# PHÉP NGHỊCH ĐẢO VÀ ỨNG DỤNG

***Nguyễn Văn Thảo – THPT Chuyên Bắc Giang***

## A. Lời nói đầu

Phép biến hình là một công cụ hết sức quan trọng trong việc giải quyết các vấn đề của hình học. Trong chuyên đề này, tôi xin trình bày một số ứng dụng của phép nghịch đảo, đây là phép biến hình khá đặc biệt trong chương trình Toán phổ thông (Nó không bảo tồn tích đồng dạng của các hình).

Về nội dung, tôi cố gắng hệ thống lại các tính chất và các dạng toán, ví dụ điển hình trong ứng dụng của phép nghịch đảo. Những ví dụ sẽ được trình bày từ dễ đến khó (theo quan điểm của tác giả), giúp bạn đọc phần nào thấy được vẻ đẹp quyến rũ của phép nghịch đảo nói riêng và hình học nói chung. Phần cuối là một số bài tập giúp bạn đọc trải nghiệm và thử sức mình. Hi vọng chuyên đề sẽ để lại chút ấn tượng đẹp trong long bạn đọc!

## B. Nội dung

### I. Lý thuyết

#### I.1. Định nghĩa

Cho điểm $O$ cố định và một số thực $k$ khác 0. Phép biến hình $f$ biến mỗi điểm $M$ thành $M'$ sao cho: $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$ được gọi là phép nghịch đảo cực $O$ phương tích $k$.

#### I.2. Các tính chất

##### I.2.1. Tính chất 1

Phép nghịch đảo $f$ biến $M$, $N$ ($M$, $N$, $O$ không thẳng hàng ) lần lượt thành $M'$, $N'$ thì $M$, $N$, $M'$, $N'$ cùng thuộc một đường tròn.

##### I.2.2. Tính chất 2

Phép nghịch đảo $f$ bảo tồn góc của hai đường. (hay $f$ là phép biến hình bảo giác).

### I.2.3. Tính chất 3

Phép nghịch đảo $f$ biến $M, N$ lần lượt thành $M', N'$ ta có

$$M'N' = \frac{|k|MN}{OM.ON}$$

## I.3. Ảnh của đường thẳng, đường tròn qua phép nghịch đảo

### I.3.1. Ảnh của đường tròn qua phép nghịch đảo

- Ảnh của đường tròn tâm $I$ không đi qua cực $O$ là một đường tròn tâm $I'$ không đi qua cực và $I'$ thuộc đường thẳng $OI$ ($I'$ không phải là ảnh của $I$)

- Ảnh của đường tròn tâm $I$ đi qua cực là một đường thẳng vuông góc với $OI$.

### I.3.2. Ảnh của đường thẳng qua phép nghịch đảo

- Ảnh của đường thẳng qua cực là chính nó

- Ảnh của đường thẳng $a$ không qua cực là một đường tròn tâm $I$ đi qua cực và $OI \perp a$.

Cách dựng ảnh của đường tròn, đường thẳng xin nhường lại cho bạn đọc!

**Chú ý:** Nếu $k > 0$ thì tập hợp các điểm bất động của $f$ là đường tròn $(O, \sqrt{k})$, đường tròn này gọi là đường tròn nghịch đảo của $f$.

Nếu $k < 0$ thì $f$ không có điểm bất động.

$O$ là điểm duy nhất không có ảnh và tạo ảnh, nhưng nếu bổ sung điểm vô cực thì ảnh của $O$ chính là điểm vô cực.

# II. Các dạng toán cơ bản

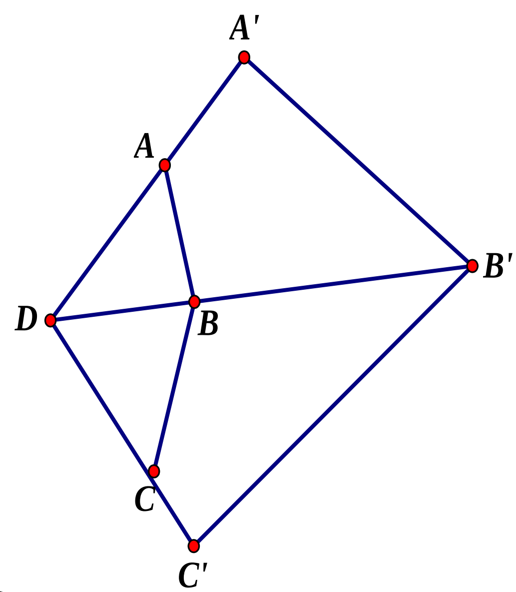
## II.1. Các bài toán về độ dài

Khi gặp các bài toán chứng minh liên quan đến độ dài đoạn thẳng, ta thường sử dụng hệ thức (1) để đưa biểu thức cần chứng minh về một hệ thức mới, đơn giản hơn hệ thức ban đầu.

