

CHỦ ĐỀ 2**TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR****DẠNG 1****TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR**

* Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

* Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vector

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A.** $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 3. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

- A.** $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 120^\circ$.

Câu 4. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A.** $\alpha = 90^\circ$. **B.** $\alpha = 180^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 5. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. Độ dài vector $3\vec{a} + 5\vec{b}$:

A. $5\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{24}$.

C. 8.

D. 124.

Câu 6. Cho a, b có $(a+2b)$ vuông góc với vector $(5a-4b)$ và $|a|=|b|$. Khi đó:

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\cos(a, b) = 90^\circ$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Câu 7. Cho hai vector a, b thỏa mãn: $|a|=4; |b|=3; |a-b|=4$. Gọi α là góc giữa hai vector a, b . Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

B. $\alpha = 30^\circ$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

D. $\alpha = 60^\circ$.

Câu 8. u và v là 2 vector đều khác 0 . Khi đó $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2$ bằng

A. $|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

B. $|\vec{u}|^2 + 4|\vec{v}|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

C. $|\vec{u}|^2 + 4|\vec{v}|^2$.

D. $4\vec{u} \cdot \vec{v} (|\vec{u}| - |\vec{v}|)$.

Câu 9. Cho hai vector a và b có $|a|=5, |b|=12$ và $|a+b|=13$. Khi đó $\cos$ của góc giữa hai vector $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

A. $\frac{12}{13}$.

B. $\frac{5}{12}$.

C. $-\frac{119}{169}$.

D. $\frac{119}{169}$.

Câu 10. Cho $u = a + 3b$ vuông góc với $v = 7a - 5b$ và $x = a - 4b$ vuông góc với $y = 7a - 2b$. Khi đó góc giữa hai vector a và b bằng

A. $(a, b) = 75^\circ$.

B. $(a, b) = 60^\circ$.

C. $(a, b) = 120^\circ$.

D. $(a, b) = 45^\circ$.

Câu 11. Cho hai vector a, b thỏa mãn: $|a|=4; |b|=3; a \cdot b = 10$. Xét hai vector $\vec{x} = a - b, \vec{y} = a - 2b$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$.

B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

C. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

D. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 12. Cho hai vector a, b thỏa mãn: $|a|=26; |b|=28; |a+b|=48$. Độ dài vector $a - b$ bằng?

A. 25.

B. $\sqrt{616}$.

C. 9.

D. $\sqrt{618}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Cho $a=3, b=5$ góc giữa a và b bằng 120° .

A. $|a+b| = \sqrt{19}$

B. $|a-b| = 8$

C. $|a - 2b| = \sqrt{139}$

D. $|a + 2b| = 9$

Câu 14. Cho hai vector a và b .

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|a + b|^2 - |a|^2 - |b|^2)$

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2)$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|a + b|^2 - |a - b|^2)$

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|a + b|^2 - |a - b|^2)$

D.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 15. Cho 2 vector a và b thỏa mãn $|a| = 4, |b| = 3$ và $|a + 2b| = 2\sqrt{7}$. Tính (a, b) .

Câu 16. Cho hai vector a và b tạo với nhau góc 120° và $|a| = 3, |b| = 5$. Tính $|a + 2b|$.

Câu 17. Cho ba vector a, b, c thỏa mãn $|a| = 1, |b| = 2, |a - b| = 3$. Tính $(a - 2b) \cdot (2a + b)$.

Câu 18. Cho hai vector a, b có $|a| = |b| = 1$ và $(a, b) = 60^\circ$. Xác định sao cho thỏa mãn $|xa + b| = \sqrt{3}$.

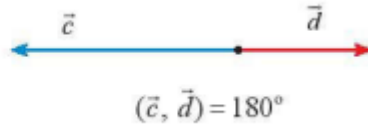
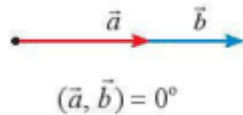
Câu 19. Cho ba véc-tơ a, b, c thỏa mãn: $|a| = 4, |b| = 1, |c| = 5$ và $5(b - a) + 3c = 0$. Khi đó biểu thức $M = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ có giá trị bao nhiêu?

