

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. $\int_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}} dx$ có giá trị bằng bao nhiêu? (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

$$\int_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}} dx = \frac{1}{9} \int_0^1 \left(\frac{3}{4}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{9 \ln \frac{3}{4}} \Big|_0^1 = -\frac{1}{36 \ln \frac{3}{4}} \approx 0,1$$

Ta có:

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để $\int_0^3 (10x - 2m) dx > 0$?

Lời giải

$$\int_0^3 (10x - 2m) dx = (5x^2 - 2mx) \Big|_0^3 = 45 - 6m > 0$$

Ta có

Từ đó suy ra $m < \frac{45}{6} = 7,5$. Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có 7 giá trị nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < 0 < b, \int_a^b |x|^7 dx = ma^8 + nb^8$$

Câu 3. Giả sử trong đó m, n là các hằng số thực (không phụ thuộc vào a và b). Giá trị của biểu thức $P = m - 5n$ là bao nhiêu?

Lời giải

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < 0 < b, \int_a^b |x|^7 dx &= \int_a^0 |x|^7 dx + \int_0^b |x|^7 dx \\ &= \int_a^0 (-x^7) dx + \int_0^b x^7 dx = \frac{1}{8} a^8 + \frac{1}{8} b^8. \\ P &= \frac{1}{8} - \frac{5}{8} = -0,5 \end{aligned}$$

Câu 4. Nước chảy từ đáy bể chứa với tốc độ $r(t) = 200 - 4t$ (lít/phút), trong đó $0 \leq t \leq 50$. Tìm lượng nước chảy ra khỏi bể trong 10 phút đầu tiên.

Lời giải

Lượng nước chảy ra khỏi bể trong 10 phút đầu tiên là

$$V = \int_0^{10} r(t) dt = \int_0^{10} (200 - 4t) dt = (200t - 2t^2) \Big|_0^{10} = 1800 \text{ (lít)}.$$

Câu 5. Mật độ khối lượng của một thanh kim loại có chiều dài 4 mét được cho bởi công thức $\rho(x) = 1000 + x - \sqrt{x} \text{ (kg/m}^3\text{)}$, trong đó x là khoảng cách bằng mét tính từ một đầu của thanh. Mật độ khối lượng trung bình trên toàn bộ chiều dài của thanh là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Mật độ khối lượng trung bình trên toàn bộ chiều dài của thanh là

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \int_0^4 \rho(x) dx &= \frac{1}{4} \int_0^4 (1000 + x - \sqrt{x}) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(1000x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{3002}{3} \approx 1001 \text{ (kg / m}^3\text{)}.\end{aligned}$$

Câu 6. Một ô tô đồ chơi trượt xuống dốc và dừng sau 5 giây, vận tốc của ô tô đồ chơi từ thời điểm

$$t = 0 \text{ giây đến } t = 5 \text{ giây được cho bởi công thức } v(t) = \frac{1}{2}t^2 - 0,1t^3 \text{ (m / s)}$$

Tìm quãng đường ô tô đồ chơi đi đến khi dừng lại (làm tròn kết quả theo đơn vị mét đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Quãng đường ô tô đồ chơi đi đến khi dừng lại là

$$\begin{aligned}S(t) &= \int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 \left(\frac{1}{2}t^2 - 0,1t^3 \right) dt \\ &= \left(\frac{t^3}{6} - \frac{0,1t^4}{4} \right) \Big|_0^5 = \frac{5^3}{6} - \frac{0,1 \cdot 5^4}{4} \approx 5,21 \text{ (m)}.\end{aligned}$$

Câu 7. Một ô tô đang chạy với vận tốc 18 m/s thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -36t + 18 \text{ (m/s)}$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

Lời giải

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu hãm phanh.

Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T) = 0$ suy ra $-36T + 18 = 0 \Rightarrow T = 0,5$ (s). Khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến lúc ô tô dừng hẳn là $0,5 \text{ s}$. Trong khoảng thời gian đó, ô tô di chuyển được quãng đường là

$$S = \int_0^{0,5} (-36t + 18) dt = \left(-18t^2 + 18t \right) \Big|_0^{0,5} = 4,5 \text{ (m)}.$$

Câu 8. Một ô tô đang chạy với vận tốc 18 m/s thì người lái ô tô đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 18 \text{ (m/s)}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

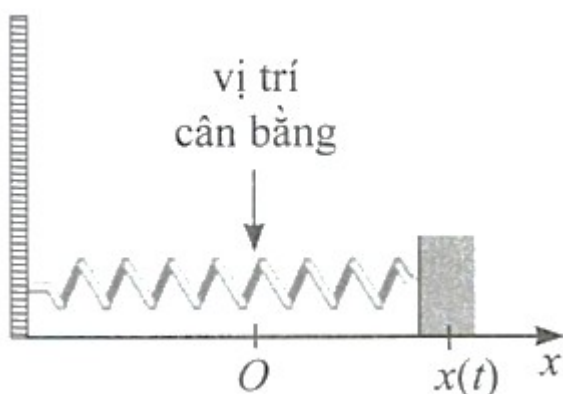
Lời giải

Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0$, tức là $-6t + 18 = 0$ hay $t = 3 \text{ (s)}$.

Quãng đường mà ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$\int_0^3 (-6t + 18) dt = \left(-3t^2 + 18t \right) \Big|_0^3 = 27 \text{ (m)}.$$

Câu 9. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình, có vận tốc tức thời cho bởi $v(t) = 2 \cos t$, trong đó t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng cm/s . Tại thời điểm $t = 0$, con lắc đó ở vị trí cân bằng.