**Ví dụ 1 (Mathlins.ro).** Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle BAD + \angle BCD = 90^0$. Chứng minh rằng

$$(AB.CD)^2 + (AD.BC)^2 = (AC.BD)^2.$$

**Lời giải**




Xét phép nghịch đảo cực $D$ phương tích $k$

Gọi ảnh của $A,B,C$ lần lượt là $A', B', C'$. Ta có

Tứ giác $ABB'A'$ và $BCC'B'$ nội tiếp nên

$\angle A'BD = \angle BAD$; $\angle DB'C' = \angle BCD$

Suy ra $\angle A'B'C' = 90^0$ suy ra

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{AC.k^2}{DA.DC}\right)^2 = \left(\frac{AB.k^2}{DA.DB}\right)^2 + \left(\frac{BC.k^2}{DB.DC}\right)^2$$

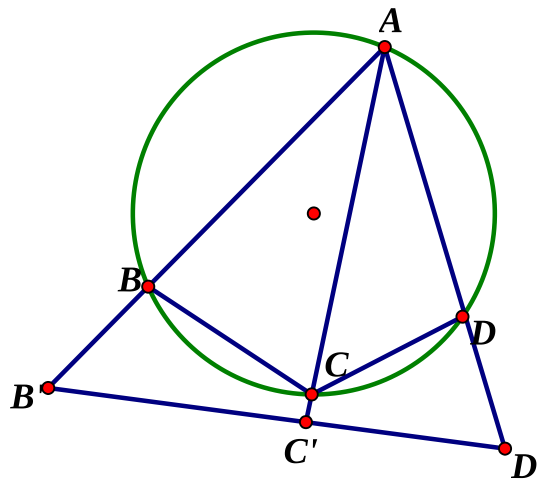
$$\Leftrightarrow (AB.CD)^2 + (AD.BC)^2 = (AC.BD)^2$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

Như vậy việc sử dụng phép nghịch đảo giúp cho bài toán trở nên dễ dàng hơn rất nhiều!

**Ví dụ 2 (Định lý Ptolémée).** Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một tứ giác nội tiếp là tích hai đường chéo bằng tổng tích các cặp cạnh đối diện.

**Lời giải**




Xét phép nghịch đảo cực $A$, phương tích $k$

Gọi ảnh của $B, C, D$ lần lượt là $B', C' D'$.

Ta có $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $B', C', D'$ thẳng hàng theo thứ tự đó

$$\Leftrightarrow B'C' + C'D' = B'D' \Leftrightarrow \frac{k^2.BC}{AB.AC} + \frac{k^2.CD}{AC.AD} = \frac{k^2.BD}{AB.AD}$$

$$\Leftrightarrow AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

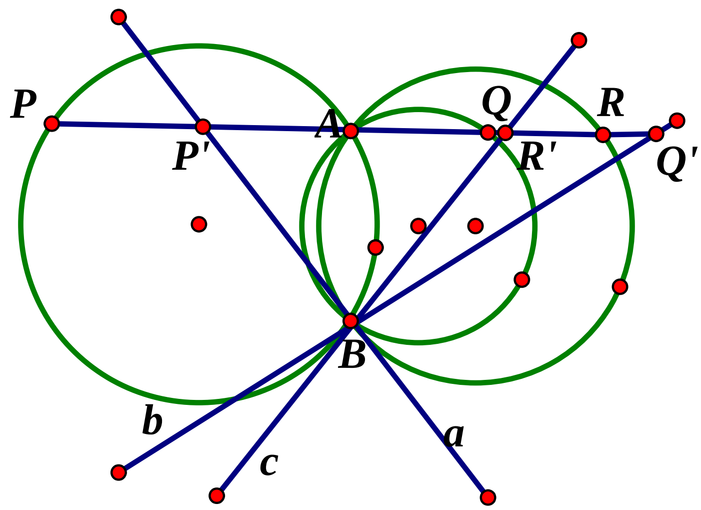
Từ đó có điều phải chứng minh.

Tất nhiên từ đây ta cũng suy ra ngay bất đẳng thức Ptolémée.

**Ví dụ 3.** Cho ba đường tròn cùng đi qua *A*. Một đường thẳng đi qua *A*, cắt ba đường tròn đó lần lượt tại ba điểm *P*, *Q*, *R* khác *A*. Chứng minh rằng $\frac{PQ}{P\mathrm{R}}$ không đổi.

**Lời giải**

Xét phép nghịch đảo cực *A*, phương tích $AB^2$.




Khi đó các đường tròn đã cho lần lượt biến thành các đường thẳng cố định *a*, *b*, *c* (như hình vẽ).

Gọi ảnh của *P*, *Q*, *R* lần lượt là *P'*, *Q'*, *R'* lần lượt nằm trên *a*, *b*, *c*.

Ta có *B*(*A*, *Q'*, *R'*, *P'*) = $\frac{\overline{\mathrm{AR'}}}{\overline{AP'}}:\frac{\overline{\mathrm{Q'R'}}}{\overline{Q'P'}}$ không đổi.

Mà

$$\overline{AP'}=\frac{AB^2}{\overline{AP}};\overline{AR'}=\frac{AB^2}{\overline{AR}};\overline{Q'P'}=\frac{AB^2.\overline{QP}}{\overline{AQ}.\overline{AP}};\overline{Q'R'}=\frac{AB^2.\overline{QR}}{\overline{AQ}.\overline{AR}}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\overline{AR'}}{\overline{AP'}} : \frac{\overline{Q'R'}}{\overline{Q'P'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$$

Từ đó có điều phải chứng minh.

