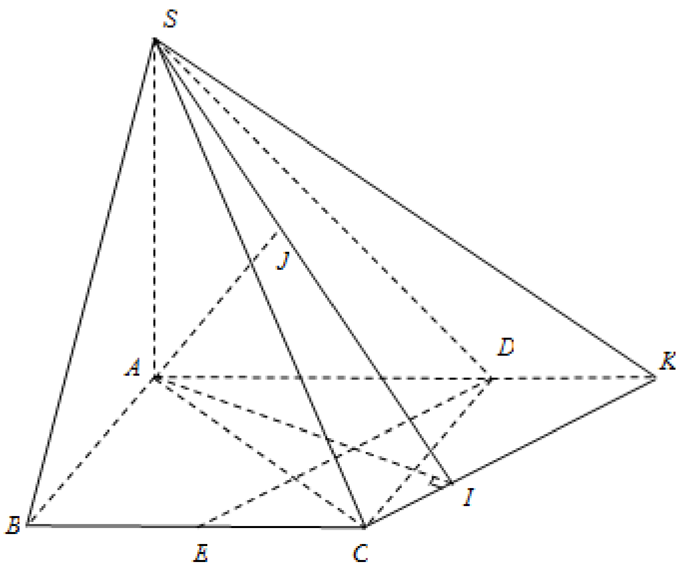
Vậy khoảng cách giữa $A'B$ và CE là $\frac{6a}{7}$.

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45^0. Gọi E là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{19}$. **C.** $\frac{a\sqrt{38}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{38}}{19}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng hình bình hành $DKCE$, khi đó $DE//(SCK)$.

$d(DE;SC)=d(DE;(SCK))=d(D;(SCK))=\frac{1}{3}d(A;(SCK))$.

Kẻ $AI\perp CK\Rightarrow CK\perp(SAI)\Rightarrow (SCK)\perp(SAI)$.

Kẻ $AJ\perp SI\Rightarrow AJ\perp(SCK)\Rightarrow d(A;(SCK)=AJ$.

Ta có $S_{\Delta ACK}=\frac{3a^2}{4}$, $CK=DE=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, suy ra $AI=\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

$\frac{1}{AJ^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow AJ=\frac{3a\sqrt{38}}{19}\Rightarrow d(D;(SCK))=\frac{1}{3}AJ=\frac{a\sqrt{38}}{19}$.

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD}=120^\circ$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

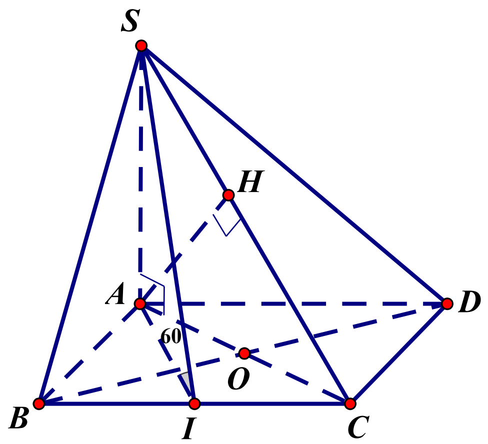
A. $\frac{3a\sqrt{39}}{26}$. **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{39}}{26}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải

Chọn A

* Gọi I là trung điểm của BC, do ΔABC là tam giác đều nên

$\begin{cases} AI\perp BC \\ SI\perp BC \end{cases}\Rightarrow ((SBC);(ABCD))=(AI;SI)=\widehat{SIA}=60^\circ$



Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SAC)$ là mặt phẳng chứa SC và $\perp BD$

$\Rightarrow d(SC;BD) = d(O;SC) = \frac{1}{2}d(A;SC) = \frac{1}{2}AH$

Xét tam giác SAC vuông tại A ta có $SA = AI.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$; $AC = AB = a\sqrt{3}$

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{27a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{13}{27a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{3a\sqrt{39}}{13}$

