|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT**  **ĐỀ ĐỀ XUẤT**  *(Đề thi gồm 01 trang)* | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **LẦN THỨ XIV, NĂM HỌC 2022 – 2023**  **ĐỀ THI MÔN TOÁN – KHỐI 10**  *Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)* |

**Câu 1. (4,0 điểm)** Giải hệ phương trình sau trên tập số thực



**Câu 2. (4,0 điểm)** Cho là các số thực dương. Chứng minh rằng



**Câu 3. (4,0 điểm)**

Cho đường tròn và điểm  ngoài cố định. Vẽ hai tiếp tuyến  của  ( là tiếp điểm). Trên cung nhỏ  của  lấy hai điểm phân biệt . Gọi  là điểm chính giữa cung nhỏ ,  là điểm di động trên ,  cắt  tại điểm thứ hai là . cắt  tại . Chứng minh rằng đường tròn  đi qua hai điểm cố định khi  thay đổi trên .

**Câu 4. (4,0 điểm)**

Với  là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu  là số nguyên thì .

**Câu 5 (4 điểm).** Trong mặt phẳng cho 20 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Các đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trong số 20 điểm đã cho được tô bằng một trong hai màu đỏ hoặc xanh. Hỏi tồn tại ít nhất bao nhiêu tam giác với 3 đỉnh thuộc 20 điểm đã cho mà các cạnh của nó được tô cùng màu?

**---------------------HẾT---------------------**

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và các loại máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Số báo danh: . . . . . . . . . .

**ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM MÔN TOÁN – KHỐI 10**

**(*Hướng dẫn này có 05 trang*)**

**Câu 1. (4,0 điểm)** Giải hệ phương trình sau trên tập số thực



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **1** | ĐK:  Từ phương trình (2) suy ra | **1** |
|  | PT (2)  Do  nên áp dụng BĐT AM-GM ta có:    Dấu  xảy ra kvck  . | **1** |
| Từ PT (1) suy ra  nên , thay vào (1) ta được: | **1** |
| Từ (3) ta có . Do đó  Vì vậy  Thử lại thỏa mãn.  Vậy hệ phương trình có nghiệm | **1** |

**Câu 2. (4,0 điểm)** Cho là các số thực dương. Chứng minh rằng



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **1** | Theo bất đẳng thức  ta có: | **1** |
|  | Đặt:  Ta chỉ cần chứng minh . | **1** |
| Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có  với mọi  Do đó ta có: | **1** |
| Suy ra:  Vậy: . Dấu “=” xảy ra khi | **1** |

Cho đường tròn và điểm  ngoài cố định. Vẽ hai tiếp tuyến  của  ( là tiếp điểm). Trên cung nhỏ  của  lấy hai điểm phân biệt . Gọi  là điểm chính giữa cung nhỏ ,  là điểm di động trên ,  cắt  tại điểm thứ hai là . cắt  tại . Chứng minh rằng đường tròn  đi qua hai điểm cố định khi  thay đổi trên .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
|  | Gọi ,.  Từ  và  kẻ hai đường thẳng vuông góc với , cắt và lần lượt tại .  Kẻ hai đường tròn , hai đường tròn trên cắt nhau tại .  Do (cùng vuông góc với ) và do cân tại  nên cân tại . Do đó nằm trên đường tròn . | **1** |
| Ta có nên (g.g) nên  Tương tự ta có . Do đó hay  nằm trên trục đẳng phương của và | **1** |
| Ta có là tiếp tuyến của nên , từ đó ta có nằm trên trục đẳng phương của  và  (Do là tiếp tuyến của ).  Do đó, là trục đẳng phương của và .  Tương tự, là trục đẳng phương của và | **1** |
|  | Do đó, ta có cũng là trục đẳng phương của và . Mà là giao điểm của và  nên  đi qua .  Dễ thấy theo cách dựng hình ta có cố định nên  đi qua 2 điểm cố định. | **1** |

**Câu 4. (4,0 điểm)**

Với là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu  là số nguyên thì .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Đáp án** | **Điểm** |
| **1** | Giả sử ngược lại rằng, tồn tại các số nguyên dương phân biệt thoả mãn đề bài.  Do nên nguyên khi và chỉ khi (1) | **1** |
|  | Giả sử tồn tại thoả mãn (1). Khi đó, tồn tại thoả (1) sao cho nhỏ nhất.  Đặt .Không mất tính tổng quát, giả sử .  Xét phương trình có một nghiệm là  nên phương trình còn có một nghiệm khác mà ta gọi là . | **1** |
| Mà theo hệ thức Viete, ta có và nên .  Theo cách chọn , ta có nên .  Theo quy tắc về dấu của tam thức bậc hai, do nên  . | **1** |
| Mặt khác ta có  Từ đó ta có mâu thuẫn, tức là giả sử của ta là sai. Vậy  . | **1** |

**Câu 5 (4 điểm).** Trong mặt phẳng cho 20 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Các đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trong số 20 điểm đã cho được tô bằng một trong hai màu đỏ hoặc xanh. Hỏi tồn tại ít nhất bao nhiêu tam giác với 3 đỉnh thuộc 20 điểm đã cho mà các cạnh của nó được tô cùng màu?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **5** | Số tam giác được tạo từ  điểm đã cho bằng .  Ta gọi một tam giác có các cạnh của nó được tô cùng một màu là *tam giác cùng màu*, loại còn lại được gọi là *tam giác khác màu*.  Gọi  là số tam giác cùng màu (), suy ra số tam giác khác màu bằng . | **1** |
|  | Ta đặt tên các điểm đã cho là . Với mỗi góc , ta gọi nó là *góc cùng màu* nếu hai cạnh  cùng màu và ngược lại ta gọi là *góc khác màu*.  Lúc đó một tam giác cùng màu có ba góc cùng màu, một tam giác khác màu có một góc cùng màu và hai góc khác màu. | **1** |
| Do đó tổng số góc cùng màu bằng .  Mặt khác, tại một điểm  bất kỳ, số cạnh xuất phát từ  là . Giả sử trong số này có  cạnh xanh và  cạnh đỏ. | **1** |
| Khi đó, số góc cùng màu đỉnh  bằng  .  Do đó ta có, suy ra .  Vậy có ít nhất  tam giác cùng màu trong số các tam giác đã cho. | **1** |

*Giáo viên soạn đề: Nguyễn Thanh Quang*

*SĐT: 0983901825*

*Email: ntquanglk@gmail.com*