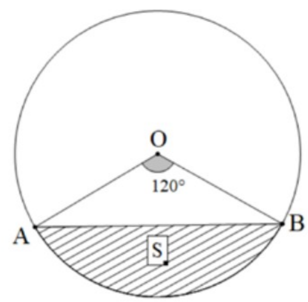
ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 BẮC GIANG 2023-2024

Thời gian làm bài: 120 phút

PHẦN I: TRẮC NGHIỆM *(6 điểm)*

Câu 1: Cho đường tròn tâm O bán kính R có dây cung AB = 6. Biết $\widehat{AOB} = 120^0$ (như hình vẽ).



Diện tích S của phần hình tròn giới hạn bởi cung nhỏ AB và dây cung AB bằng:

A. $S=3(3\pi-\sqrt{3})$ B. $S=2(3\pi-\sqrt{3})$
C. $S=4\pi-¿\,3\sqrt{3}$ D. $S=3(3\pi-\sqrt{2})$

Câu 2: Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(7-m)x+\sqrt{m+2}$ đồng biến trên R

A. 11 B. 8 C. 9 D. 12

Câu 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+my=3m \\ mx-y=m^2-2 \end{cases}$ (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m với $-2023<m\le 2023$ để hệ có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0)$ thỏa mãn

$x_0^2-2x_0-y_0>0$?

A. 2023 B. 4043 C. 2022 D. 4044

Câu 4: Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng phương trình $x^2-3mx-2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{x_1^2+3mx_2+6m}{m^2}+\dfrac{m^2}{x_2^2+3mx_1+6m}=4$

A. -3 B. $\dfrac{-56}{23}$ C. $\dfrac{2}{17}$ D. $\dfrac{256}{153}$

Câu 5: Khi $x=1+\sqrt[3]{2}$ thì biểu thức $P=x^4-5x^3+9x^2-12x+6$ có giá trị bằng

$a+\sqrt[3]{b}$ với $a,b\in Z$. Giá trị của biểu thức $2a-b$ là:

A. 48 B. 6 C. 36 D. 0

Câu 6: Cho hai điểm B, C thuộc đường tròn (O) với $\widehat{BOC}=100^0$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại A. Số đo góc ABC bằng:

A. 50^0 B. 45^0 C. 40^0 D. 55^0

Câu 7: Cho biểu thức $f(x)=\left(2x^3-21x+2022\right)^{2023}$. Tính giá trị của biểu thức $f(x)$ khi $x=\sqrt[3]{7+\sqrt{\frac{49}{8}}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{\frac{49}{8}}}$

A. 2025^{2023} B. -1 C. 1 D. 2050^{2023}

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M(x_0;y_0)$ là hình chiếu vuông góc của điểm O lên đường thẳng d: $y=mx-m-2$ (với m là tham số). Khi đó độ dài đoạn thẳng OM đạt giá trị lớn nhất, tính $P=x_0+2y_0$

A. $P=-3$ B. $P=1$ C. $P=2$ D. $P=-2$

Câu 9: Biết hệ phương trình $\begin{cases} x+my=m+1 \\ mx+y=3m-1 \end{cases}$ (m là tham số) vô nghiệm. Giá trị của m là

A. $m=\pm1$ B. $m=0$ C. $m=-1$ D. $m=1$

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = 10\sqrt{3}$ cm. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Khi tam giác AMB là tam giác đều, tính chiều cao của tam giác ABC kẻ từ A.

A. 10cm B. $6\sqrt{3}$cm C. 9cm D. $5\sqrt{3}$cm

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi A, B là hai điểm thay đổi thuộc hai tia Ox, Oy tương ứng sao cho ba điểm A, B, và M(2; 1) luôn thẳng hàng. Diện tích của tam giác OAB có giá trị nhỏ nhất là

A. 6 B. 4 C. 8 D. 2

Câu 12: Biết rằng $A=\frac{59}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\left(a\sqrt{3}+b\sqrt{5}+c\sqrt{7}\right)\left(d\sqrt{15}-1\right)$, với a,b,c,d là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $a+b+c+d$.