**II.2. Chứng minh một số quan hệ: Song song, vuông góc, đồng quy, thẳng hàng**

Muốn chứng minh ba đường thẳng *a*, *b*, *c* đồng quy, ta chứng minh chúng là ảnh của ba đường tròn cùng đi qua *A*, *B* qua phép nghịch đảo cực *A*.

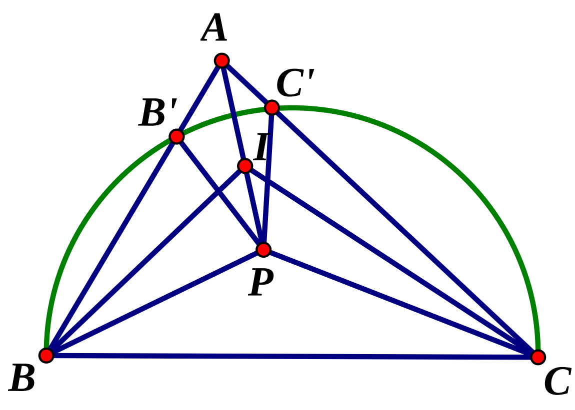
Muốn chứng minh ba điểm *A*, *B*, *C* thẳng hàng, ta chứng minh ảnh của chúng qua phép nghịch đảo cực *I* là cùng với cực nghịch đảo tạo thành một tứ giác nội tiếp.

Ta cũng có thể đưa về bài toán độ dài để chứng minh.

**Ví dụ 1 (IMO 1996).** Cho *P* là điểm nằm trong tam giác *ABC* sao cho

$\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$. Gọi *D*, *E* lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *APB* và tam giác *APC*. Chứng minh rằng *AP*, *BD*, *CE* đồng quy.

**Lời giải**




Ta cần chứng minh

$$\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PC}$$

Xét phép nghịch đảo cực *A* phương tích $k = AP^2$

Gọi *B'*, *C'* lần lượt là ảnh của *B*, *C* qua phép nghịch đảo đó.

Ta có $\angle APB - \angle C = \angle AB'P - \angle AB'C' = \angle PB'C'$

Tương tự có $\angle APC - \angle B = \angle PC'B'$

Do đó tam giác $PB'C'$ cân tại P hay $PB' = PC'$

Mặt khác, do $P$ là ảnh của $P$ nên ta có

$$PB' = \frac{k^2 PB}{AP.AB}; PC' = \frac{k^2 PC}{AP.AC}$$

Từ đó suy ra $\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PC}$

Vậy có điều phải chứng minh.

**Ví dụ 2 (IMO SL 1997).** Cho tam giác $A_1A_2A_3$ không cân ngoại tiếp đường tròn tâm $I$. $C_i$, i = 1, 2, 3 là đường tròn nhỏ hơn đi qua I tiếp xúc với $A_iA_{i+1}$ và $A_iA_{i+2}$. $B_i$ là giao điểm thứ hai của $C_{i+1}$ và $C_{i+2}$. Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_1I$, $A_2B_2I$, $A_3B_3I$ thẳng hàng.

**Lời giải**

Vì các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_1I$, $A_2B_2I$, $A_3B_3I$ cùng đi qua I nên yêu cầu bài toán tương đương với các đường tròn đó còn có một điểm chung khác nữa.

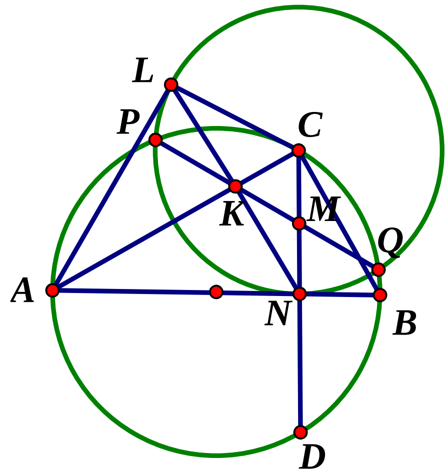
Xét f là phép nghịch đảo cực I phương tích k bất kì (Bạn đọc tự vẽ hình)

Kí hiệu X' = f(X)

Ta có ảnh của $C_i$ là đường thẳng $B_{i+1}^{'}B_{i+2}^{'}$

**Ví dụ 4 (Singapore 2010).** Cho $CD$ là một dây cung của đường tròn ($T_1$). Đường kính $AB$ vuông góc với $CN$ tại $N$, ($AN > NB$). Đường tròn ($T_2$) tâm $C$, bán kính $CN$ cắt ($T_1$) tại $P$, $Q$. $PQ$ cắt $CD$ tại $M$, và $AC$ tại $K$. Đường thẳng $NK$ cắt ($T_2$) tại điểm thứ hai là $L$. Chứng minh rằng $PQ \perp AL$.