Tính quãng đường mà con lắc lò xo di chuyển được sau 1 giây kể từ vị trí cân bằng theo đơn vị centimet (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Quãng đường mà con lắc di chuyển sau 1 giây kể từ vị trí cân bằng là:

$$S = \int_0^1 v(t) dt = \int_0^1 2 \cos t dt = 2 \sin t \Big|_0^1 = 2 \sin 1 \approx 1,68 (cm).$$

Câu 10. Một vật đang ở nhiệt độ $100^\circ C$ thì được đặt vào môi trường có nhiệt độ $30^\circ C$. Kể từ đó, nhiệt độ của vật giảm dần theo tốc độ $T'(t) = -140 \cdot e^{-2t}$ ($^\circ C / \text{phút}$), trong đó $T(t)$ là nhiệt độ tính theo $^\circ C$ tại thời điểm t phút kể từ khi được đặt vào môi trường. Xác định nhiệt độ của vật ở thời điểm 3 phút kể từ khi được đặt vào môi trường (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của $^\circ C$).

Lời giải

$$\begin{aligned} T(3) &= T(0) + \int_0^3 T'(t) dt = 100 + \int_0^3 (-140 \cdot e^{-2t}) dt = 100 - 140 \cdot \int_0^3 (e^{-2}) dt \\ &= 100 - 140 \cdot \frac{1}{\ln e^{-2}} \cdot e^{-2t} \Big|_0^3 = 100 + 70(e^{-6} - 1) \approx 30,2 (^\circ C). \end{aligned}$$

Câu 11. Tìm chi phí trung bình trên mỗi đơn vị sản phẩm trong khoảng thời gian hai năm nếu chi phí cho mỗi đơn vị được tính bởi $c(t) = 0,005t^2 + 0,02t + 12,5$ với $0 \leq t \leq 24$, tính theo tháng.

Lời giải

Chi phí trung bình trên mỗi đơn vị sản phẩm trong khoảng thời gian hai năm là

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \int_0^{24} c(t) dt &= \frac{1}{24} \int_0^{24} (0,005t^2 + 0,02t + 12,5) dt \\ &= \frac{1}{24} \left(0,005 \frac{t^3}{3} + 0,01t^2 + 12,5t \right) \Big|_0^{24} = 13,7 \end{aligned}$$

Câu 12. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $29,4 \text{ m/s}$. Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho tới khi chạm đất là bao nhiêu mét? Biết gia tốc trọng trường là $9,8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải

$$v = 29,4 - 9,8t, v = 0 \Leftrightarrow 29,4 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

$$S = 2 \int_0^3 (29,4 - 9,8t) dt = 2 \left(29,4t - 4,9t^2 \right) \Big|_0^3 = 88,2 \text{ (m)}.$$

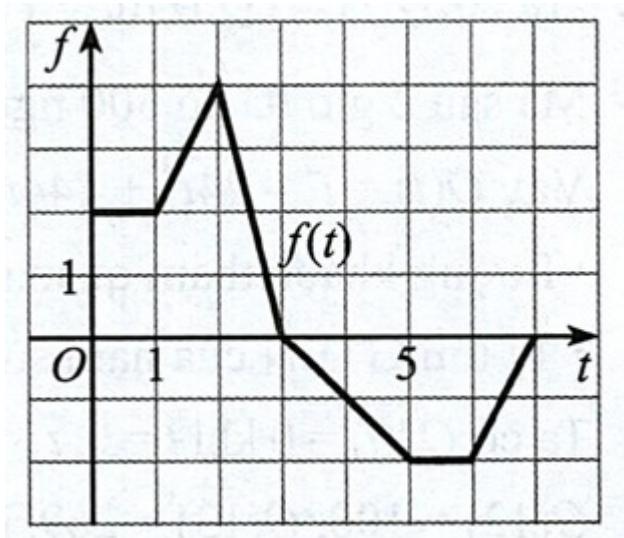
Câu 13. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x} dx = 2 + 2 \ln |x| \Big|_1^3 = 2 + 2 \ln 3.$$

$$\text{Do đó } a = 2, b = 2, c = 3 \Rightarrow S = 7.$$

Câu 14. Cho $g(x) = \int_0^x f(t) dt, (0 \leq x \leq 7)$ trong đó $f(t)$ là hàm số có đồ thị như hình. Tính $g(3)$.



Lời giải

$$\text{Ta có: } g(3) = \int_0^3 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt$$

$$= \int_0^1 2 dt + \int_1^2 2t dt + \int_2^3 (12 - 4t) dt$$

$$= 2t \Big|_0^1 + t^2 \Big|_1^2 + (12t - 2t^2) \Big|_2^3 = 7.$$

Câu 15. Cho $\int_a^b |x| dx = ma^2 + nb^2$ với m, n, a, b là các hằng số thực và $a < 0 < b$. Giá trị của biểu thức $m + n$ bằng bao nhiêu?

LỜI GIẢI

Ta có: $\int_a^b |x| dx = \int_a^0 (-x) dx + \int_0^b x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_a^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^b = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$

Suy ra $m+n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Câu 16. Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 8$. Tính $m+n$

Lời giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int (mx + n) dx = \frac{m}{2}x^2 + nx + C$

Lại có: $\int_0^1 f(x) dx = 3 \Rightarrow \left(\frac{m}{2}x^2 + nx \right) \Big|_0^1 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m + n = 3 \quad (1)$

$\int_0^2 f(x) dx = 8 \Rightarrow \left(\frac{m}{2}x^2 + nx \right) \Big|_0^2 = 8 \Leftrightarrow 2m + 2n = 8 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{2}m + n = 3 \\ 2m + 2n = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow m+n = 4$

Câu 17. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$)

thỏa mãn $\int_1^a (2x-3) dx = 0$ và $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$. Hãy tính

Lời giải

Ta có: $\int_1^a (2x-3) dx = (x^2 - 3x) \Big|_1^a = a^2 - 3a + 2$

Vì $\int_1^a (2x-3) dx = 0$ nên $a^2 - 3a + 2 = 0$, suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

Lại có $0 < a_1 < a_2$ nên $a_1 = 1; a_2 = 2$

Như vậy $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right) = 3^1 + 3^2 + \log_2 \left(\frac{2}{1} \right) = 13$

Câu 18. (Sở GD Kon Tum - 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x-3) dx \leq 4$?