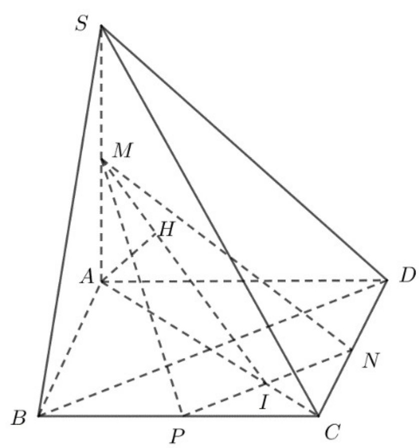
$\Rightarrow d(SC;BD) = \frac{1}{2}AH = \frac{3a\sqrt{39}}{26}$.

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A. $d = 3\sqrt{5}$. **B.** $d = \sqrt{5}$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 10$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của $BC \Rightarrow BD // NP \Rightarrow BD // (MNP)$

$\Rightarrow d(BD, MN) = d(BD,(MNP)) = d(D,(MNP)) = d(C,(MNP)) = \frac{1}{3}d(A,(MNP))$.

Gọi $I = AC \cap NP$. Kẻ $AH \perp MI$ tại H.

Ta có $\begin{cases} NP \perp SA \\ NP \perp AC \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SAC) \Rightarrow NP \perp AH$.

$\begin{cases} AH \perp MI \\ AH \perp NP \end{cases} \Rightarrow AH \perp (MNP) \Rightarrow d(A,(MNP)) = AH$.

Ta có $SA^2 = SC^2 - AC^2 = \left(10\sqrt{5}\right)^2 - \left(10\sqrt{2}\right)^2 = 300$.

Suy ra $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{SC}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3AC}{4}\right)^2} = \dfrac{4}{300} + \dfrac{16}{1800} = \dfrac{20}{900} \Rightarrow AH = \dfrac{30}{2\sqrt{5}}$.

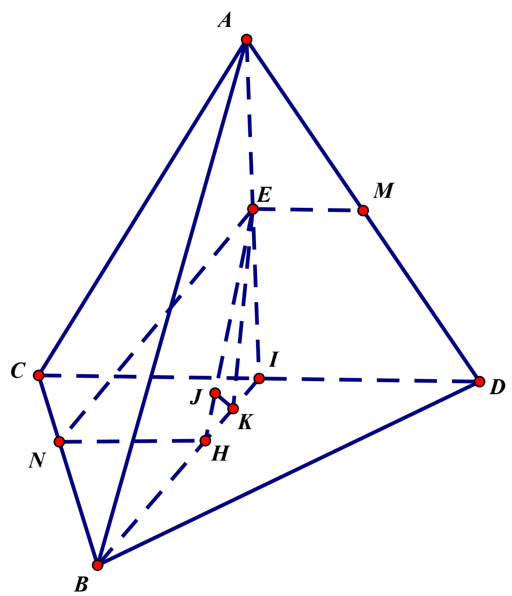
Vậy $d(BD, MN) = \dfrac{1}{3}AH = \sqrt{5}$.

Câu 93. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1, gọi M là trung điểm AD và N trên cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN và CD.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là tâm tam giác ABC khi đó $AH \perp (ABC)$. Có $BN = 2NC \Rightarrow NH // CD$.

Gọi I là trung điểm CD, từ M kẻ đường thẳng $// CD$ cắt AI tại E.

Gọi K là trung điểm HI, J là hình chiếu của K lên HE.

Khi đó $d(MN, CD) = d(I,(EMHN)) = 2d(K,(EMHN)) = 2KJ$.