**Lời giải**




Ta có $\overline{KA}.\overline{KC} = \overline{KP}.\overline{KQ} = \overline{KN}.\overline{KL}$

Nên $A,L,C,N$ cùng thuộc một đường tròn suy ra $CL \perp AL$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $PQ \parallel CL$

Xét Phép nghịch đảo $f$ cực $C$ phương tích $CN^2$, ta có

$f$ biến $P$ thành $P$, $Q$ thành $Q$ nên đường tròn ($T_1$) biến thành đường thẳng $PQ$

Do đó $f(D) = M$ hay $CM.CD = CN^2 \Leftrightarrow 2CM.CN = CN^2 \Leftrightarrow CN = 2CM$

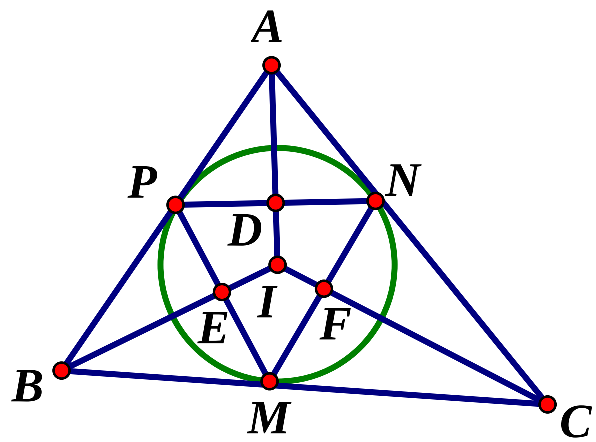
Từ đó suy ra $M$ là trung điểm $CN$.

Dễ thấy $K$ là trung điểm $NL$ nên $MK // CL$

Từ đó có điều phải chứng minh.

**Ví dụ 4.** Cho tam giác $ABC$. Đường tròn tâm $I$ nội tiếp tam giác $ABC$, tiếp xúc với $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt tại $M$, $N$, $P$. Chứng minh rằng $O$, $I$ và trực tâm $H$ của tam giác $MNP$ thẳng hàng.

**Lời giải**




Xét phép nghịch đảo *f* cực *I* phương tích *r* (*r* là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*)

Khi đó *f* biến đường tròn Euler của tam giác *MNP* (là đường tròn ngoại tiếp tam giác *DEF*) thành đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Gọi tâm đường tròn Euler của tam giác *MNP* là *J*. Khi đó *I, J, O* thẳng hàng

Mặt khác *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MNP* nên *H, I, J* thẳng hàng

Từ đó suy ra *H, I, O* thẳng hàng.

**II.3. Bài toán về góc và sự tiếp xúc của các đường cong**

Đây cũng là dạng toán đặc trưng nhất cho ưu thế của phép nghịch đảo. Bởi vì phép nghịch đảo bảo toàn góc giữa hai đường cong.

Qua phép nghịch đảo:

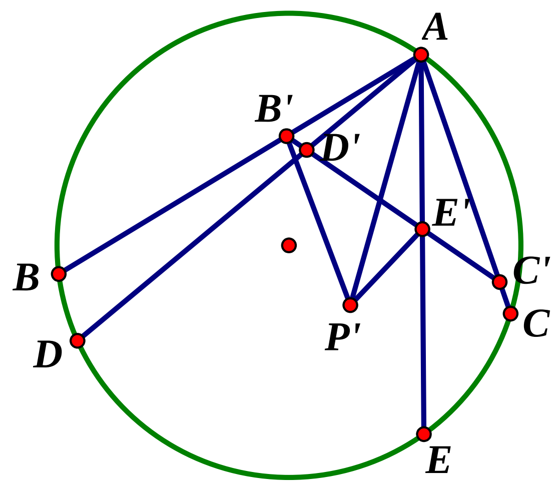
- Hai đường thẳng song song có thể biến thành: hai đường thẳng song song, hai đường tròn tiếp xúc nhau hoặc một đường tròn và một đường thẳng tiếp xúc nhau.

- Hai đường tròn tiếp xúc nhau biến thành: hai đường thẳng song song, hai đường tròn tiếp xúc nhau hoặc một đường tròn và một đường thẳng tiếp xúc nhau.

- Một đường tròn và một đường thẳng tiếp xúc nhau biến thành: hai đường thẳng song song, hai đường tròn tiếp xúc nhau hoặc một đường tròn và một đường thẳng tiếp xúc nhau.

**Ví dụ 1 (China 2012).** Cho tam giác *ABC* có góc *A* lớn nhất. Gọi *D* và *E* lần lượt là là trung điểm cung *ABC*, *ACB* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Đường tròn ($C_1$ ) tâm $C_1$ qua *A*, *B* tiếp xúc với *AC* tại *A*, đường tròn ($C_2$ ) tâm $C_2$ qua *A*, *E* tiếp xúc *AD* tại *A*. $C_1$ và $C_2$ cắt nhau tại *A* và *P*. Chứng minh rằng *AP* là phân giác $\angle BAC$.

**Lời giải**




Xét phép nghịch đảo *f* cực *A* phương tích *k*.

Gọi *X'* = f(*X*)

*f* biến đường trung trực của *AC* thành đường tròn (C') tâm *C'*, *f*(*C*) = *C'*.

Do *A*, *B*, *C*, *D*, *E* cùng thuộc một đường tròn nên *B'*, *C'*, *D'*, *E'* cùng thuộc một đường thẳng.

Ta có $\angle AD'C' = \angle ACD = \angle DAC = \angle D'AC'$.