Lời giải

Ta có: $\int_0^a (2x-3) dx = (x^2 - 3x) \Big|_0^a = a^2 - 3a$

Khi đó: $\int_1^a (2x - 3)dx \leq 4 \Leftrightarrow a^2 - 3a \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 4$

Mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa đề bài.

Câu 19. (Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018) Biết $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx = a + e^b - e^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{e^x} \right)^2$ nên

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{e^x} \right) dx = \left(\sqrt{x} - e^{-x} \right) \Big|_1^4 = 1 + e^{-1} - e^{-4}.$$

Vậy $a = 1, b = -1, c = -4$. Suy ra $T = -4$.

Câu 20. (Sở Bạc Liêu - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $f(-2) = \frac{3}{2}$ và $f(2) = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(4)$ bằng (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln x - \frac{1}{x} + C$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|x| - \frac{1}{x} + C_1 & \text{khi } x < 0 \\ \ln|x| - \frac{1}{x} + C_2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Do $f(-2) = \frac{3}{2} \Rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} + C_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = 1 - \ln 2$

Do $f(2) = 2\ln 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \ln 2 - \frac{1}{2} + C_2 = 2\ln 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = \ln 2 - 1$

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x| - \frac{1}{x} + 1 - \ln 2 & \text{khi } x < 0 \\ \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln 2 - 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Như vậy,

Vậy $f(-1) + f(4) = (2 - \ln 2) + \left(\ln 4 - \frac{1}{4} + \ln 2 - 1 \right) = \frac{8\ln 2 + 3}{4} \approx 2,1$.

Câu 21. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20 (\text{m/s})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



Lời giải

Khi ô tô dừng hẳn thì $v = 0$, do đó $-40t + 20 = 0$, tức là $t = \frac{1}{2}$ (giây). Quãng đường ô tô di chuyển kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} v(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (-40t + 20) dt = 5 (\text{m}).$$

Câu 22. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

. Giả sử nhiệt độ (tính bằng $^{\circ}\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$T(t) = 20 + 1,5(t - 6), 6 \leq t \leq 12.$$

Tìm nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

Lời giải

Nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa là

$$\frac{1}{12-6} \int_6^{12} T(t) dt = \frac{1}{6} \int_6^{12} (1,5t + 11) dt = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} t^2 + 11t \right) \Big|_6^{12} = 24,5 (^{\circ}\text{C}).$$

Câu 23. Một vật chuyển động với vận tốc được tính theo thời gian theo công thức

$$v(t) = \begin{cases} 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 2 \\ 4 & \text{khi } t > 2 \end{cases}$$

(t tính bằng giây, v tính bằng m/s). Quãng đường mà vật dịch chuyển được trong vòng 4 giây đầu tiên bằng bao nhiêu m.

Lời giải

$$s = \int_0^4 v(t) dt = \int_0^2 2t dt + \int_2^4 4 dt = t^2 \Big|_0^2 + 4t \Big|_2^4 = 12$$

Vậy quãng đường vật dịch chuyển được trong 4 giây đầu tiên bằng 12 m.

Câu 24. Giả sử lợi nhuận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của một loại sản phẩm của nhà máy được tính theo công thức $P'(x) = 18 - 0,04x$. Trong đó $P(x)$ (tính bằng triệu đồng) là lợi nhuận thu được khi

bán x tấn sản phẩm. Chênh lệch lợi nhuận khi bán 100 tấn sản phẩm so với khi bán 50 tấn sản phẩm bằng bao nhiêu triệu đồng.

Lời giải

$$P = \int_{50}^{100} P'(x) dx = \int_{50}^{100} (18 - 0,04x) dx = (18x - 0,02x^2) \Big|_{50}^{100} = 750$$

Vậy sự thay đổi lợi nhuận khi bán được từ 50 tấn sản phẩm đến 100 tấn sản phẩm bằng 750 triệu đồng.

Câu 25. Một bồn chứa nước bị rò rỉ với tốc độ nước chảy vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $V'(t) = 160 - 2t$ (lít/phút). Biết rằng $V(t)$ (tính bằng lít) là thể tích nước trong bồn tại thời điểm t phút. Thể tích nước chảy ra khỏi bồn trong 15 phút đầu tiên kể từ khi nước bị rò rỉ bằng bao nhiêu lít.

Lời giải

$$V = \int_0^{15} V'(t) dt = \int_0^{15} (160 - 2t) dt = (160t - t^2) \Big|_0^{15} = 2175$$

Vậy thể tích nước chảy ra khỏi bồn trong 15 phút đầu tiên kể từ khi nước bị rò rỉ bằng 2175 lít.

Câu 26. Tại một địa điểm, trong khoảng thời gian 12 giờ nhiệt độ tại thời điểm t (tính bằng giờ kể từ lúc bắt đầu) là $T(t) = 47 + 4t - \frac{1}{3}t^2$ ($^{\circ}C$). Nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian đó bằng bao nhiêu $^{\circ}C$.

Lời giải

$$\bar{T} = \frac{1}{12-0} \int_0^{12} T(t) dt = \frac{1}{12} \int_0^{12} \left(47 + 4t - \frac{1}{3}t^2 \right) dt = \frac{1}{12} \left(47t + 2t^2 - \frac{1}{9}t^3 \right) \Big|_0^{12} = 55$$

Vậy nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian đó bằng $55^{\circ}C$.

Câu 27. Giả sử anh Nam nhảy dù từ một chiếc trực thăng. Vào thời điểm 19 giây sau khi rời khỏi trực thăng, anh Nam mở chiếc dù của mình trong 2 giây, anh Nam chạm đất sau 19 giây kể từ lúc bung dù. Tại thời điểm t (giây), vị trí của anh Nam cách mặt đất một khoảng $h(t)$ mét và vận tốc rơi của anh Nam (tính bằng m/s) là một hàm số được cho bởi công thức:

$$v(t) = h'(t) = \begin{cases} -80 & \text{khi } 0 \leq t < 19 \\ 37t - 783 & \text{khi } 19 \leq t < 21 \\ -6 & \text{khi } 21 \leq t \leq 40. \end{cases}$$

Độ cao vị trí của anh Nam khi bắt đầu nhảy ra khỏi trực thăng bằng bao nhiêu m.