Ta có $KH = \dfrac{1}{2}HI = \dfrac{1}{6}BI = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$; $EK = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{1}{2}\sqrt{AI^2 - IH^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{12}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

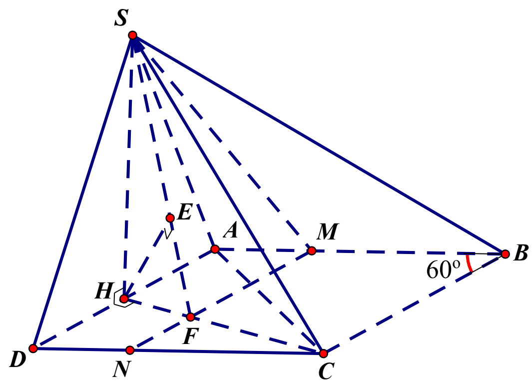
$$\Rightarrow \frac{1}{KJ^2}=\frac{1}{KH^2}+\frac{1}{KE^2}=\frac{144}{3}+6=54 \Rightarrow KJ=\sqrt{\frac{1}{54}}=\frac{\sqrt{6}}{18} \Rightarrow d(MN,CD)=\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh là $2a$, $\widehat{ABC}=60^\circ$. Tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

A. $\frac{\sqrt{30}}{10}a.$ **B.** $\frac{\sqrt{30}}{5}a.$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a.$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a.$

Lời giải

Chọn B



Dựng MN song song BC $\Rightarrow d(SM,BC)=d(BC,(SMN))=d(C,(SMN))$

$FC=2FH$, $HE\perp(SMN) \Rightarrow d(C,(SMN))=2d(H,(SMN))=2HE$

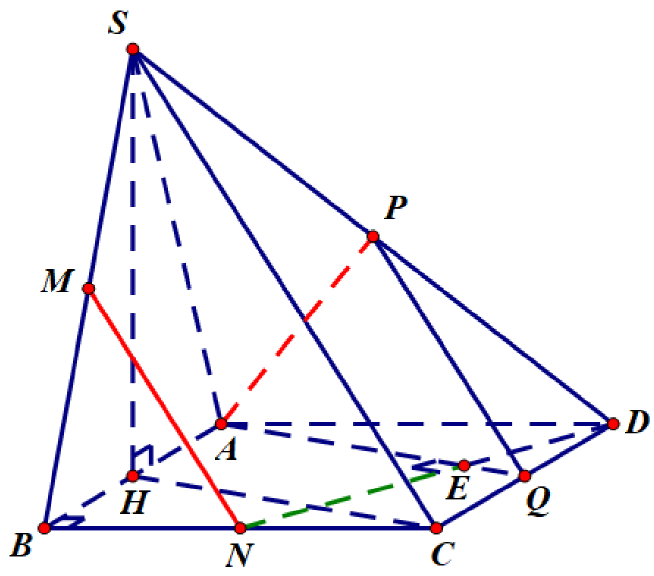
$HC=a\sqrt{3} \Rightarrow HF=\frac{a\sqrt{3}}{3}, SH=a\sqrt{3}$

$$\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{HF^2}+\frac{1}{HS^2}=\frac{3}{a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{10}{3a^2} \Rightarrow HE=\frac{\sqrt{30}}{10}a \Rightarrow d(SM,BC)=\frac{\sqrt{30}}{5}a.$$

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. M,N,P lần lượt là trung điểm SB,BC,SD. Tính khoảng cách giữa AP và MN

A. $\frac{3a}{\sqrt{15}}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$. **C.** $4a\sqrt{15}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



Gọi Q là trung điểm CD, ta có $PQ//SC//MN$ nên có $MN//(APQ)$

$\Rightarrow d(MN, PQ) = d(MN, (APQ)) = d(N, (APQ))$

$\begin{cases} ND \perp HC \\ ND \perp SH \end{cases} \Rightarrow ND \perp (SHC) \Rightarrow ND \perp SC \Rightarrow ND \perp PQ$

Vì

$\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{ND} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ})(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}) = 0 \Rightarrow AQ \perp ND$

Vậy có $\left.\begin{matrix} ND \perp PQ \\ ND \perp AQ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ND \perp (APQ)$ tại E $\Rightarrow d_{(MN, AP)} = NE$

mà có $\dfrac{1}{DE^2} = \dfrac{1}{DA^2} + \dfrac{1}{DQ^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow DE = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$

và $DN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow EN = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$