A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 13: Cho tam giác ABC cân tại A với AB = 9, BC = 12 và M là trung điểm của đoạn BC. Gọi H là chân đường cao của tam giác AMB kẻ từ M; I, K lần lượt là trung điểm của đoạn MH, BH. Đường thẳng AI cắt MK tại E, giá trị của AI.AE bằng:

A. 32 B. 34 C. 33 D. 35

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng

$y=2x+3$ và $y=-x+1$. Giá trị của biểu thức x_0+4y_0 bằng:

A. -2 B. 6 C. -1 D. $\frac{7}{3}$

Câu 15: Cho đường tròn tâm O bán kính R = 16cm có dây cung AB = 20cm. Trên dây AB lấy điểm C sao cho AC = 8cm. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên đường kính AE của đường tròn (O). Tính độ dài đoạn thẳng AD.

A. $\frac{9}{2}cm$ B. $\frac{11}{2}cm$ C. $6\,cm$ D. 5cm

Câu 16: Phương trình $x^4-4x+m-1=0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt lớn không khi và chỉ khi:

A. m > 0 B. 1 < m < 5 C. $1<m\le 5$ D. m < 5

Câu 17: Cho hai đường tròn $(O; 6\,cm)$ và $(O; 8\,cm)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B và $\widehat{OAO}'=90^0$. Đường thẳng d qua A cắt đường tròn tâm O và đường tròn tâm O' lần lượt tại C và D (C, D đều khác A). Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng CD là

A. 20cm B. 30cm C. 24cm D. 25cm

Câu 18: Cho đường tròn tâm O, bán kính R và hai dây cung AB, CD vuông góc với nhau tại I. Biết IC = 4, ID = 12, IB = 6. Tính R

A. R = 8 B. R = $\sqrt{66}$ C. R = $\sqrt{63}$ D. R = $\sqrt{65}$

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: y = mx và parabol (P) : y = x^2 (m là tham số). Tính tích tất cả các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{6}$

A. -4 B. 2 C. -2 D. -6

Câu 20: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $(3x-7)^2+\sqrt{x+11+8\sqrt{x-5}}+|z+x-y|=4$. Giá trị của biểu thức $P=|x+y+z|$ bằng

A. P = 30 B. P = 31 C. P = 15 D. P = 20

II. TỰ LUẬN *(14,0 điểm)*

Câu I. *(6 điểm)*

1. a) Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}-\frac{2x-\sqrt{x}+1}{4x-1}\right).\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{2}+2\right)$ với $x>0; x\ne\frac{1}{4}$

b) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2$.

Tính $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2x-m+2=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2=x_2$.

3. Giải phương trình: $4(x-2)\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9(x^2-3x+2)\sqrt{2x-2}$

Câu II. *(3 điểm)*

1. Cho hai đa thức $A(x)=8x^3-4x^2+3x+1$ và $B(x)=2x^2-4x^2+5x+4$. Biết $A(m)=2$ và $B(n)=5$ với m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $2m+n=1$.

2. Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $\frac{x^2+2x-1}{xy+y+2}$ là số nguyên. Chứng minh rằng x,y là số chính phương.

Câu III. *(4 điểm)*

Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') (với R > R') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Đường thẳng d thay đổi qua A cắt hai đường tròn (O; R) và (O'; R') lần lượt tại các điểm M, N (M, N khác A) và A thuộc đoạn MN. Các tiếp tuyến với đường tròn (O; R) tại M và đường tròn (O; R') tại N cắt nhau tại K.

1. Chứng minh tứ giác MBNK là tứ giác nội tiếp.

2. Gọi P, Q, H tương ứng là hình chiếu vuông góc của điểm B lên các đường thẳng KM, KN và MN. Chứng minh rằng ba điểm P, H, Q thẳng hàng và đường thẳng PQ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

3. Chứng minh rằng PH = QH khi các đường phân giác trong của góc MKN và MBN cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng MN

Câu IV. *(1 điểm)* Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ĐÁP ÁN

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM

CÂU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ĐÁP ÁN	C	C	B	B	A	A	D	A	C	D
CÂU	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ĐÁP ÁN	B	C	D	B	D	B	A	D	C	A

B. PHẦN TỰ LUẬN

1.a) Với $x>0$ và $x\neq\frac{1}{4}$, ta có:

$$P=\left[\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}-\frac{2x-\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}\right].\left[\left(x\sqrt{x}+\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)\right]$$

$$¿\left[\frac{2x+\sqrt{x})}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}-\frac{2x-\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}\right].\left[\left(\frac{x}{2}.(2\sqrt{x}+1)\right)+\frac{(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\right]$$

$$¿\left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}\right].(2\sqrt{x}+1)\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$¿\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$$

1.b) Từ giả thiết ta được $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2$

$\Longleftrightarrow xy+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2+1}=2$ (1)

$\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geq 0,\forall x$ và tương tự $\sqrt{y^2+1}-y>\sqrt{y^2}-y=|y|-y\geq 0,\forall y$

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2\Longleftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=\frac{1}{2}$$

$\Longleftrightarrow y\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}-xy=\frac{-1}{2}$ (2)

Cộng theo vế của (1) và (2). Ta được $x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=\frac{3}{4}$

2.