Lời giải

$$\begin{aligned} h &= \int_0^{40} |h'(t)| dt = \int_0^{19} |-80| dt + \int_{19}^{21} |37t - 783| dt + \int_{21}^{40} |-6| dt \\ &= 80t \Big|_0^{19} + \left(783t - \frac{37t^2}{2} \right) \Big|_{19}^{21} + 6t \Big|_{21}^{40} = 1720. \end{aligned}$$

Vậy độ cao vị trí của anh Nam khi bắt đầu nhảy khỏi trực thăng bằng 1720 m.

Câu 28. Tại một nhà máy, gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó, đạo hàm $C'(x)$, gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ gia tăng tổng chi phí theo lượng gia tăng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức

$$C'(x) = 5 - 0,06x + 0,00072x^2, \quad 0 \leq x \leq 150.$$

Biết rằng $C(0) = 30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} C(100) - C(0) &= \int_0^{100} C'(x) dx = \int_0^{100} (5 - 0,06x + 0,00072x^2) dx \\ &= 5 \int_0^{100} dx - 0,06 \int_0^{100} x dx + 0,00072 \int_0^{100} x^2 dx \\ &= 5x \Big|_0^{100} - 0,03x^2 \Big|_0^{100} + 0,00024x^3 \Big|_0^{100} = 440. \end{aligned}$$

Suy ra $C(100) = C(0) + 440 = 30 + 440 = 470$ (triệu đồng).

Vậy khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng thì tổng chi phí là 470 triệu đồng.

Câu 29. Vận tốc (dặm/giờ) của một máy bay khi bay ngược chiều gió được cho bởi công thức $v(t) = 30(16 - t^2)$ với $0 \leq t \leq 3$. Khi vận tốc tức thời đạt 400 dặm/giờ thì máy bay đã đi được quãng đường bao xa kể từ thời điểm bay ngược chiều gió (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của dặm)?

Lời giải

Ta có
$$s(t) = \int_0^t 30(16 - t^2) dt = 480t - 10t^3$$

Khi vận tốc tức thời đạt 400 dặm/giờ tức là
$$30(16 - t^2) = 400 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{24}}{3} \text{ (giờ)}.$$

Khi đó máy bay đã bay được quãng đường là

$$s = 480 \cdot \frac{\sqrt{24}}{3} - 10 \left(\frac{\sqrt{24}}{3} \right)^3 \approx 740 \text{ (dặm)}$$

Câu 30. Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón, gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x tấn sản phẩm trong một tuần. Khi đó, đạo hàm $P'(x)$, gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức $P'(x) = 16 - 0,02x, 0 \leq x \leq 100$. Tính lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 90 tấn sản phẩm trong tuần. Biết rằng nhà máy lỗ 25 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

Lời giải

Do nhà máy lỗ 25 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần, nên ta có $P(0) = -25$. Lợi nhuận khi nhà máy bán 90 tấn sản phẩm là:

$$\begin{aligned}
 P(90) &= [P(90) - P(0)] + P(0) = \int_0^{90} P'(x) dx + P(0) = \int_0^{90} (16 - 0,02x) dx - 25 \\
 &= \left(16 \int_0^{90} dx - 0,02 \int_0^{90} x dx \right) - 25 = 16(x) \Big|_0^{90} - 0,02 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{90} = 16(90 - 0) - 0,02 \left(\frac{90^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 1359 \\
 &\text{(triệu đồng)}
 \end{aligned}$$

Câu 31. Biết rằng tốc độ $v(\text{km} / \text{phut})$ của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t) = \begin{cases} 0,5t, 0 & \leq t < 2, \\ 1,2 & \leq t < 15, \\ 4 - 0,2t, 15 & \leq t \leq 20. \end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 phút.



Lời giải

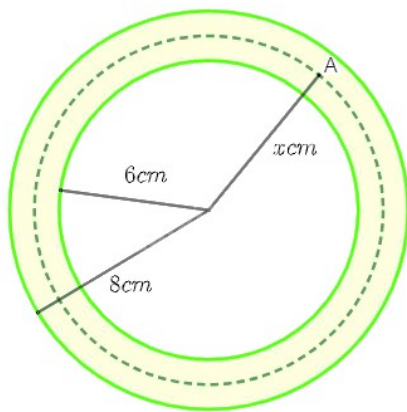
Gọi $s(t)(\text{km})$ là quãng đường ca nô đi được đến thời điểm t (phút).

Quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 phút là

$$\begin{aligned}
 s(20) - s(0) &= \int_0^{20} v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^{15} v(t) dt + \int_{15}^{20} v(t) dt \\
 &= \int_0^2 0,5t dt + \int_2^{15} dt + \int_{15}^{20} (4 - 0,2t) dt = 0,5 \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^2 + (t) \Big|_2^{15} + (4t - 0,1t^2) \Big|_{15}^{20} \\
 &= 0,5 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + (15 - 2) + [(4 \cdot 20 - 0,1 \cdot 20^2) - (4 \cdot 15 - 0,1 \cdot 15^2)] = 16,5(\text{km})
 \end{aligned}$$

Câu 32. Mặt cắt ngang của một ống dẫn khí nóng là hình vành khuyên như Hình. Khí bên trong ống được duy trì ở 150°C . Biết rằng nhiệt độ $T(^\circ \text{C})$ tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách

$x(\text{cm})$ từ A đến tâm của mặt cắt và $T'(x) = -\frac{30}{x} (6 \leq x \leq 8)$.



Tìm nhiệt độ mặt ngoài của ống. (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Do nhiệt độ của khí bên trong ống luôn được duy trì ở $150^\circ C$, nên $T(6) = 150$.

$$T(8) = [T(8) - T(6)] + T(6) = \int_6^8 T'(x) dx + T(6)$$

Nhiệt độ mặt ngoài của ống là

$$\text{Ta có } \int_6^8 T'(x) dx = \int_6^8 \frac{30}{x} dx = -30 \int_6^8 \frac{1}{x} dx = -30 \cdot (\ln |x|) \Big|_6^8 = -30 \ln 8 + 30 \ln 6$$

Vậy nhiệt độ bên ngoài mặt ống là $T(8) = -30 \ln 8 + 30 \ln 6 + 150 \approx 141,37^\circ C$

Câu 33. Một vật chuyển động với tốc độ $v(t) = 3t + 4(m/s)$, với thời gian t tính theo giây, $t \in [0; 5]$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 5$.

