PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP BẮC GIANG

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN 8
Thời gian: 150 phút không kể thời gian giao đề

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $M = \dfrac{x^4+2}{x^6+1} + \dfrac{x^2-1}{x^4-x^2+1} - \dfrac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}$
   a) Rút gọn M
   b) Tìm giá trị lớn nhất của M
2. Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\dfrac{1-2x}{1-x} + \dfrac{1-2y}{1-y} = 1$

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$
2. Cho x, y, z thỏa mãn $x+y+z=7; \quad x^2+y^2+z^2=23; \quad xyz=3$

Tính giá trị của biểu thức $H = \dfrac{1}{xy+z-6} + \dfrac{1}{yz+x-6} + \dfrac{1}{zx+y-6}$

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2+3xy-17=7x-2y$
2. Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16$

Bài 4. (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên cạnh AB lấy M $(0 < MB < MA)$ và trên cạnh BC lấy N sao cho $\widehat{MON} = 90^0$. Gọi E là giao điểm của AN với DC, gọi K là giao điểm của ON với BE.

1) Chứng minh ΔMON vuông cân
2) Chứng minh MN song song với BE
3) Chứng minh CK vuông góc với BE
4) Qua K vẽ đường song song với OM cắt BC tại H. Chứng minh:
   $\dfrac{KC}{KB} + \dfrac{KN}{KH} + \dfrac{CN}{BH} = 1$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \ge 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{24}{y}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1.

a)

$$M=\frac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+3)}$$

$$=\frac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^4+2+(x^2-1)(x^2+1)-(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{x^4+2+x^4-1-x^4+x^2-1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$$

$$=\frac{x^4+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{x^2.(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$$

Vậy $M=\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$ với mọi x

b) Ta có : $M=\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$ với mọi x

- Nếu $x=0$ ta có $M=0$
- Nếu $x\neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}-1}$

Ta có: $x^2+\dfrac{1}{x^2}-1=\left(x^2-2.x.\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+1\geq 1$

Nên ta có: $M=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2-1}}\leq 1$. Dấu $"="$ xảy ra khi $x=1$.

Vậy M lớn nhất là $M=1$ khi $x=1$

2.

$$\frac{1-2x}{1-x}+\frac{1-2y}{1-y}=1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y)+(1-2y)(1-x)=(1-x)(1-y)$$

Ta có $\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy=1-x-y+xy \Leftrightarrow x+y=\frac{3xy+1}{2}$

Ta có : $M=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=\left(\frac{3xy+1}{2}\right)^2-3xy=...=\left(\frac{3xy-1}{2}\right)^2$

Vì $x,y\in\mathbb{Q}$ nên $\frac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỷ , Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2.

1)

Ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=....=(x^2+12x+27)(x^2+12x+35)+2033$

Đặt $x^2+12x+30=t,$ ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=(t-3)(t+5)+2033$

$=t^2+2t-15+2033=t(t+2)+2018$

Vậy ta có $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=(x^2+12x+30)(x^2+12x+32)+2018$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$ là 2018.

2) Vì $x+y+z=7\Rightarrow z=-x-y+7\Rightarrow xy+z-6=...=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự ta có: $yz+x-6=(y-1)(z-1); zx+y-6=(z-1)(y-1)$

Vậy $H=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=\frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$=\frac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1}=\frac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1}=\frac{4}{9-(xy+yz+xz)}$ Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)\Rightarrow 7^2=23+2(xy+yz+xz)$

$\Rightarrow xy+yz+xz=13$

Vậy $H=\frac{4}{9-13}=-1$

Bài 3.

1) Ta có:

$3x^2+3xy-17=7x-2y \Leftrightarrow 3xy+2y=-3x^2+7x+17 \Leftrightarrow (3x+2)y=-3x^2+7x+17$ Vì x nguyên nên $2x+3\neq 0$ nên ta có:

$$y = \frac{-3x^2 + 7x + 17}{3x+2} = \frac{-3x^2 - 2x + 9x + 6 + 11}{2}$$

$$= \frac{-x(3x+2) + 3(3x+2) + 11}{3x+2} = -x + 3 + \frac{11}{3x+2}$$

Vì x, y nguyên nên ta có $\frac{11}{3x+2}$ nguyên $\Rightarrow 11 \vdots 3x+2 \Rightarrow 3x+2 = \pm 1; \pm 11$

- Xét các trường hợp ta tìm được $x = -1; y = -1; x = -3; y = 5$ thỏa mãn và kết luận

2) Ta có: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16 \Leftrightarrow (3x-2)(3x+3)^2(3x+8) = -144$