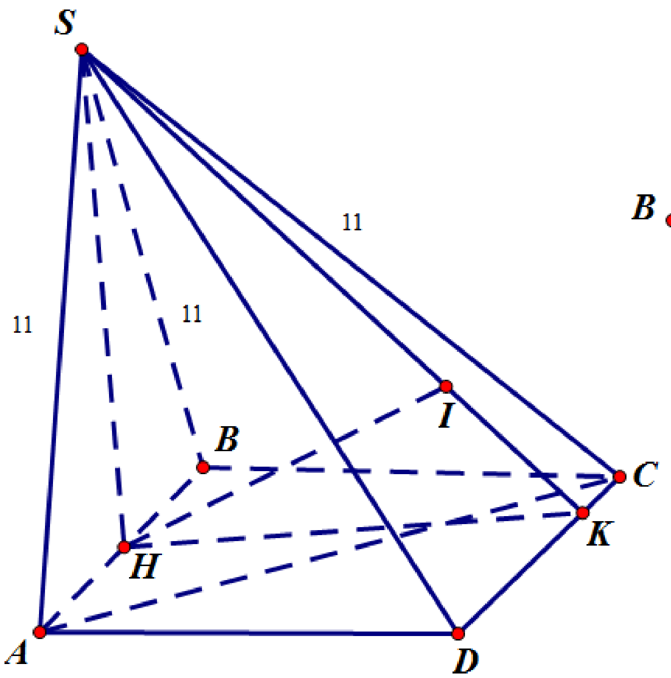
Vậy $d(MN, AP) = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

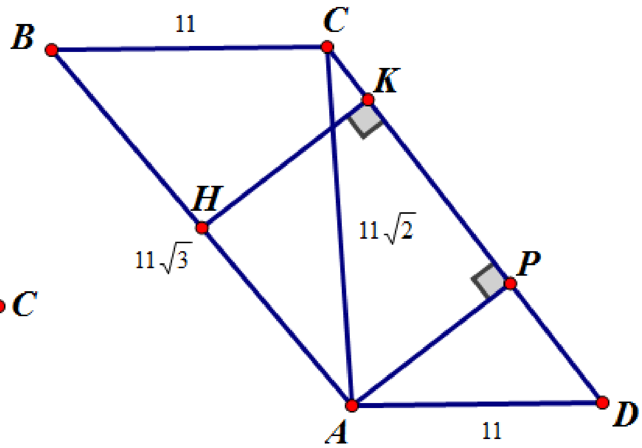
Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11, \widehat{SAB} = 30^o, \widehat{SBC} = 60^o$ và $\widehat{SCA} = 45^o$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. $d = 4\sqrt{11}$. **B.** $d = 2\sqrt{22}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **D.** $d = \sqrt{22}$

Lời giải

Chọn D





Dựa vào định lý cosin ta dễ dàng tính được $AB = 11\sqrt{3}, BC = 11, AC = 11\sqrt{2}$. Khi đó ΔABC vuông tại C. Do $SA = SB = SC$, nên hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB. Nên $SH \perp (ABCD)$. $SH = SA.\sin SAB = \dfrac{11}{2}$.

Kẻ $HK \perp CD, AP \perp CD$, tứ giác $APKH$ là hình chữ nhật,

$HK = AP = \dfrac{11\sqrt{6}}{3}\left(\dfrac{1}{AP^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AC^2}\right)$.

Trong tam giác vuông SHK, kẻ $HI \perp SK$.

Do $AB \parallel CD$ nên $d(AB, SD) = d(AB,(SCD)) = d(H,(SCD)) = HI$.

Ta có, $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \sqrt{22}$.