Suy ra *C'D'* = *C'A*

($C_1$) biến thành đường thẳng *B'P'* và *AC* biến thành *AC* nên *B'P'* // *AC*

Tương tự $P'E' \parallel AD$

Từ đó suy ra $\angle D'AC' = \angle B'P'E'$

Từ $P'E' \parallel AD'$ suy ra $\angle B'E'P' = \angle AD'E' = \angle D'AC' = \angle B'P'E'$

Suy ra tam giác $B'E'P'$ cân tại $B' \Rightarrow B'E' = B'P' = B'A$

Suy ra tam giác $B'AP'$ cân tại $B'$

Suy ra

$$2\angle BAP = 2\angle B'AP' = 180^0 - \angle AB'P'$$

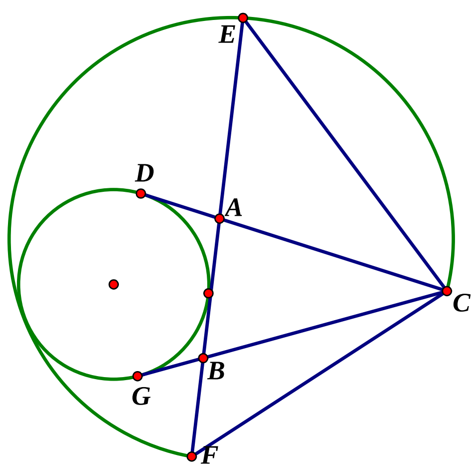
$$= 180^0 - \angle AB'C' - \angle C'B'P'$$

$$= 180^0 - \angle AB'C' - \angle B'C'A = \angle BAC$$

Vây có điều phải chứng minh.

**Ví dụ 2**. Cho $p$ là nửa chu vi của tam giác $ABC$. $E, F$ là hai điểm trên $AB$ sao cho $CE = CF = p$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $CEF$ tiếp xúc với đường ròn bàng tiếp góc $C$ của tam giác $ABC$.

**Lời giải**




Gọi (T) là đường tròn bang tiếp góc $C$

Ta có $CE = CF = CD = CG = p$.

Xét phép nghịch đảo $f$ cực $C$ phương tích $p^2$

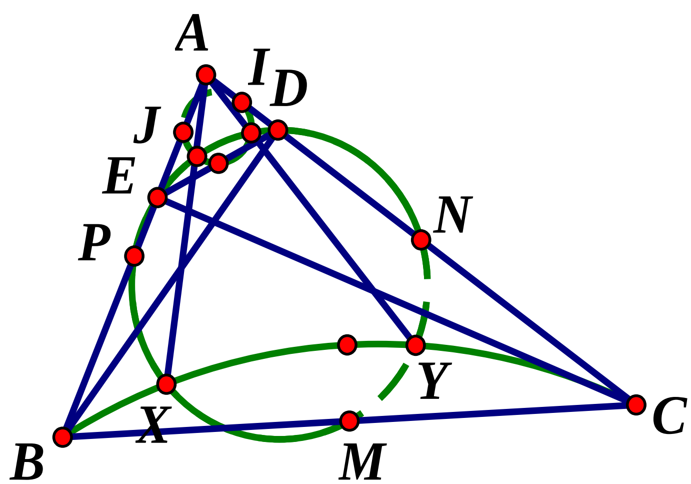
Khi đó $f$ biến $D, G, E, F$ thành chính nó

Suy ra đường tròn (T) biến thành chính nó, đường tròn ngoại tiếp tam giác $CEF$ thành đường thẳng $EF$

Do $EF$ tiếp xúc (T) nên ($CEF$) tiếp xúc ($T$). (đpcm)

**Ví dụ 3 (Serbi 2013).** Cho $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $BC$, $CA$, $AB$ của tam giác nhọn $ABC$. Gọi $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác $BOC$ và $MNP$ cắt nhau tại $X$, $Y$ bên trong tam giác A$B$C. Chứng minh rằng $\angle BAX = \angle CAY$.

**Lời giải**




Xét phép nghịch đảo $f$ cực $A$ phương tích $AD.AN$

Gọi $I$, $J$ lần lượt là tâm của $AD$, $AE$ ta có $AI.AB = \frac{1}{2}AD.2AN = AD.AN$

Suy ra $f$ biến $I$ thành $C$, biến $J$ thành $B$

Vậy $f$ biến ($MNP$) thành chính nó, biến đường tròn Euler ($T$) của tam giác $ADE$ thành ($ABC$)

