Ch 8

BẤT ĐẲNG THỨC

Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán bất đẳng thức.

H. BẤT ĐẲNG THỨC

Mục Lục

. KIẾN THỨC LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a<b$ (hay $a>b; a\le b; a\ge b$) là bất đẳng thức.

Tính chất của bất đẳng thức

1.	$a<b \Leftrightarrow b>a.$	3.	$a<b \Leftrightarrow a+c<b+c.$
2.	$a<b; b<c \Rightarrow a<c.$	4.	$a<b \Leftrightarrow a.c<b.c\,(c>0).$ $a<b \Leftrightarrow a.c>b.c\,(c<0)$

- 5. Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều được một bất đẳng thức cùng chiều.
- 6. Trừ từng vế của hai bất đẳng thức khác chiều được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức thứ nhất.
- 7. Nhân từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm, ta được một bất đẳng thức cùng chiều. Đặc biệt:
  $a>b>0 \Rightarrow a^2>b^2; |a|>|b| \Rightarrow a^{2n}>b^{2n}$.
  $a>b \Rightarrow a^{2n+1}>b^{2n+1}$.
- 8.Nếu $a>b>0$ thì $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$

2. *Một số hằng bất đẳng thức hay dùng.*

◇ 1. Nếu a và b là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ (dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b$).

◇ 2. Nếu $a,b>0$ thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b$).

◇ 3. $|a+b|\le|a|+|b|$ (dấu $=$ xảy ra khi $a.b\ge 0$).

◇ 4. $|a-b|\ge|a|-|b|$ (dấu $=$ xảy ra khi $a\ge b\ge 0$ hoặc $a\le b\le 0$)

◇ 5. Bất đẳng thức Cô-si

Với $a,b\ge 0$ thì $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ hay $a+b\ge 2\sqrt{ab}.$ (dấu $=$ xảy ra khi $a=b$).

Vài dạng khác của bất đẳng thức Cô-si.

$\frac{1}{\sqrt{ab}}\ge\frac{2}{a+b}$ ($a,b>0)$).

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\ge ab;(a+b)^2\ge 4ab;a^2+b^2\ge 2ab.$$

$$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}.$$

3. Phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1. Phương pháp dùng định nghĩa của bất đẳng thức:

Muốn chứng minh $a<b$, ta chứng minh $a-b<0.$

Muốn chứng minh $a>b,$ ta chứng minh $a-b>0.$

2. Phương pháp biến đổi tương đương: $A<B\Leftrightarrow A_1<B_2\Leftrightarrow A_2<B_2\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow C<D.$

Nếu bất đẳng thức cuối đúng thì bất đẳng thức đầu đúng.

3. Phương pháp vận dụng tính chất của bất đẳng thức và vận dụng những hằng bất đẳng thức quen thuộc:

Từ các bất đẳng thức đã biết ta dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

4. Phương pháp phản chứng:

Muốn chứng minh $A<B,$ ta giả sử $A\ge B$ rồi suy ra một điều vô lí (mâu thuẫn với điều đã cho hoặc đã biết), từ đó suy ra điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng.

□. BÀI TẬP

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ac}=8abc$ (đpcm)

Bài 2: Cho 4 số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\le\sqrt{(a+b)(c+d)}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bd}}{\sqrt{(a+b)(c+d)}}=\sqrt{\frac{a}{(a+b)}.\frac{c}{(c+d)}}+\sqrt{\frac{b}{(a+b)}.\frac{d}{(c+d)}}$$

$$¿\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{d}{c+d}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{c+d}{c+d}\right)=1$$

$\Rightarrow\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\le\sqrt{(a+b)(c+d)}$ (đpcm)

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $\left| a>c ¿¿¿¿ \right.$.

Chứng minh rằng $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{(a-c)}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}.\frac{(b-c)}{b}}$$

$$¿\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right)$$

$$¿\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+1-\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+1-\frac{c}{b}\right)=1$$

$\Rightarrow\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$ (đpcm)

Bài 4: Cho 2 số thực dương $a,\ b$ thỏa $\left\{ a \ge 1 \right.$¿¿¿¿. Chứng minh rằng: $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \le ab$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có: $a\sqrt{b-1}=\sqrt{a}\sqrt{ab-a} \le \frac{1}{2}(a+ab-a)=\frac{ab}{2}$ **(1)**

Tương tự: $b\sqrt{a-1} \le \frac{ab}{2}$ **(2)**

Cộng theo vế **(1)** và **(2)**, ta được: $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \le ab$ (đpcm)