Câu 20. Cho hai véc-tơ a và b thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| = 1, |a - 2b| = \sqrt{15}$. Đặt $u = a + b$ và $v = 2ka - b, k \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $(u, v) = 60^\circ$

DẠNG 2 GÓC GIỮA HAI VECTOR

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

- $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.
- Góc giữa hai vector cùng hướng và khác 0 luôn bằng 0° .
- Góc giữa hai vector ngược hướng và khác 0 luôn bằng 180° .



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

- A. 60° . B. 45° . C. 120° . D. 90° .

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

- A. 120° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:

- A. 45° B. 30° C. 90° D. 60°

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

- A. 0° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa PQ và AB là?

- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

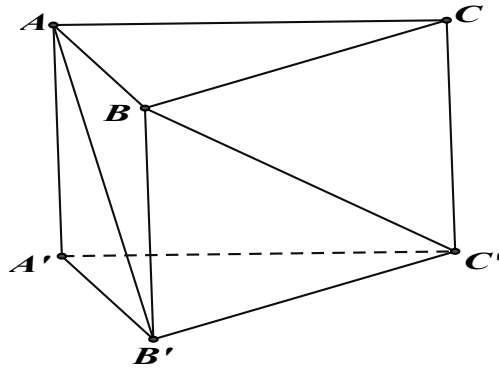
Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\angle BAC = \angle BAD = 60^\circ, \angle CAD = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

- A. 120° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

- A. AB và CD chéo nhau B. AB và CD vuông góc với nhau
C. AB và CD đồng phẳng D. AB và CD cắt nhau

Câu 28. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

- A. $\frac{1}{2}a^2$. B. a^2 . C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $\frac{3}{2}a^2$.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 120°

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

- A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 33. Cho tam giác ABC , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

A. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - BC^2}$

B. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

C. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

D. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Câu 34. Trong không gian cho ba điểm A, B, C bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

A. $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

B. $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2 \sqrt{2}$

B. a^2

C. $a^2 \sqrt{3}$

D. $\frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây:

A. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2$

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$

D. $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD, \angle CAB = \angle DAB = 60^\circ, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định **đúng**?

A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$

B. $\varphi = 60^\circ$

C. $\varphi = 30^\circ$

D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$

Câu 38. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay **sai**? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Sai ở bước 3.

B. Đúng ba bước

C. Sai ở bước 2.

D. Sai ở bước 1.

Câu 40. Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chọn hệ thức đúng?

A. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2).$

B. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2.$

C. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2).$

D. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2).$

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Chọn khẳng định đúng?

A. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2).$

B. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2).$

C. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 6(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2).$

D. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2).$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a .

A. $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 90^\circ$

B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -a^2$.

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}.$

D. $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{C_1B} = 0$.

Câu 43. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = a, BC = 2a, AA_1 = 3a$.

A. $(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{C_1D}) = 45^\circ$

B. $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{D_1D} = 9a^2$.

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1}.$

D. $\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a .

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}.$

D. $AB \perp CD$ hay $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định **sai**?

- A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng 90° .
- B. Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng 60° .
- C. Góc giữa AD và B_1C bằng 45° .
- D. Góc giữa BD và A_1C_1 bằng 90° .

Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau.

- A. $A'C' \perp BD$
- B. $BB' \perp BD$
- C. $A'B \perp DC'$
- D. $BC' \perp A'D$

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và

N sao cho $MD = NB = x (0 \leq x \leq a)$.

- A. $AC' \perp B'D'$
- B. AC' cắt $B'D'$
- C. $AC' \perp MN$
- D. Cả A, B, C đều đúng

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = k$

Câu 49. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng? Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng bao nhiêu?

Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và các góc

$\angle A'D'A = 60^\circ, \angle B'A'A = \angle C'A'A = 120^\circ$.

- a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$; AC' với $B'D$.
- b) Tính diện tích các tứ giác $A'B'CD$ và $ACC'A'$.
- c) Tính góc giữa đường thẳng AC' với các đường thẳng AB, AD, AA' .