Lời giải

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 5$ là

$$s = \int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 (3t + 4) dt = \left(\frac{3t^2}{2} + 4t \right) \Big|_0^5 = \frac{115}{2} = 57,5(m)$$

Câu 34. Một chất điểm đang chuyển động với tốc độ $v_0 = 1 m/s$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 3 m/s^2$. Hỏi tốc độ của chất điểm là bao nhiêu sau 10 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc?

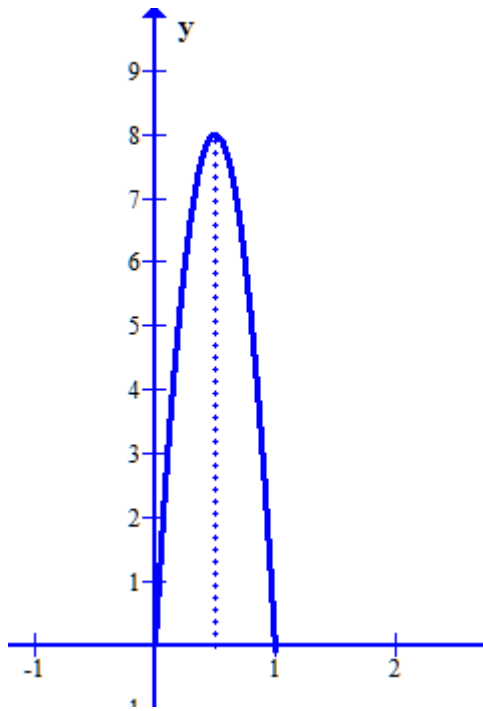
Lời giải

Vận tốc của chất điểm sau 10 giây là

$$v(10) = v(10) - v(0) + v(0) = \int_0^{10} a dt + v(0) = \int_0^{10} 3 dt + v_0 = 3(t) \Big|_0^{10} + 1 = 31(m/s).$$

Câu 35. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có

đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



Lời giải

Trước hết ta tìm công thức biểu thị vận tốc theo thời gian, giả sử $v(t) = at^2 + bt + c$.

Khi đó dựa vào hình vẽ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 0 \\ a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + c = 8 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}$$

Do đó quãng đường người đó đi được sau $\frac{45}{60}$ phút là $S = \int_0^{\frac{45}{60}} (32t - 32t^2) dt = 4,5 \text{ (km)}$.

Câu 36. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi

quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Tìm vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A .

Lời giải

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \right) dt = 96 \text{ (m)}$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a dt = at + C$.

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là

$$S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at \right) \Big|_3^{15} = 72a (m)$$

Vậy $72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} (m/s^2)$

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16 (m/s)$

Câu 37. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi

quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t (m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a (m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Tìm vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A

Lời giải

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

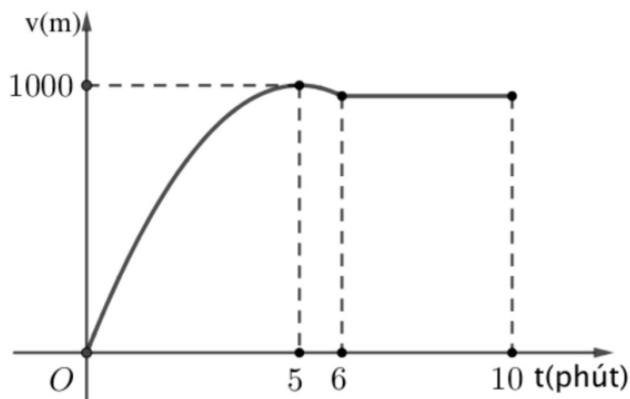
Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t \right) dt = \int_3^{15} at dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30 (m/s)$

Câu 38. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều (tham khảo hình vẽ).



Quãng đường xe đi được sau 10 phút đầu tiên kể từ khi hết đèn đỏ là bao nhiêu mét?

Lời giải

Phương trình vận tốc của ô tô là:

$$v(t) = \begin{cases} at^2 + bt + c & \text{khi } 0 \leq t \leq 6 \\ v(6) & \text{khi } 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

Trong khoảng thời gian 6 phút đầu đồ thị của vận tốc là một đường parabol đi qua điểm $(0;0)$, $(5;1000)$ và có hoành độ đỉnh bằng 5, do đó:

$$\begin{cases} c=0 \\ 25a+5b+c=1000 \\ -\frac{b}{2a}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 5a+b=200 \\ 10a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-40 \\ b=400 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow v(t) = \begin{cases} -40t^2 + 400t & \text{khi } 0 \leq t \leq 6 \\ 960 & \text{khi } 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là:

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^6 (-40t^2 + 400t) dt + \int_6^{10} 960 dt = 8160 \text{ m}$$

Câu 39. Tại một nơi không có gió, một chiếc khinh khí cầu đang đứng yên ở độ cao 243 mét so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 12t - t^2$ trong đó t tính bằng phút là thời gian tính từ lúc khinh khí cầu bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút. Nếu vận tốc v của khinh khí cầu khi tiếp đất là $v = x$ mét/phút thì giá trị của x bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi thời điểm khinh khí cầu bắt đầu chuyển động là $t=0$, thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1 .