Đặt $3x+3 = t \Rightarrow 3x-2 = t-5; 3x+8 = t+5$

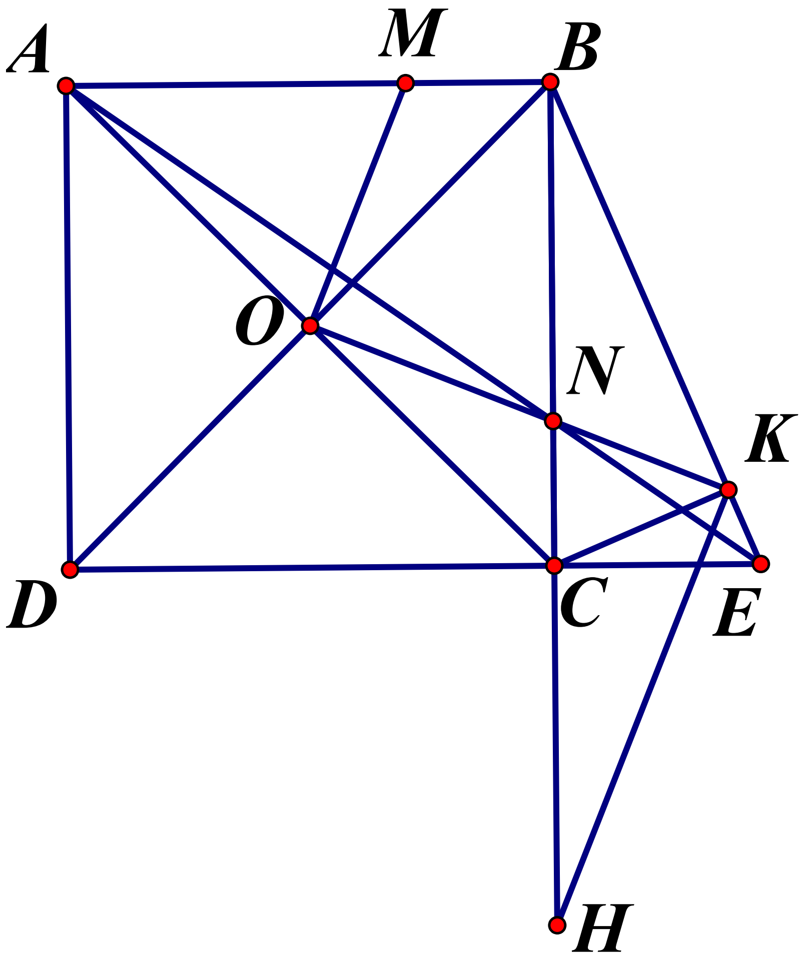
Ta có phương trình: $(t-5)t^2(t+5) = -144$

$\Leftrightarrow t^4 - 25t^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 9)(t^2 - 16) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 9 \\ t^2 = 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm 3 \\ t = \pm 5 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp ta tìm được $x = 0; x = -2; x = \frac{2}{3}; x = -\frac{8}{3}$

Bài 4.



1) Ta có : $\widehat{BOC}=90^0 \Rightarrow \widehat{CON}+\widehat{BON}=90^0;$ vì

$\widehat{MON}=90^0 \Rightarrow \widehat{BOM}+\widehat{BON}=90^0 \Rightarrow \widehat{BOM}=\widehat{CON}$

Ta có BD là phân giác $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{MBO}=\widehat{CBO}=\frac{\widehat{BOC}}{2}=45^0$

Tương tự ta có: $\widehat{NCO}=\widehat{DCO}=\frac{\widehat{BOC}}{2}=45^0$. Vậy ta có : $\widehat{MBO}=\widehat{NCO}$

Xét ΔOBM và ΔOCN có $OB=OC;\widehat{BOM}=\widehat{CON};\widehat{MBO}=\widehat{NCO}$

$\Rightarrow \Delta OBM=\Delta OCN \Rightarrow OM=ON$

Xét ΔMON có $\widehat{MON}=90^0; OM=ON \Rightarrow \Delta MON$ vuông cân

2) $\Delta OBM=\Delta OCN \Rightarrow MB=NC$ mà $AB=BC \Rightarrow AB-MB=BC-NC$

$\Rightarrow AM=BM \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}$

Ta có: $AB // CD \Rightarrow AM // CE \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{BN}{NC}$

Vậy ta có: $\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NE} \Rightarrow MN // BE$ (Theo định lý Talet đảo)

3) Vì $MN // BE \Rightarrow \widehat{BKN} = \widehat{MNO} = 45^0$ (đồng vị và có tam giác MON vuông cân)

$\Rightarrow \Delta BNK \sim \Delta ONC$ (vì có $\widehat{BNK} = \widehat{ONK}; \widehat{BKN} = \widehat{OCN} = 45^0$) $\Rightarrow \frac{NB}{NK} = \frac{NO}{NC}$

- Xét $\Delta BNO; \Delta KNC$ có $\widehat{BNO} = \widehat{CNK}; \frac{NB}{NK} = \frac{NO}{NC} \Rightarrow \Delta BNO \sim \Delta KNC$

  $\Rightarrow \widehat{NKC} = \widehat{NBO} = 45^0$

  Vậy ta có: $\widehat{BKC} = \widehat{BKN} + \widehat{CKN} = 45^0 + 45^0 = 90^0 \Rightarrow CK \perp BE$

4) – Vì $KH // OM$ mà $MK \perp OK \Rightarrow MK \perp KH \Rightarrow \widehat{NKH} = 90^0$ mà $\widehat{NKC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{CKH} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BKN} = \widehat{NKC} = \widehat{CKH} = 45^0$

Xét ΔBKC có $\widehat{BKN} = \widehat{NKC} \Rightarrow KN$ là phân giác trong của ΔBKC, mà $KH \perp KN$

$\Rightarrow KH$ là phân giác ngoài của $\Delta BKC \Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{HC}{HB}$

Chứng minh tương tự ta có : $\frac{KN}{KH} = \frac{BN}{BH}$

Vậy ta có $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{NC}{BH} = \frac{HC}{HB} + \frac{BN}{BH} + \frac{CN}{BH} = ... = \frac{BH}{BH} = 1$

Bài 5

Ta có: $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

$= (x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 8y + 8) + \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) + \left(\frac{24}{y} + 6y - 24\right) + (x + 2y) + 17$

$= (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + \frac{(x-1)^2}{x} + \frac{6(y-2)^2}{y} + (x+2y) + 17$

$\geq 0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 17 = 22$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2(y-2)^2 = \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{6(y-2)^2}{y} = 0$ và $x + 2y = 5$

$\Leftrightarrow x = 1$ và $y = 2$. Vậy H nhỏ nhất là $H = 22 \Leftrightarrow x = 1, y = 2$