Gọi $R$, $S$ là giao của (T) và ($MNP$) suy ra $f$: $R, S \mapsto X, Y$

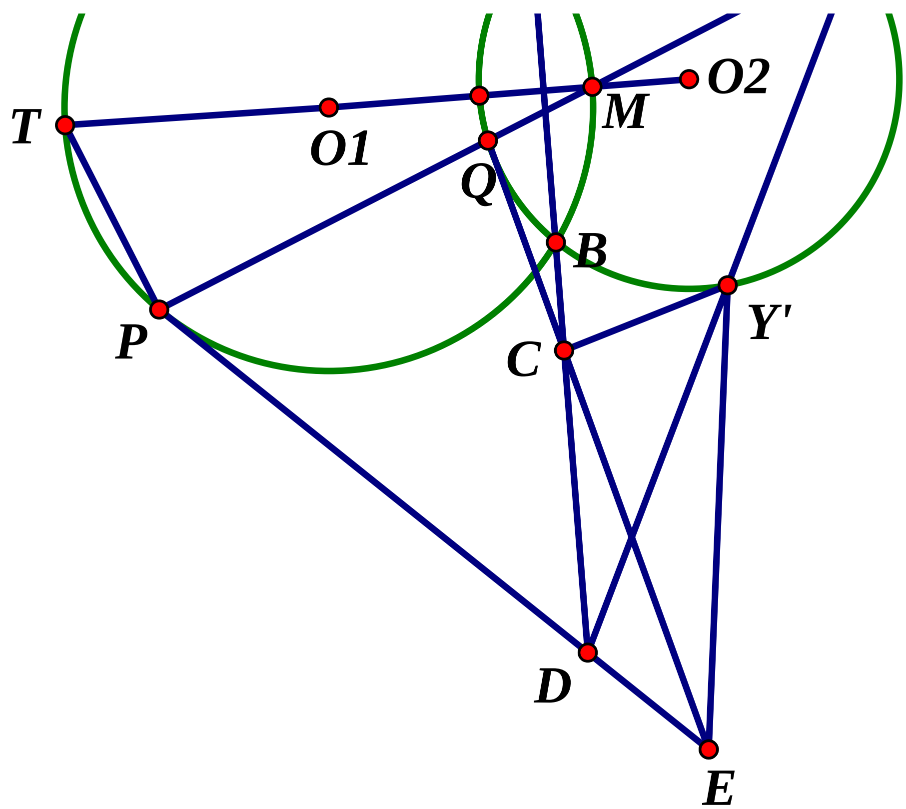
Mặt khác phép biến hình g là tích của phép vị tự tâm $A$, tỉ số $\frac{AB}{AD}$ và phép đối xứng qua đường phân giác trong góc $A$, biến tam giác $ADE$ thành tam giác $ABC$.

Suy ra $g$: $R \mapsto Y, S \mapsto X \Rightarrow \angle BAX = \angle BAR = \angle CAS = \angle CAY$

Vậy có điều phải chứng minh.

**Ví dụ 4 (APMO 2014).** Cho hai đường tròn ($T_1$) và ($T_2$) cắt nhau tại $A$, $B$. $M$ là trung điểm cung AB của ($T_1$) và M nằm trong ($T_2$). Dây cung MP của đường tròn ($T_1$) cắt ($T_2$) tại $Q$. $l_p$ là tiếp tuyến của ($T_1$) tại $P$, $l_q$ là tiếp tuyến của ($T_2$) tại $Q$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi $AB$, $l_p$, $l_q$ tiếp xúc với đường tròn ($T_2$).

**Lời giải**




Gọi $DEF$ là tam giác tạo bởi ba đường thẳng $l_p$, $l_q$ và $AB$.

$MP$ cắt ($T_2$) tại $Y$, $PM$ cắt $AB$ tại $X$, $O_1O_2$ cắt ($T_1$) tại $T$, $M$.

Ta có

$$\angle PXD = \angle PTM = \angle EPX$$

Suy ra tam giác $PDX$ cân tại $D$.

Xét phép nghịch đảo f cực D phương tích $DP^2$.

Khi đo $f$: $P \mapsto P$, $B \mapsto A$, $X \mapsto X$.

Do đó ($T_1$) và ($T_2$) biến thành chính nó.

Gọi $Y'$ là giao điểm thứ hai của $DY$ và ($T_2$) khi đó

$$f: Y \mapsto Y' \Rightarrow f: \overline{PXY} \mapsto (DPXY')$$

Lại có

$$\angle DXY' = \angle DYX = \angle CQY'$$

Suy ra $CQXY'$ nội tiếp

Áp dụng định lý Miquel cho tam giác $PME$ ta có $Y'$ thuộc ($CDE$)

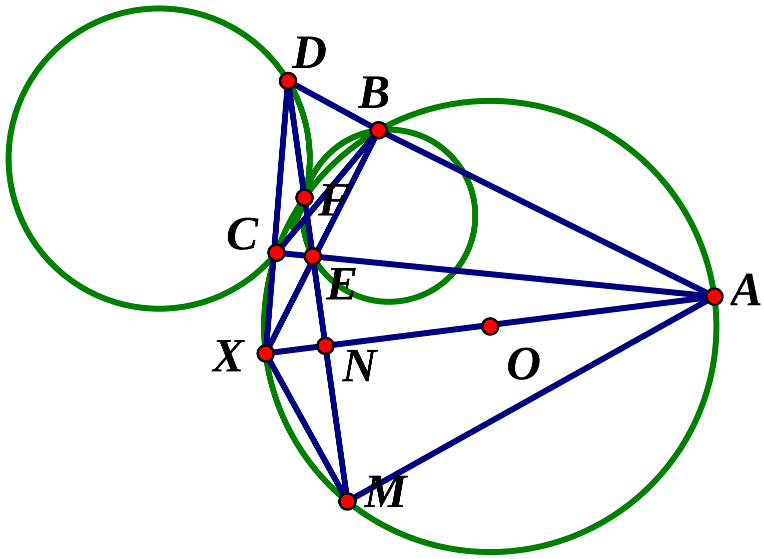
Gọi $Y'Y'$ là tiếp tuyến của ($T_2$) ta có

$$\angle Y'Y'D = \angle Y'Y'Y = \angle Y'QY = \angle XCY' = \angle DEY'$$

Suy ra điều phải chứng minh.