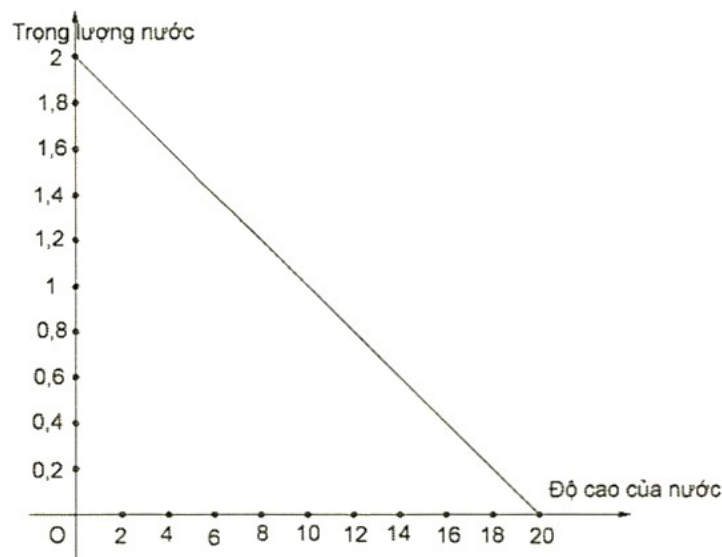
Quãng đường khinh khí cầu đã di chuyển được từ lúc chuyển động tới khi tiếp đất là

$$\int_0^{t_1} (12t - t^2) dt = 243 \Leftrightarrow -\frac{t_1^3}{3} + 6t_1^2 - 243 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \approx -5,56 \\ t_1 \approx 14,56 \\ t_1 = 9 \end{cases}$$

$$\forall t \quad v(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 12 \text{ nên } t_1 = 9.$$

Vận tốc của khinh khí cầu lúc tiếp đất là: $v(9) = 27$ mét/phút.

Câu 40. Người thợ hồ nâng một xô nước bị rỉ lên cao 20 m với tốc độ cố định. Cho trọng lượng của xô là $3N$, trọng lượng ban đầu của nước là $2N$. Biết rằng xô nước bị rỉ nên lượng nước trong xô sẽ chảy ra với tốc độ không đổi trong thời gian nâng xô nước lên. Người ta ước tính rằng lượng nước trong xô sẽ thay đổi theo đồ thị là hình bên. Hỏi người thợ hồ đã dùng một công là bao nhiêu để nâng xô nước lên cao 20m, với giả sử rằng bỏ qua trọng lượng sợi dây?



Lời giải

Vì trọng lượng của xô là $3N$ không thay đổi nên công đưa xô lên cao $20m$ là $W_{xô} = P_{xô} \cdot h = 3 \cdot 20 = 60(Nm)$.

Trọng lượng của nước thay đổi tùy thuộc vào độ cao của xô so với mặt đất. Gọi x là độ cao của xô so với mặt đất, khi đó $f(x) = ax + b$ là trọng lượng của nước tương ứng với độ cao x .

Đồ thị hàm số $f(x) = ax + b$ đi qua 2 điểm $A(0; 2)$ và $B(20; 0)$ nên

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 2 \\ a \cdot 20 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -\frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{10}x + 2.$$

Công sinh ra khi đưa nước từ mặt đất lên cao $20m$ là

$$\int_0^{20} f(x) dx = \int_0^{20} \left(-\frac{1}{10}x + 2 \right) dx = \left(-\frac{1}{20}x^2 + 2x \right) \Big|_0^{20} = 20(Nm).$$

Vậy công toàn bộ để đưa cả xô và nước lên cao $20m$ là: $60 + 20 = 80(Nm)$.

Câu 41. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện Hồ Hô đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $v(t) = 10t + 500(m^3/s)$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ chứa nước của nhà máy đã xả thoát đi bao nhiêu triệu khối nước?

Lời giải

Lượng nước lũ đã xả trong khoảng thời gian 40 phút (2400) giây sẽ bằng

$$L = \int_0^{2400} v(t) dt = \int_0^{2400} (10t + 500) dt = (5t^2 + 500t) \Big|_0^{2400} = 3 \cdot 10^7 (m^3).$$

Vậy trong khoảng thời gian 40 phút, nhà máy đã xả một lượng nước là 30 triệu khối, tức là hồ chứa nước đã xả thoát đi 30 triệu khối nước.

Câu 42. Một sản phẩm A đang bán trên thị trường có hàm cung và hàm cầu như sau:

Hàm cầu: $P = -0,36x + 9$;

Hàm cung: $P = 0,14x + 2$, trong đó P là giá bán và x là đơn vị sản lượng.

Tìm khách hàng và nhà cung ứng thặng dư.

Lời giải

Thị trường cân bằng khi cung bằng cầu, do đó ta có

$$-0,36x + 9 = 0,14x + 2 \Rightarrow x = 14, P = 3,96.$$

Vậy điểm cân bằng của thị trường là $M_0 (x_0 = 14; P_0 = 3,96)$.

Khách hàng thặng dư $\int_0^{14} (-0,36x + 9 - 3,96)dx = (-0,18x^2 + 5,04x) \Big|_0^{14} = 35,28.$

Nhà cung ứng thặng dư $\int_0^{14} (3,96 - 0,14x - 2)dx = (-0,07x^2 + 1,96x) \Big|_0^{14} = 13,72.$

Câu 43. Sau t giờ làm việc, một người công nhân có thể sản xuất với tốc độ là $q(t) = 100 + e^{-0,5t}$ đơn vị sản phẩm trong 1 giờ. Giả sử người đó bắt đầu làm việc từ lúc 8 giờ sáng. Hỏi người đó sẽ sản xuất được bao nhiêu đơn vị sản phẩm giữa 9 giờ sáng và 11 giờ trưa?

Lời giải

Gọi $S(t)$ là số đơn vị sản phẩm mà công nhân sản xuất được sau t giờ tính từ lúc 8 giờ sáng. Ta có $S'(t) = q(t) = 100 + e^{-0,5t}$.

Số đơn vị sản phẩm người đó sản xuất được từ 9 giờ sáng ($t=1$) đến 11 giờ trưa ($t=3$) là

$$\int_1^3 q(t)dt = \int_1^3 (100 + e^{-0,5t})dt = (100t - 2e^{-0,5t}) \Big|_1^3 = 200,76$$

(đơn vị sản phẩm).