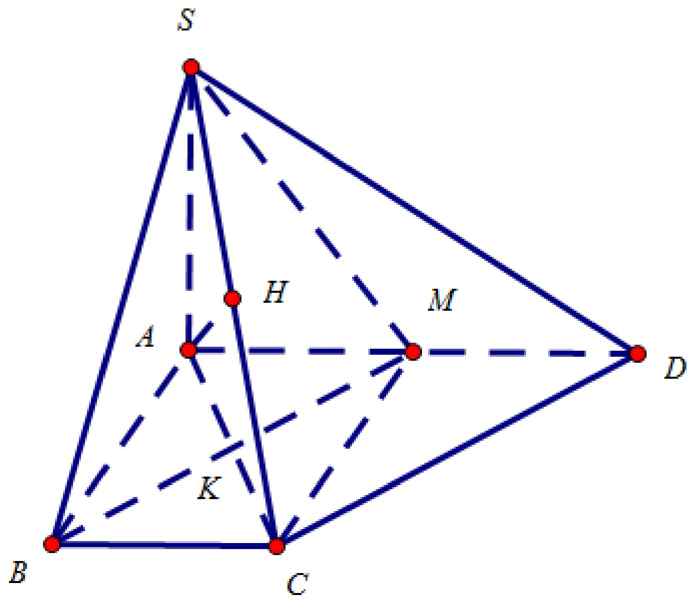
Vậy $d(AB, SD) = \sqrt{22}$.

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các mặt phẳng (SAB), (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy là hình thang vuông tại các đỉnh A và B, có $AD = 2AB = 2BC = 2a$, $SA = AC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$; $SA = AC = a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của AD. Ta có: $BM // CD \Rightarrow CD // (SBM)$

$\Rightarrow d(CD; SB) = d(CD; (SBM)) = d(C; (SBM)) = d(A; (SBM))$.

Theo giả thiết và theo cách dựng ta có $ABCM$ là hình vuông cạnh a.

Gọi $K = AC \cap BM \Rightarrow AK \perp BM \Rightarrow BM \perp (SAC)$.

Dựng $AH \perp SB$. Khi đó: $d(A; (SBM)) = AH$

Xét tam giác SAC vuông tại A, đường cao AH có:

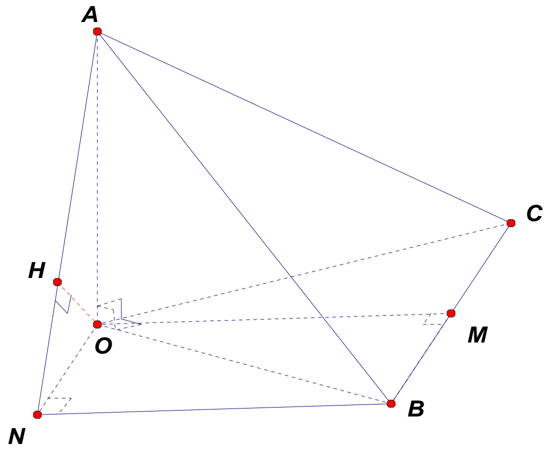
$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 98. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có ΔOBC vuông cân tại O, M là trung điểm của BC

$\Rightarrow OM \perp BC$

Dựng hình chữ nhật $OMBN$, ta có $\begin{cases} OM // BN \\ BN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow OM // (ABN)$

$\Rightarrow d(AB, OM) = d(OM, (ABN)) = d(O, (ABN))$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AN ta có:

$\begin{cases} BN \perp ON \\ BN \perp OA \end{cases} \Rightarrow BN \perp (OAN)$ $\Rightarrow OH \perp BN$ mà $OH \perp AN$

$\Rightarrow OH \perp (ABN) \Rightarrow d(O, (ABN)) = OH$

ΔOAN vuông tại O, đường cao OH

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{BM^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{4}{BC^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{4}{OB^2 + OC^2}$