Bài 5: Cho 2 số thực dương $a,\ b$. Chứng minh rằng: $16ab(a-b)^2 \le (a+b)^4$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$16ab(a-b)^2=4.(4ab)(a-b)^2 \le 4.\left[\frac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2=4.\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2=(a+b)^4$$ (đpcm)

Bài 6: Cho 2 số thực dương $a,\ b$. Chứng minh rằng: $ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge a+b+1$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\left(\frac{ab}{2}+\frac{a}{2b}\right)+\left(\frac{ab}{2}+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}\right) ¿ 2\sqrt{\frac{ab}{2}.\frac{a}{2b}}+2\sqrt{\frac{ab}{2}.\frac{b}{2a}}+2\sqrt{\frac{a}{2b}.\frac{b}{2a}}=a+b+1$$ (đpcm)

Bài 7: Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$, $\forall\ a,b>0$

Hướng dẫn giải

Vì $a,b>0$ nên $\frac{a}{b}>0,\ \frac{b}{a}>0$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2$$ (đpcm)

Bài 8: Chứng minh rằng: $a+\frac{1}{a-1}\ge 3$, $\forall a>1$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a+\frac{1}{a-1}=a-1+\frac{1}{a-1}+1\ge 2\sqrt{(a-1)\frac{1}{a-1}}+1=2+1=3$$ (đpcm)

Bài 9: Chứng minh rằng: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2$, $\forall a\in R$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a^2+1+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2\sqrt{\sqrt{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}=2$$ (đpcm)

Bài 10: Chứng minh rằng: $\frac{3a^2}{1+9a^4}\le\frac{1}{2}$, $\forall a\ne 0$

Hướng dẫn giải

Với $\forall a\ne 0$, áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{3a^2}{1+9a^4}=\frac{1}{\frac{1}{3a^2}+\frac{9a^4}{3a^2}}=\frac{1}{\frac{1}{3a^2}+3a^2}\le\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3a^2}.3a^2}}=\frac{1}{2}$$ (đpcm)

Bài 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=(a+1)^2+\left(\frac{a^2}{a+1}+2\right)^2$, $\forall a\ne -1$

Hướng dẫn giải

$A=(a+1)^2+\left(\frac{a^2+2a+2}{a+1}\right)^2$

¿ $(a+1)^2+\left[\frac{(a+1)^2+1}{a+1}\right]^2$

¿ $(a+1)^2+\left(a+1+\frac{1}{a+1}\right)^2$

¿ $2(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}+2$ $\overset{Cauchy}{¿}$ $2\sqrt{2(a+1)^2\frac{1}{(a+1)^2}}+2=2\sqrt{2}+2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2(a+1)^2=\frac{1}{(a+1)^2}$ hay $a=\frac{-2\pm\sqrt[4]{8}}{2}$

Vậy GTNN của $A=2\sqrt{2}+2$

Bài 12: Chứng minh rằng: $a+\frac{1}{b(a-b)}\geq 3$, $\forall a>b>0$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$a+\frac{1}{b(a-b)}=b+(a-b)+\frac{1}{b(a-b)}\geq 3\sqrt[3]{b.(a-b).\frac{1}{b(a-b)}}=3$

Bài 13: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)$

¿ $\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=a+b+c$

Bài 14: Cho ba số thực $abc\neq 0$. CMR: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\geq\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\frac{b^2}{c^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{c^2}.\frac{c^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}.\frac{a^2}{b^2}}=\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{b}\right|+\left|\frac{a}{c}\right|\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

Bài 15: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. CMR

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

Hướng dẫn giải

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{2\sqrt{ca}}{\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)$$

$$\geq2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}}+2\sqrt{\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}}}+2\sqrt{\sqrt{\frac{ab}{c}}\sqrt{\frac{bc}{a}}}$$

$$=2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

$$\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

Vậy $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$

Bài 16: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq6$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{c+a}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)-3$$

$$=\frac{a+b+c}{a}+\frac{b+c+a}{b}+\frac{c+a+b}{c}-3$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\geq9-3=6$$

✪ Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị xảy ra ở biên.

Xét các bài toán sau:

Bài 1: Cho số thực $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $A = a + \frac{1}{a}$

Sai lầm thường gặp là: $A = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a.\frac{1}{a}} = 2$. Vậy GTNN của A là 2.

Nguyên nhân sai lầm: GTNN của A là 2 $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 1$ vô lý vì theo giả thuyết thì $a \geq 2$.