**Ví dụ 5 (Balkan 2012).**Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn ($O$), $\angle ABC > 90^0$. Gọi $D$ là giao điểm của đường thẳng $d$ ( qua $C$, vuông góc với $AC$) và đường thẳng $AB$, $l$ là đường thẳng qua $D$ vuông góc với $AO$,$E$ là giao của $l$ và $AC$, $F$ là giao của ($O$) và $l$ ($F$ nằm giữa $D$, $E$). Chứng minh rằng ($BFE$) tiếp xúc ($CFD$) tại $F$.

**Lời giải**




Gọi $X$ là giao điểm thứ hai của $CD$ và $(O)$ suy ra $AX$ là đường kính của $(O)$.

$E$ là trực tâm tam giác $ADX$.

Xét phép nghịch đảo $f$ cực $D$ phương tích $DA.DB$.

Ta có

$$f: A \mapsto B, C \mapsto X, E \mapsto N$$

$$f: (O) \mapsto (O) \Rightarrow f: F \mapsto M$$

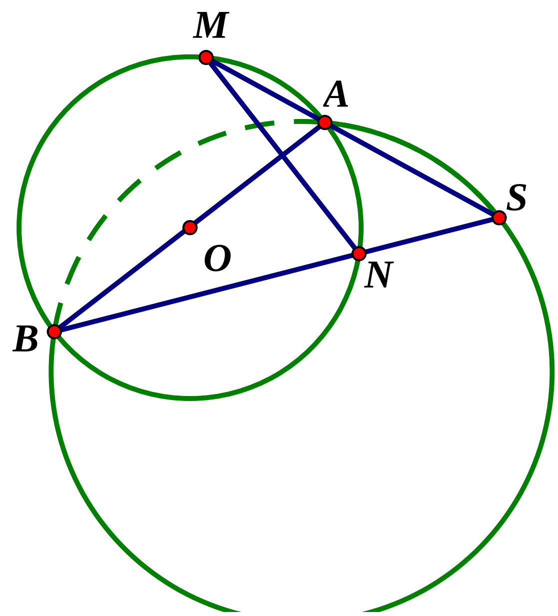
Do đó $f: (BFE) \mapsto (AMN), (CFD) \mapsto MX$

Mà $MX$ tiếp xúc $(AMN)$ suy ra $(BFE)$ tiếp xúc $(CFD)$.

### II.4. Bài toán về quỹ tích, đường, điểm cố định

**Ví dụ 1.** Cho đường tròn $(O)$ và điểm S nằm ngoài $(O)$, $AB$ là đường kính thay đổi của $(O)$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là giao điểm thứ hai của $SA$, $AB$. Chứng minh rằng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải**




Xét phép nghịc đảo cực $S$ phương tích $SA.SM$

Khi đó

$$f: (O) \mapsto (O)$$

$$MN \mapsto (SAB)$$

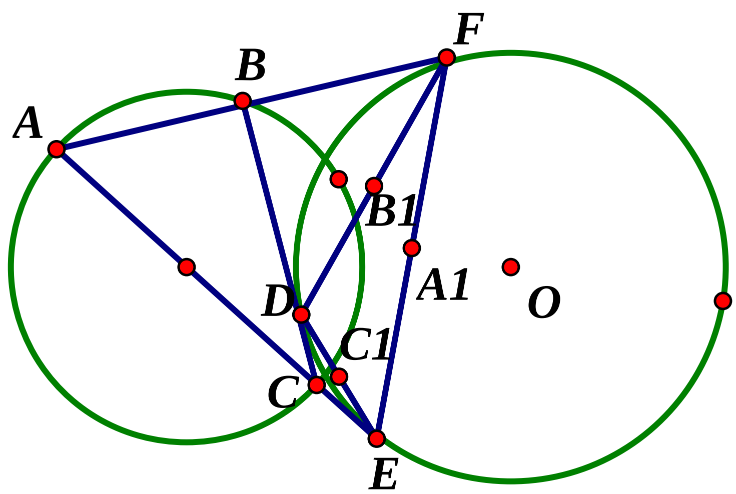
Chỉ cần chứng minh ($SAB$) đi qua một điểm cố định khác $S$.

Xét phép nghịch đảo cực $O$, phương tích $-R^2$ biến $B$ thành $A$, $S$ thành $I$ cố định trên ($SAB$)

Từ đó suy ra $MN$ luôn đi qua $f(I)$ cố định.

**Ví dụ 2 (China TST 2012).** Cho hai đường tròn cố định ($T_1$), ($T_2$). S là tập hợp các tam giác $ABC$ sao cho ($T_1$) là đường tròn ngoại tiếp và ($T_2$) là đường tròn bang tiếp góc $A$. ($T_2$) tiếp xúc với các đường thẳng $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt tại $D$, $E$, $F$. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác $DEF$ là một điểm cố định.