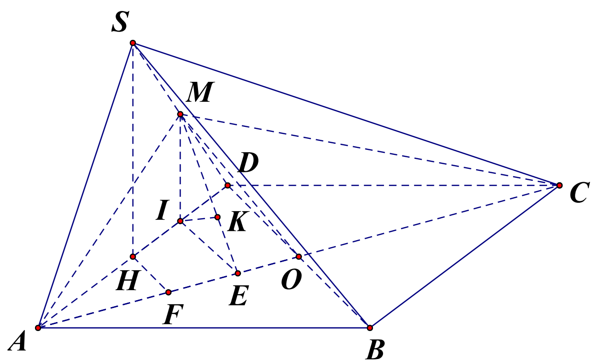
$= \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{4a^2 + 4a^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow OH^2 = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(AB, OM) = OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tam giác ASO cân tại S, mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{6a}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $SH \perp AD$ tại H, suy ra $SH \perp (ABCD)$, do $SA = SO \Rightarrow HA = HO$ nên H thuộc trung trực AO. Góc giữa SD và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDH} = 60^0$.

Ta có $AO = 2AH.\cos\widehat{HAO} = 2AH.\cos 30^0 = AH\sqrt{3}$ $\Rightarrow AH = \dfrac{AO}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow HD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow SH = 2a$.

Lấy M là trung điểm SD, kẻ $MI // SH\ (I \in AD)$, kẻ $IE \perp AC, IK \perp ME$

Khi đó $d(AC, SB) = d(B, (MAC)) = d(D, (MAC)) = \dfrac{3}{2} d(I, (MAC)) = \dfrac{3}{2} IK.$

Ta có: $MI = \dfrac{1}{2} SH = a$

$IE = 2HF = 2AF.\tan 30^0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

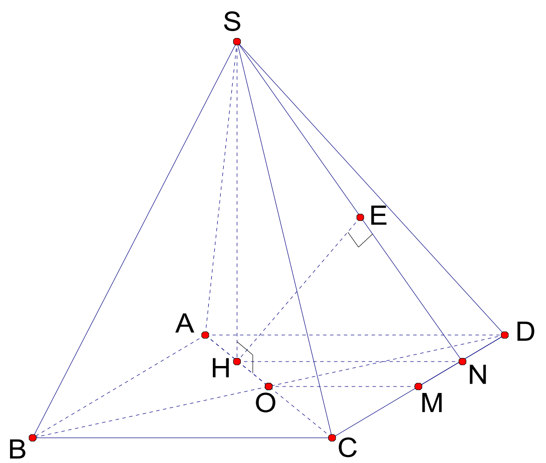
$\dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{1}{IM^2} + \dfrac{1}{IE^2} \Rightarrow IK = \dfrac{a}{2} \Rightarrow d(SB, AC) = \dfrac{3}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{4}$.

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Hình chiếu của S trên mặt đáy là trung điểm của H của OA. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và MD.

$\Rightarrow HN \perp CD \Rightarrow SN \perp CD$ (do HN là hình chiếu của SN lên $(ABCD)$).

Ta có $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ HN \perp CD \\ SN \perp CD \end{cases}$, suy ra góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SNH} = 45^0$.

Ta có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Mà $\dfrac{d\left(H,(SCD)\right)}{d\left(A,(SCD)\right)}=\dfrac{CH}{CA}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{4}{3}d\left(H,(SCD)\right)$.

Ta có $\begin{cases}(SHN)\perp(SCD)\\(SHN)\cap(SCD)=SN\end{cases}$. Kẻ $HE\perp SN\Rightarrow HE\perp(SCD)$.

Suy ra $d\left(H,(SCD)\right)=HE$.

Ta có $\dfrac{HN}{AD}=\dfrac{CH}{CA}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow HN=\dfrac{3}{4}AD=\dfrac{3}{4}.2a=\dfrac{3a}{2}$

Do đó $SH=HN=\dfrac{3a}{2}$, $\dfrac{1}{HE^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HN^2}=\dfrac{4}{9a^2}+\dfrac{4}{9a^2}=\dfrac{8}{9a^2}\Rightarrow HE=\dfrac{3a}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $d\left(AB,SC\right)=\dfrac{4}{3}d\left(H,(SCD)\right)=a\sqrt{2}$.