Lời giải đúng: $A = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{3a}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4}.\frac{1}{a}} + \frac{3a}{4} \geq 1 + \frac{3.2}{4} = \frac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{1}{a}$ hay $a = 2$

Vậy GTNN của A là $\frac{5}{2}$.

Vì sao chúng ta lại biết phân tích được như lời giải trên. Đây chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức.

Quay lại bài toán trên, dễ thấy a càng tăng thì A càng tăng. Ta dự đoán A đạt GTNN khi $a = 2$. Khi đó ta nói A đạt GTNN tại "**Điểm rơi** $a = 2$". Ta không thể áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho hai số a và $\frac{1}{a}$ vì không thỏa quy tắc dấu "=". Vì vậy ta phải tách a hoặc $\frac{1}{a}$ để khi áp dụng bất đẳng thức AM - GM thì thỏa quy tắc dấu "=". Giả sử ta sử dụng bất đẳng thức

AM - GM cho cặp số $\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{1}{a}\right)$ sao cho tại "**Điểm rơi** $a=2$" thì $\frac{a}{\alpha}=\frac{1}{a}$, ta có sơ đồ sau:

$$a=2 \Rightarrow \text{¿}\left\{\frac{a}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}\text{¿¿¿}\right.$$

Khi đó: $A=a+\frac{1}{a}=\frac{a}{4}+\frac{3a}{4}+\frac{1}{a}$ và ta có lời giải như trên.

<u>Lưu ý:</u> *Để giải bài toán trên, ngoài cách chọn cặp số* $\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{1}{a}\right)$ *ta có thể chọn các các cặp số sau:* $\left(\alpha a, \frac{1}{a}\right)$ *hoặc* $\left(a, \frac{\alpha}{a}\right)$ *hoặc* $\left(a, \frac{1}{\alpha a}\right)$.

Bài 2: Cho số thực $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a+\frac{1}{a^2}$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=2 \Rightarrow \text{¿}\left\{\frac{a}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}\text{¿¿¿}\right.$$

Sai lầm thường gặp là: $A=\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}+\frac{7a}{8} \geq 2\sqrt{\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{7a}{8}=\sqrt{\frac{1}{2a}}+\frac{7a}{8} \geq \sqrt{\frac{1}{2.2}}+\frac{7.2}{8}=\frac{9}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=2$.

Vậy GTNN của A là $\frac{9}{4}$

Nguyên nhân sai lầm: Mặc dù GTNN của A là $\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên mắc sai lầm trong đánh giá mẫu số: “ $a\ge 2\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2a}}\ge \sqrt{\frac{1}{2.2}}$ là sai”.

Lời giải đúng: $A=\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}+\frac{6a}{8}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{6a}{8}\ge \frac{3}{4}+\frac{6.2}{8}=\frac{9}{4}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=2$

Vậy GTNN của A là $\frac{9}{4}$

Bài 1: Cho 2 số thực dương *a, b* thỏa $a+b\le 1$. Tìm GTNN của $A=ab+\frac{1}{ab}$

<u>Phân tích:</u>

Ta có: $ab\le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le \frac{1}{4}$

Sơ đồ điểm rơi: $ab=\frac{1}{4}\Rightarrow ¿\left\{\frac{ab}{\alpha}=\frac{1}{4\alpha} ¿¿¿\right.$

<u>Giải:</u>

Ta có:

$$ab\le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow -ab\ge -\frac{1}{4}$$

$A=16ab+\frac{1}{ab}-15ab\geq 2\sqrt{16ab\frac{1}{ab}}-15ab\geq 8-15.\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{17}{4}$

Bài 2: Cho số thực $a\geq 6$. Tìm GTNN của $A=a^2+\frac{18}{a}$

Phân tích:

Ta có : $A=a^2+\frac{18}{a}=a^2+\frac{9}{a}+\frac{9}{a}$

Dễ thấy a càng tăng thì A càng tăng. Ta dự đoán A đạt GTNN khi $a=6$. Ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a=6\Rightarrow ¿\left\{\frac{a^2}{\alpha}=\frac{36}{\alpha}¿¿¿\right.$$

Giải:

Ta có: $A=\frac{a^2}{24}+\frac{9}{a}+\frac{9}{a}+\frac{23a^2}{24}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{24}.\frac{9}{a}.\frac{9}{a}}+\frac{23a^2}{24}\geq\frac{9}{2}+\frac{23.36}{24}=39$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a^2}{24}=\frac{9}{a}\Leftrightarrow a=6$

Vậy GTNN của A là 39

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+2b+3c\geq 20$.