**Lời giải**




Gọi $O$, $r$ lần lượt là tâm và bán kính của $(T_2)$. $A_1$, $B_1$, $C_1$ lần lượt là trung điểm của $EF$, $FD$, $DE$.

Xét phép nghịch đảo $f$ cực $O$, phương tích $r^2$

$$f: A_1 \mapsto A, B_1 \mapsto B, C_1 \mapsto C$$

Do đó $f$ biến đường tròn Euler của tam giác $DEF$ thành ($ABC$) và ngược lại suy ra đường tròn Euler của tam giác $DEF$ cố định suy ra tâm $K$ của nó cố định

Mà $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $DEF$ cố định suy ra $G$ thuộc $OK$ và

$\dfrac{\overline{GO}}{\overline{GK}}$ cố định. Do đó $G$ cố định.

**Nhận xét**: ta cũng có thể chứng minh trực tâm tam giác $DEF$ cố định.

## III. Bài tập

**Bài 1 (Serbi 2010).** Cho tam giác $ABC$ nhọn. Gọi $M$ là trung điểm $BC$, $D$, $E$, $F$ lần lượt là chân đường cao hạ từ $A$, $B$, $C$ của tam giác $ABC$. Gọi $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$, $S$ là trung điểm $AH$, $G$ là giao của $EF$ và $AH$, $N$ là giao của đoạn $AM$ và ($BCH$). Chứng minh rằng $\angle HMA = \angle GNS$.

**Bài 2 (USA 1993).** Cho *ABCD* là tứ giác lồi sao cho các đường chéo *C* và *BD* vuông góc tại *O*. Chứng minh rằng các điểm đối xứng của *O* qua *AB*, *BC*, *CD*, *DA* cùng năm trên một đường tròn.

**Bài 3 (Israeli 1995).** Cho nửa đường tròn (T) đường kính *PQ*. Đường tròn ($T_1$) tiếp xúc trong với (T) và tiếp xúc *PQ* tại *C*. Gọi *A* là một điểm trên (T), *B* là một điểm trên *PQ* sao cho $AB \perp PQ$ và tiếp xúc ($T_1$).

Chứng minh rằng *AC* là phân giác góc $\angle PAB$.

**Bài 4.** Cho bôn đường tròn ($T_1$), ($T_2$), ($T_3$), ($T_4$) sao cho mỗi đường tròn ($T_1$), ($T_2$) đều tiếp xúc với ($T_3$), ($T_4$). Chứng minh rằng bốn tiếp điểm cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 5 (IMO SL 2002).** Cho đường tròn (T) nội tiếp tam giác nhọn *ABC*, tiếp xúc với *BC* tại *K*. *AD* là đường cao của tam giác *ABC*, *M* là trung điểm của *AD*. Nếu N là một điểm chung của (T) và *KM*, chứng minh rằng (T) và đường tròn ngoại tiếp tam giác *BCN* tiếp xúc nhau tại *N*.

**Bài 6.** Cho *KL*, *KN* là các tiếp tuyến kẻ từ *K* tới đường tròn (T). *M* là điểm trên đường kéo dài của *KN* về phía *N*, *P* là giao điểm thứ hai của (T) và (*KLM*). *Q* là chân đường vuông góc hạ từ *N* xuống *ML*. Chứng minh rằng $\angle MPQ = 2\angle KML$.

**Bài 7.** Cho *A*, *B*, *C* là ba điểm thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ các nửa đường tròn ($T_1$), ($T_2$) đường kính *AB*, *BC* về cùng phía so với đường thẳng *AB*. Đường tròn ($T_3$) tiếp xúc với nửa đường tròn ($T_1$), tiếp xúc ($T_2$) tại *M* khác *C* và tiếp xúc với đường vuông góc với *AB* tại *C*. Chứng minh rằng *AM* tiếp xúc ($T_2$).

**Bài 8 (Mathlinks.ro).** Cho tam giác *ABC*, *M* là điểm nằm trong tam giác. Các đường thẳng qua *M* lần lượt vuông góc với *MA*, *MB*, *MC* lần lượt cắt *BC*, *CA*, *AB* lần lượt tại *X*, *Y*, *Z*. Chứng minh rằng *X*, *Y*, *Z* thẳng hàng.

**Bài 9 (USA TST 2011).** Cho tam giác *ABC* nhọn nội tiếp (*O*), tâm *O*. *H* là trực tâm tam giác *ABC*. Hai điểm *M*, *N* lần lượt là trung điểm *AB*, *AC*. Tia *MH*, *NH* cắt (O) lần lượt tại *P*, *Q*. Hai đường thẳng *MN*, *PQ* cắt nhau tại *R*.

Chứng minh rằng $OA \perp RA$.

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Dusan Djukie. Inversin (Tài liệu trên imo.org.yn)

[2] Trang web mathlinks.ro

[3] Trang web mathscope.org

[4] Đỗ Thanh Sơn. Một số chuyên đề hình học phẳng bòi dưỡng học sinh giỏi. NXB GD 2009.

[5] Đỗ Thanh Sơn. Các phép biến hình. NXB GD 2008.