Ta có $\Delta'=-1-m$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$\Delta'>0 \Leftrightarrow -1-m>0 \Longleftrightarrow m\leftarrow 1$(*).

Theo định lý Vi-et ta được $\begin{cases} x_1+x_2=2 & (1) \\ x_1.x_2=m+2 & (2) \end{cases}$

Từ giả thiết $x_1^2=x_2$ và (1) ta được $x_1^2+x_1-2=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \Rightarrow x_2=4 \\ x_1=1 \Rightarrow x_2=1 \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta được $x_1=-2; x_2=4$

Thay $x_1=-2; x_2=4$ vào (2) ta được $m=-10$ (thỏa mãn điều kiện(*))

3.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 2x-2\geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}\geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x\geq -1$.Với điều kiện trên:

Phương trình tương đương với $(x-2)\left[4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}-9(x-1)\sqrt{2x-2}\right]=0$

$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & (1) \\ 4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9(x-1)\sqrt{2x-2} & (2) \end{array}\right.$

Phương trình (2)

$\Longleftrightarrow 2\sqrt{(x-1)+2\sqrt{(x-1)(x+1)}+(x+1)}=9(x-1)\sqrt{x-1}$

$\Longleftrightarrow 2\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)^2}=9(x-1)\sqrt{x-1}$

$\Longleftrightarrow 2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)=9(x-1)\sqrt{x-1}(3)$

$\Longleftrightarrow 3\sqrt{x-1}\left[3(x-1)-2\right]+2\left(2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Longleftrightarrow 3\sqrt{x-1}(3x-5)+2\left(\frac{3x-5}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right)=0$

$\Longleftrightarrow (3x-5)\left(3\sqrt{x-1}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right)=0$

Do $x\ge 1\Rightarrow 3\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}>0$ nên phương trình tương đương với $3x-5=0\Longleftrightarrow x=\dfrac{5}{3}(tm)$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{2;\dfrac{5}{3}\right\}$

Câu 2

1. Ta chứng minh nếu $B(a)=B(b)\Longrightarrow a=b(¿).Thật\ vậy$

$2a^3-4a^2+5a+4=2b^3-4b^2+5b+4$

$\Longleftrightarrow 2(a^3-b^3)-4(a^2-b^2)+5(a-b)=0$

$\Longleftrightarrow (a-b)[2a^2+2ab+2b^2-4(a+b)+5]=0$ (1)

Do $2a^2+2ab+2b^2-4(a+b)+5=(a+b-2)^2+a^2+b^2+1>0\ \forall a,b$

Nên từ (1) ta được $a-b=0\Longrightarrow a=b$

Ta được $B(1-2m)=2(1-2m)^3-4(1-2m)^2+5(1-2m)+4=-2(8m^3-4m^2+3m+1)+9$

$¿-2A(m)+9=-2.2+9=5$(Do A(m) = 2) (2)

Từ (1) và (2) ta được $B(n)=B(1-2m)$.Áp dụng tính chất (*) suy ra $n=1-2m$hay $2m+n=1(đpcm)$

2)

Do $\dfrac{x^2+2x-1}{xy+y+2}\in Z$nên $x^2+2x-1\vdots(xy+y+2)$ (1)

$\Longrightarrow (x+1)^2-2\vdots y(x+1)+2\Longrightarrow y[(x+1)^2-2]\vdots y(x+1)+2$

$\Longrightarrow (x+1)[y(x+1)+2]-[2(x+1)+2y]\vdots y(x+1)+2$

$\Longrightarrow 2(x+1)+2y\vdots y(x+1)+2\Longrightarrow 2(x+1)+2y\ge y(x+1)+2$(do x, y nguyên dương)

$\Longrightarrow (x-1)(y-2)\le 2$ (2)