Tìm GTNN của $A=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$

Phân tích:

Dự đoán GTNN của A đạt được khi $a+2b+3c=20$,tại điểm rơi $a=2, b=3, c=4$.

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=2\Rightarrow ¿\left\{\frac{a}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}¿¿¿\right.$$

$$b=3\Rightarrow ¿\left\{\frac{b}{\beta}=\frac{3}{\beta}¿¿¿\right.$$

$$c=4\Rightarrow ¿\left\{\frac{c}{\gamma}=\frac{4}{\gamma}¿¿¿\right.$$

Giải:

$$A=\left(\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}$$
$$¿2\sqrt{\frac{3a}{4}.\frac{3}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{2}.\frac{9}{2b}}+2\sqrt{\frac{c}{4}.\frac{4}{c}}+\frac{a+2b+3c}{4}$$
$$¿3+3+2+5=13$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=2, b=3, c=4$

Vậy GTNN của A là 13

Bài 4: Cho3 số thực dương *a, b, c* thỏa $\left\{ab\ge 12¿¿¿¿\right.$.

Chứng minh rằng: $(a+b+c)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\ge\frac{121}{12}$

Phân tích:

Dự đoán GTNN của A đạt được khi $ab=12$¿¿¿¿, tại điểm rơi $a=3, b=4, c=2$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a}{18}+\frac{b}{24}+\frac{2}{ab}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{18}.\frac{b}{24}.\frac{2}{ab}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{9}+\frac{c}{6}+\frac{2}{ca}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{9}.\frac{c}{6}.\frac{2}{ca}}=1$$

$$\frac{b}{16}+\frac{c}{8}+\frac{2}{bc}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{16}.\frac{c}{8}.\frac{2}{bc}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{a}{9}+\frac{c}{6}+\frac{b}{12}+\frac{8}{abc}\geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{9}.\frac{c}{6}.\frac{b}{12}.\frac{8}{abc}}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{13a}{18}+\frac{13b}{24}\geq 2\sqrt{\frac{13a}{18}.\frac{13b}{24}}\geq 2\sqrt{\frac{13}{18}.\frac{13}{24}.12}=\frac{13}{3}$$

$$\frac{13b}{48}+\frac{13c}{24}\geq 2\sqrt{\frac{13b}{48}.\frac{13c}{24}}\geq 2\sqrt{\frac{13}{48}.\frac{13}{24}.8}=\frac{13}{4}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$(a+b+c)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\geq\frac{121}{12}$$ (đpcm)

✪ Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị đạt được tại tâm

Xét bài toán sau:

Bài toán: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$.. Tìm GTNN của $A=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Sai lầm thường gặp là: $A=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 4\sqrt[4]{a.b.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}=4$. Vậy GTNN của A là 4.

Nguyên nhân sai lầm: GTNN của A là 4 $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}\Leftrightarrow a=b=1$. Khi đó $a+b=2\ge 1$ trái giả thuyết .

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $$a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow ¿\left\{\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\alpha}=\frac{1}{2\alpha}¿¿¿\right.$$

Lời giải đúng: $A=\left(4a+4b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-3a-3b\ge 4\sqrt[4]{4a..4b.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}-3(a+b)\ge 8-3=5$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$. Vậy GTNN của A là 5

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c\le\frac{3}{2}$.

Tìm GTNN của $A=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$a=b=c=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow ¿\left\{\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\alpha}=\frac{c}{\alpha}=\frac{1}{2\alpha}¿¿¿\right.$$

Giải:

$A=\left(4a+4b+4c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3a-3b-3c$

$¿6\sqrt[6]{4a.4b.4c.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}-3(a+b+c)$

$¿12-\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$. Vậy GTNN của A là $\frac{13}{2}$

Bài 2: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c\le\frac{3}{2}$.

Tìm GTNN của $A=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $$a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow ¿\left\{a^2=b^2=c^2=\frac{1}{4}¿¿¿\right.$$

Giải:

$$A=\left(a^2+b^2+c^2+\frac{1}{8a}+\frac{1}{8b}+\frac{1}{8c}+\frac{1}{8a}+\frac{1}{8b}+\frac{1}{8c}\right)+\frac{3}{4a}+\frac{3}{4b}+\frac{3}{4c}$$

$$¿9\sqrt[9]{a^2.b^2.c^2.\frac{1}{8a}.\frac{1}{8b}.\frac{1}{8c}.\frac{1}{8a}.\frac{1}{8b}.\frac{1}{8c}}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$¿\frac{9}{4}+9.\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq\frac{9}{4}+\frac{9}{4}.\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\geq\frac{9}{4}+\frac{9}{4}.2=\frac{27}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{27}{4}$

