

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Phương pháp.

1. Tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm

Thực hiện theo các bước sau

B1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$

B2. Tìm các giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới các biên của miền xác định và dựa vào định nghĩa của các đường tiệm cận để kết luận

2. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm

Thực hiện theo các bước sau

B1. Tìm tập xác định của hàm số (*đồ thị hàm số f chỉ có thể có tiệm cận xiên nếu tập xác định của nó là một khoảng vô hạn hay một nửa khoảng vô hạn*)

B2. Sử dụng định nghĩa

Hoặc sử dụng định lý:

Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$ thì đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số f

CHÚ Ý: Đối với hàm phân thức: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức của x ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

i) Tiệm cận đứng.

Nếu $\begin{cases} P(x_0) = 0 \\ Q(x_0) \neq 0 \end{cases}$ thì đường thẳng: $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

ii) Tiệm cận ngang

Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục hoành độ

Nếu bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x)$ thì đồ thị hàm có tiệm cận ngang là đường thẳng: $y = \frac{A}{B}$ trong đó A, B lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$

Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận ngang

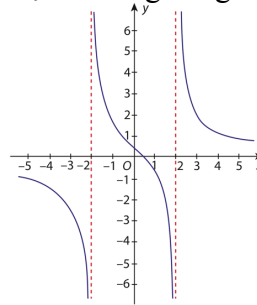
iii) Tiệm cận xiên

Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn hay bằng bậc của $Q(x)$ hoặc lớn hơn bậc của $Q(x)$ từ hai bậc trở lên thì đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên

Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ một bậc và $P(x)$ không chia hết cho $Q(x)$ thì đồ thị hàm có tiệm cận xiên và ta tìm tiệm cận xiên bằng cách chia $P(x)$ cho $Q(x)$ và viết $f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$, trong đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$.

Suy ra đường thẳng: $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2 - 4x}{4 - x^2}$ có đồ thị là đường cong như Hình.



Các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$ có phải là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho hay không? Vì sao?

Câu 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$.

Câu 3. Giải thích vì sao đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}$?

Câu 4. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$.

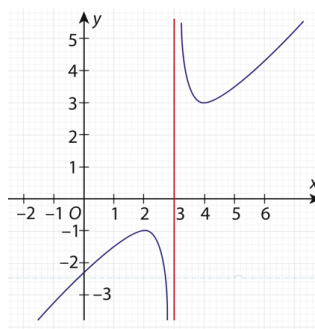
Câu 5. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

b) $y = \frac{2}{\sqrt{x - 1}}$

Câu 6. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{-2x + 1}{x + 1}$.

Câu 7. Đường cong ở Hình là đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$.



Chứng minh rằng đường thẳng $\Delta: y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Vẽ Δ lên cùng hệ trục tọa độ với (C).

Câu 8. Chứng minh rằng đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$y = f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Câu 9. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

Câu 10. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

Câu 11. Tìm tiệm cận của hàm số:

a) $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$

b) $y = \frac{2 - 4x}{1 - x}$

c) $y = 2x + 1 - \frac{1}{x + 2}$

d) $y = \frac{x^2}{1 - x}$

Câu 12. Tìm tiệm cận của hàm số:

a) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

c) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Câu 13. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x + 1 - \frac{1}{x - 5}$

b) $y = \frac{2x^2 - 6x + 1}{3x + 1}$

Câu 14. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 4}$

b) $y = \frac{4x}{x^2 + 8}$

Câu 15. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x - 4}{x^3 + 1} + 2x - 3$

b) $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 2x}$

Câu 16. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$$\text{a)} \quad y = \frac{2x^3 - x + 4}{x^2 - 4}$$

$$\text{b)} \quad y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x + 3}$$

Câu 17. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$$\text{a)} \quad y = x + 4 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{b)} \quad y = 3x + \sqrt{x^2 + 4}$$

$$\text{c)} \quad y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

Dạng 2. Bài toán chứa tham số

Câu 18. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hàm số $y = \frac{x - 2}{mx^2 - 2x + 4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

Câu 19. Hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a - b$ bằng?

Câu 20. Cho hàm số $y = 2x + 1 - \frac{1}{x+2}$ có đồ thị là (C). Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc (C), qua M vẽ hai đường thẳng lần lượt song song với hai đường tiệm cận của (C), hai đường thẳng này tạo với hai đường tiệm cận một hình bình hành, chứng minh hình bình hành này có diện tích không đổi.

Câu 21. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của hàm số đã cho đến đường tiệm cận xiên của nó bằng $\frac{2}{\sqrt{17}}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{1 - x^2}{x}$ có đồ thị là (C). Tìm các điểm M thuộc (C) sao cho $d(M, TCD) = \sqrt{2}d(M, TCX)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$, có đồ thị là (C). Tìm tất cả các điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

Câu 24. Cho hàm số $y = 2x - 1 - \frac{2}{2x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của (C) sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ nhất.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{3-2x}{x}$ có đồ thị là (C). Tìm các điểm trên (C) có tổng các khoảng cách từ đó đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

Câu 26. Tìm giá trị tham số m sao cho $y = \frac{2x^2 + 3mx - m + 2}{x-1}$ có tiệm cận xiên tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4 .

Câu 27. Tìm giá trị tham số m sao cho $y = 2mx + m + 2 - \frac{m^2 + 1}{x + 1}$ có tiệm cận xiên cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + 1}{x + 1}$. Xác định m để hàm số có cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số cùng với trục hoành tạo thành một tam giác vuông có một góc 60° .

Câu 29. Tùy theo giá trị m hãy tìm các tiệm cận của hàm số.

a. $y = \frac{mx + 1}{x + m}$

b. $y = \frac{x^2 - 4x + m}{x + 2}$

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ (C)

a. Chứng minh rằng tích số các khoảng cách từ điểm M bất kỳ trên đồ thị (C) của hàm số đến hai đường tiệm cận của nó là hằng số.

b. Tìm những điểm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.

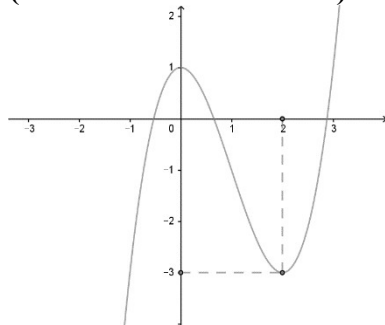
Câu 31. Cho hàm số: $y = \frac{2m - x}{x + m}$ có đồ thị là (C_m) . Cho $A(0;1)$ và I là tâm đối xứng. Tìm m để trên (C_m) tồn tại điểm B sao cho tam giác ABI vuông cân tại A .

Câu 32. (Bình Giang-Hải Dương -2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Đồ thị $y = \frac{1}{2f(x) + 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

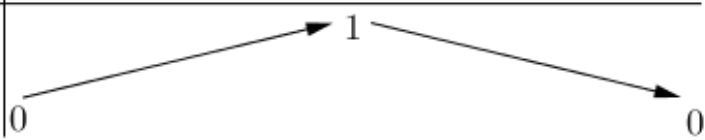
Câu 33. (THPT Minh Khai 2020) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

Câu 34. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y			1		



The graph shows a function y = f(x) on a coordinate system. The x-axis has labels -∞, 0, and +∞. The y-axis has labels 0 and 1. The function starts at y=0 as x approaches -∞, increases to a maximum value of y=1 at x=0, and then decreases back to y=0 as x approaches +∞. Arrows indicate the direction of the curve.

Tìm giá trị của m thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng 3.