+ Với $y=1$ thay vào (1) phải có $x^2+2x-1\vdots x+3\Rightarrow (x+3)(x-3)+2(x+3)+2\vdots x+2\Longrightarrow 2\vdots x+2$ (không thỏa mãn)

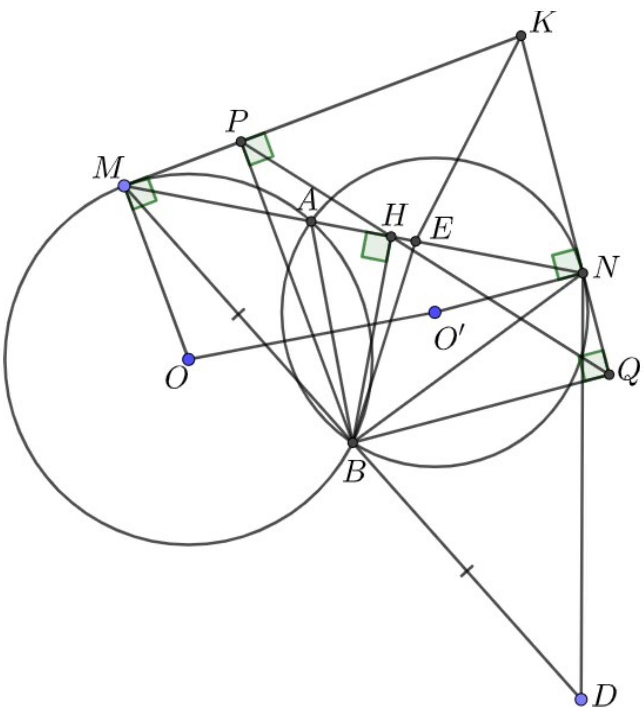
Vì $x\ge 1, y\ge 2$ và $(x-1)(y-2)\in N$,kết hợp với (2) suy ra $(x-1)(y-2)\in\{0;1;2\}$

TH1: $(x-1)(y-2)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right.$ thay vào (1) thấy không thỏa mãn.

TH2: $\left[\begin{array}{l} (x-1)(y-2)=1 \\ (x-1)(y-2)=2 \end{array}\right. \Rightarrow (x;y) \in \{(2;3);(2;4);(3;3)\}$.

Thay lại vào (1) ta thấy chỉ có $(x;y)=(3;3)$ thỏa mãn suy ra $xy=9$ là số chính phương (đpcm).

Câu 3



1)

Ta có $\widehat{MBA}=\widehat{KMA}\; hay\; \widehat{MBA}=\widehat{KMN}\; (1)$ (tính chất tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và tính chất nội tiếp).

Tương tự $\widehat{NBA}=\widehat{KNA}\; hay\; \widehat{NBA}=\widehat{KNM}$ (2)

Ta có $\widehat{MBN}=\widehat{MBA}+\widehat{NBA}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\widehat{MBN}=\widehat{KMN}+\widehat{KNM}$ (4)

Do $\widehat{KMN}+\widehat{KNM}+\widehat{MKN}=180^0\; suy\; ra\; \widehat{KMN}+\widehat{KNM}=180^0-\widehat{MKN}$ (5)

Từ (4) và (5) ta được $\widehat{MBN}+\widehat{MKN}=180^0$ hay tứ giác MBNK nội tiếp.

2)

Từ giả thiết ta cũng có tứ giác PBQK nội tiếp nên $\widehat{PBQ}=180^0-\widehat{PKQ}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{MBN}=\widehat{PBQ}\, suy\, ra\, \widehat{PBM}=\widehat{QBN}$ (7)

Xét trường hợp H thuộc đoạn AN (các trường hợp còn lại tương tự). Dễ thấy tứ giác PMBH nội tiếp vì $\widehat{MPB}=\widehat{MHB}=90^0$ và QNHB nội tiếp vì $\widehat{BHN}+\widehat{BQN}=180^0$, do đó $\widehat{PHM}$ = $\widehat{MBP}$ (8) và $\widehat{QHN}=\widehat{QBN}$ (9)

Từ (7), (8) và (9) ta suy ra ba điểm P, H, Q thẳng hàng

Trước hết do $\widehat{BHA}=90^0$ nên điểm H thuộc đường tròn đường kính AB (10)

Xét tứ giác nội tiếp PMBH, ta có:

$\widehat{HBM}=180^0-\widehat{HPM}=\widehat{PMH}+\widehat{PHM}$ mà $\widehat{PMH}=\widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{HBM}=\widehat{PHM}+\widehat{ABM}$ (11)

Mặt khác, $\widehat{HBM}=\widehat{HBA}+\widehat{ABM}$ (12)

Từ (11) và (12) $\Rightarrow \widehat{PHM}=\widehat{HBA}$ (13)

Từ (10) và (13) ⇒ đường thẳng PQ luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính AB tại điểm H.