Bài 3: Cho 2 số thực dương a, b. Tìm GTNN của $A=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b\Rightarrow ¿\left\{\frac{a+b}{\alpha\sqrt{ab}}=\frac{2a}{\alpha a}=\frac{2}{\alpha}¿¿¿\right.$$

Giải:

$$A=\left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)+\frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}}\geq2\sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}.\frac{\sqrt{ab}}{a+b}}+\frac{3.2\sqrt{ab}}{4\sqrt{ab}}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

Vậy GTNN của A là $\frac{5}{2}$

Bài 4: Cho 3 số thực dương a, b, c.

Tìm GTNN của $A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=c$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c\Rightarrow ¿\left\{\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}¿¿¿\right.$$

Giải:

$$A=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{4a}+\frac{c+a}{4b}+\frac{a+b}{4c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$$

$$¿6\sqrt[6]{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}.\frac{b+c}{4a}.\frac{c+a}{4b}.\frac{a+b}{4c}}+\frac{3}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$

$$¿3+\frac{3}{4}.6.\sqrt[6]{\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{c}.\frac{b}{c}}=3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Vậy GTNN của A là $\frac{15}{2}$

Bài 5: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$.

Tìm GTNN của : $A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $$a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow ¿\left\{\frac{1}{a^2+b^2}=2 ¿¿¿\right.$$

Giải:

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\geq 2\sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)2ab}}\geq 2.\frac{1}{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}=\frac{4}{(a+b)^2}\geq 4$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ¿\left\{a^2+b^2=2ab ¿¿¿\right.$

Vậy GTNN của A là 4

Bài 6: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\leq 1$. Tìm GTNN của $A=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $$a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow ¿\left\{\frac{1}{1+a^2+b^2}=\frac{2}{3} ¿¿¿\right.$$

Giải:

$A=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{6ab}+\frac{1}{3ab}$

$¿2\sqrt{\frac{1}{(1+a^2+b^2)6ab}}+\frac{1}{3ab}$

$¿2.\frac{1}{\frac{1+a^2+b^2+6ab}{2}}+\frac{1}{3ab}=\frac{4}{(a+b)^2+1+4ab}+\frac{1}{3ab}$

$¿\frac{4}{(a+b)^2+1+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$ $\left(\text{Do } ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$

$¿\frac{4}{2(a+b)^2+1}+\frac{4}{3(a+b)^2}$

$¿\frac{4}{2.1+1}+\frac{4}{3.1}=\frac{8}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ¿\{1+a^2+b^2=6ab ¿ \{a=b ¿¿¿$

Vậy GTNN của A là $\frac{8}{3}$

Bài 7: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$. Tìm GTNN của

$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$a=b=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi:
$$a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow ¿\{\frac{1}{a^2+b^2}=2 ¿¿¿$$

$$a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow ¿\{4ab=1 ¿¿¿$$

Giải:

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+4ab+\frac{1}{4ab}+\frac{1}{4ab}$$
$$¿2\sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)2ab}}+2\sqrt{4ab.\frac{1}{4ab}}+\frac{1}{4ab}$$
$$¿2.\frac{1}{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}+2+\frac{1}{4ab}=\frac{4}{(a+b)^2}+2+\frac{1}{4ab}$$

$$¿\frac{4}{(a+b)^2}+2+\frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\qquad \left(\text{Do } ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

$$¿\frac{5}{(a+b)^2}+2$$
$$¿\frac{5}{1}+2=7$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ¿\{a^2+b^2=2ab ¿\{4ab=\frac{1}{4ab} ¿\{a=b ¿¿¿$

Vậy GTNN của A là 7

. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho $x\ge 0$, chứng minh rằng:

a) $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+1} - 1$; b) $\dfrac{x+5}{\sqrt{x+4}} > 2$.

Bài 2: Cho $a,b,c \geq 0$, chứng minh rằng:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$;

b) $\dfrac{a}{2b+3c} + \dfrac{2b+3c}{4a} \geq 1$.

Bài 3: Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{1}}{1} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \ldots + \dfrac{\sqrt{200}}{200} > 10 + 5\sqrt{2}$

Bài 4: Chứng minh rằng: $S = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$

Bài 5: Cho $a \geq 1$, $b \geq 1$. Chứng minh rằng: $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$

Bài 6: Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $a > c$; $b > c$.

Chứng minh rằng $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$