Câu 44. Qua điều tra các nhà phân tích kinh tế đã nhận định rằng tốc độ tăng trưởng kinh tế (GDP) của

một quốc gia sau t năm tính từ đầu năm 2004 là $30 + \frac{1}{2}\sqrt{5+t}$ tỉ USD/năm. Biết rằng GDP của quốc gia đó vào đầu năm 2004 là 100 tỉ USD. Hãy dự đoán GDP của quốc gia đó vào đầu năm 2015 (làm tròn kết quả đến số thập phân hàng đơn vị)

Lời giải

Nguyên hàm của $q(t) = 30 + \frac{1}{2}\sqrt{5+t}$ là hàm số $S(t)$ mô tả GDP của quốc gia sau t năm (được tính từ năm 2004).

GDP tăng thêm tính từ năm 2004 ($t=0$) đến đầu năm 2015 ($t=11$) là

$$\int_0^{11} q(t)dt = \int_0^{11} \left(30 + \frac{1}{2}\sqrt{5+t} \right) dt = \left(30t + \frac{(5+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{11} \approx 347,6$$

(tỉ USD).

Như vậy, tổng giá trị GDP tính đến đầu năm 2015 bằng $347,6 + 100 = 437,6$ (tỉ USD).

Câu 45. Một công ti sản xuất sản phẩm A , giả sử chi phí cận biên khi x sản phẩm được sản xuất là $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 40$ USD/sản phẩm. Hỏi tổng chi phí sản xuất sẽ tăng lên bao nhiêu nếu sản phẩm sản xuất ra tăng từ 3 sản phẩm đến 7 sản phẩm?

Lời giải

Gọi $S(x)$ là hàm tổng chi phí khi sản xuất x sản phẩm, ta có $S'(x) = Q(x)$

Chi phí tăng thêm khi tăng sản lượng sản xuất từ 3 sản phẩm đến 7 sản phẩm là:

$$\int_3^7 Q(x) dx = \int_3^7 (x^3 - 6x^2 + 40) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 40x \right]_3^7 = 108 \text{ (USD)}.$$

Câu 46. Hàm cầu cho một sản phẩm, tính bằng USD, là $P = 1200 - 0,2x - 0,0001x^2$.

Biết rằng thặng dư tiêu dùng khi doanh số bán là 500 bằng $\frac{a}{b}$ (\$) ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản)

Khi đó $3a - 100000b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vì số lượng sản phẩm bán ra là $X = 500$, nên giá tương ứng là

$$P = 1200 - (0,2)(500) - (0,0001)(500)^2 = 1075.$$

Thặng dư tiêu dùng là

$$\begin{aligned} \int_0^{500} [P(x) - P] dx &= \int_0^{500} (1200 - 0,2x - 0,0001x^2 - 1075) dx = \left[125x - 0,1x^2 - 0,0001 \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \right]_0^{500} \\ &= \frac{100000}{3} (\$) \end{aligned}$$

Vậy $3a - 100000b = 0$

Câu 47. Gia tốc tại thời điểm t của một vật chuyển động thẳng được cho bởi công thức

$a(t) = 4\pi \cos t$ (cm / s²). Nếu vận tốc của vật bằng 0 tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq \pi$ là bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } v(t) = \int a(t) dt = \int 4\pi \cos t dt = 4\pi \sin t + C.$$

$$\text{Do } v(0) = 0 \text{ suy ra } C = 0. \text{ Vậy } v(t) = 4\pi \sin t.$$

Vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq \pi$ là

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi v(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 4\pi \sin t dt = -4 \cos t \Big|_0^\pi = 8 \text{ (cm / s)}.$$

Câu 48. Đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là khoảng 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và khoảng 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc. Hàm cung được

cho bởi $p = 0,0275x$, trong đó x là số lượng máy điều hoà được bán với giá P USD một chiếc. Tổng thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất bằng bao nhiêu nghìn USD (giả sử hàm cầu là hàm bậc nhất)

Lời giải

Hàm cầu có dạng $p = ax + b$. Do đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc nên ta có:

$$\begin{cases} 331 = 6000a + b \\ 303 = 8000a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,014 \\ b = 415. \end{cases}$$

Vậy hàm cầu là $p = -0,014x + 415$.

Xét phương trình $-0,014x + 415 = 0,0275x$ $\Leftrightarrow x = 10000$, khi đó $p = 275$.

Thặng dư tiêu dùng là $\int_0^{1000} (-0,014x + 415 - 275)dx = 700000$ (USD).

Thặng dư sản xuất là $\int_0^{10000} (275 - 0,0275x)dx = 1375000$ (USD).

Tổng thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất bằng 2075000 USD

Câu 49. Hàm cầu và hàm cung của một sản phẩm được mô hình hoá bởi: Hàm cầu: $p = -0,2x + 8$ và hàm cung: $p = 0,1x + 2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm, P là giá của mỗi đơn vị sản phẩm (tính bằng triệu đồng). Tính tổng thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất đối với sản phẩm này

Lời giải

Xét phương trình $-0,2x + 8 = 0,1x + 2 \Leftrightarrow x = 20$, khi đó $p = -0,2 \cdot 20 + 8 = 4$.

Thặng dư tiêu dùng là $\int_0^{20} (-0,2x + 8 - 4)dx = (-0,1x^2 + 4x) \Big|_0^{20} = 40$ (triệu đồng)

Thặng dư sản xuất là $\int_0^{20} [4 - (0,1x + 2)]dx = \left(2x - 0,1 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{20} = 20$ (triệu đồng)

Tổng thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất đối với sản phẩm này bằng 60 (triệu đồng)

Câu 50. Chi phí nhiên liệu dự kiến C (tính bằng triệu đô la mỗi năm) khi sử dụng một loại xe tải của một công ty vận tải từ năm 2020 đến năm 2030 là $C_1 = 5,6 + 2,2t, 0 \leq t \leq 10$, trong đó $t = 0$ tương ứng với năm 2020. Nếu công ty sử dụng một loại xe tải khác có động cơ hiệu quả hơn thì chi phí nhiên liệu dự kiến sẽ giảm và tuân theo mô hình $C_2 = 4,7 + 2,04t, 0 \leq t \leq 10$. Công ty có thể tiết kiệm được bao nhiêu khi sử dụng loại xe tải với động cơ hiệu quả hơn?