3)

Gọi D là điểm đối xứng của điểm M qua điểm B

Gọi E là giao điểm của hai đường phân giác trong của $\widehat{MBN}$ và $\widehat{MKN}$

Khi điểm E thuộc đường thẳng MN thì theo tính chất đường phân giác trong của tam giác ta có

$$\frac{MK}{KN}=\frac{MB}{BN}\left(¿\frac{ME}{EN}\right) suy\, ra\, \frac{MK}{KN}=\frac{DB}{BN} \qquad (14)$$

Mặt khác, $\widehat{MKN}=\widehat{DBN}$ (cùng bù với $\widehat{MBN}$) (15)

Từ (14) và (15) $\Rightarrow \Delta MKN \quad \Delta DBN \Rightarrow \widehat{MNK}=\widehat{DNB}, \widehat{NMK}=\widehat{NDB}$ (16)

Do tứ giác $PHBM$ nội tiếp nên $\widehat{BPH}=\widehat{BMH}$ hay $\widehat{BPQ}=\widehat{BMN}$ và $\widehat{BPH}=\widehat{NDB}$ hay $\widehat{BPQ}=\widehat{NDB}\left(=\widehat{NDB}\right)$

Từ (16) và (17)$\Rightarrow \Delta PBH \quad \Delta MDN\,(g.g) \Rightarrow \frac{PH}{MN}=\frac{BP}{DM}=\frac{BP}{2.BM}$ (18)

Dễ thấy $\Delta MBN \quad \Delta PBQ\,(g.g)$ nên $\frac{PQ}{MN}=\frac{BP}{BM}$ (19)

Từ (18)(19) ta được $PH=\frac{1}{2PQ}$ suy ra $HP=HQ$(dpcm)

Câu 4

Do a,b,cdương $a^2+b^2+c^2=1$ nên $o<a,b,c<1$ và $1-a^2,1-b^2,1-c^2$ là các số dương

Áp dụng bất đẳng thức Coossi cho ba số không âm $2a^2,1-a^2,1-a^2$ ta được

$2a^2+\left(1-a^2\right)+\left(1-a^2\right)\geq 3\sqrt[3]{2a^2\left(1-a^2\right)\left(1-a^2\right)}$

$\Longleftrightarrow 2a^2\left(1-a^2\right)\left(1-a^2\right)\leq\frac{2^3}{27}$, dấu "=" xảy ra $\Longleftrightarrow 3a^2=1\Longleftrightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ta có:

$$\frac{a}{b^2+c^2}=\frac{a}{1-a^2}=\frac{a^2}{a\left(1-a^2\right)}=\frac{a^2}{\sqrt{\frac{1}{2}2a^2\left(1-a^2\right)\left(1-a^2\right)}}\geq\frac{a^2}{\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2^3}{27}}}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\left(1\right)$$

Chứng minh tương tự ta được :

$$\frac{b}{c^2+a^2}=\frac{b}{1-b^2}=\frac{b^2}{b\left(1-b^2\right)}=\frac{b^2}{\sqrt{\frac{1}{2}2b^2\left(1-b^2\right)\left(1-b^2\right)}}\geq\frac{b^2}{\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2^3}{27}}}=\frac{3\sqrt{3}b^2}{2}\left(2\right)$$

$$\frac{c}{b^2+a^2}=\frac{c}{1-c^2}=\frac{c^2}{c\left(1-c^2\right)}=\frac{c^2}{\sqrt{\frac{1}{2}2c^2\left(1-c^2\right)\left(1-c^2\right)}}\geq\frac{c^2}{\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2^3}{27}}}=\frac{3\sqrt{3}c^2}{2}\left(3\right)$$

Cộng (1), (2), (3) theo vế ta có:

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{b^2+a^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{b^2+a^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(dpcm\right)$$

Dấu "=" xảy ra $\Longleftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$