Lời giải

Tổng chi phí nhiên liệu khi công ty vận tải sử dụng xe tải loại thứ nhất trong 10 năm là

$$S_1 = \int_0^{10} C_1 dt = \int_0^{10} (5,6 + 2,2t)dt = (5,6t + 1,1t^2) \Big|_0^{10} = 166$$
 (triệu đô la)

Tổng chi phí nhiên liệu khi công ty vận tải sử dụng xe tải loại thứ hai trong 10 năm là

$$S_2 = \int_0^{10} C_2 dt = \int_0^{10} (4,7 + 2,04t) dt = (4,7t + 1,02t^2) \Big|_0^{10} = 149 \quad (\text{triệu đô la})$$

Vậy khi sử dụng loại xe tải với động cơ hiệu quả hơn, công ty tiết kiệm được

$$166 - 149 = 17 \quad (\text{triệu đô la})$$

Câu 51. Doanh thu từ một quy trình sản xuất (tính bằng triệu đô la mỗi năm) được dự kiến sẽ tuân theo mô hình $R = 100 + 0,08t$ trong 10 năm. Trong cùng khoảng thời gian đó, chi phí (tính bằng triệu đô la mỗi năm) được dự kiến sẽ tuân theo mô hình $C = 60 + 0,2t^2$, trong đó t là thời gian (tính bằng năm). Ước tính lợi nhuận (triệu đô la) trong khoảng thời gian 10 năm. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Hàm lợi nhuận là $P = R - C = 40 + 0,08t - 0,2t^2$.

Ước tính lợi nhuận trong khoảng thời gian 10 năm là

$$\int_0^{10} P dt = \int_0^{10} (40 + 0,08t - 0,2t^2) dt = \left(40t + 0,04t^2 - 0,2 \cdot \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{10} \approx 337 \quad (\text{triệu đô la})$$

Câu 52. Một trận dịch lây lan đến mức sau khi bùng phát t tuần số người nhiễm bệnh là $N_1(t) = 0,1t^2 + 0,5t + 150, 0 \leq t \leq 50$. Hai mươi lăm tuần sau khi dịch bệnh bùng phát, một loại vắc xin đã được phát triển và tiêm cho công chúng. Khi đó, số người nhiễm bệnh được điều chỉnh theo mô hình $N_2(t) = -0,2t^2 + 6t + 200, 25 \leq t \leq 50$.

Hãy ước tính gần đúng số người mà vắc xin đã ngăn ngừa khỏi dịch bệnh trong thời gian xảy ra dịch bệnh.

Lời giải

Thời gian t mà dịch bệnh kết thúc thỏa mãn phương trình

$$-0,2t^2 + 6t + 200 = 0 \Leftrightarrow t = 50 \quad (\text{vì } t \geq 0).$$

Như vậy khi có vắc xin tiêm cho công chúng từ tuần thứ hai mươi lăm tới tuần thứ năm mươi thì kết thúc dịch (theo mô hình chỉ ra).

Số người mà vắc xin đã ngăn ngừa khỏi dịch bệnh trong thời gian xảy ra dịch bệnh là

$$\begin{aligned} \int_{25}^{50} [N_1(t) - N_2(t)] dt &= \int_{25}^{50} (0,3t^2 - 5,5t - 50) dt \\ &= \left(0,1t^3 - 5,5 \cdot \frac{t^2}{2} - 50t \right) \Big|_{25}^{50} \approx 4531. \end{aligned}$$

Câu 53. (Mã 104 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 x^3 dx$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right) \Big|_1^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{4}{5} = -0,8$$

Câu 54. (THPT Ba Đình 2019) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f^2(1-x) = (x^2+3)f(x+1). \text{ Biết rằng } f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ tính } I = \int_0^2 (2x-1)f''(x)dx$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f^2(1-x) = (x^2+3), f(x+1) \Rightarrow f^4(1-x) = (x^2+3)^2 \cdot f^2(x+1) \quad (1) \\ f^2(1+x) = (x^2+3) \cdot f(1-x) \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow f(1-x) = x^2+3 = (1-x-1)^2+3$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2+3$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 (4x-2)dx = (2x^2-2x) \Big|_0^2 = 4$$

Câu 55. (Sở Cần Thơ - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$;

$$f(x) \neq 0, \forall x \in [1;3]; f'(x)[1+f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4 \text{ và } f(1) = -1. \text{ Biết rằng}$$

$$\int_e^3 f(x)dx = a \ln 3 + b (a, b \in \mathbb{Z}), \text{ giá trị của } a+b^2 \text{ bằng}$$

Lời giải

$$\text{Từ } f'(x)[1+f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2$$

$$\text{Hay } \int \left(\frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \int (x-1)^2 dx \Rightarrow -\left(\frac{1}{3f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C$$

$$\text{Do } f(1) = -1 \text{ nên } C = \frac{1}{3}. \text{ Thay vào (2) ta được } \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}$$

$$\text{Khi đó: } \int_e^3 \frac{1}{x} dx = -\ln|x| \Big|_e^3 = -\ln 3 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1, \text{ nên } a+b^2 = 0$$

Câu 56. (THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2022) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(x) &= xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 2x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x^2(2x+3) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' &= \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x+3 \Rightarrow \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = \int_1^2 (2x+3) dx \\ \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right) \Big|_1^2 &= (x^2+3x) \Big|_1^2 \Rightarrow \frac{f(2)}{2} - \frac{f(1)}{1} = (2^2+3 \cdot 2) - (1^2+3 \cdot 1) \Rightarrow f(2)=20 \end{aligned}$$

Câu 57. (Sở Thừa Thiên Huế 2023) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+x=\int_0^2 [f(x)-x] dx$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Xác định giá trị m để $\int_0^2 [mx+f(x)] dx=0$.

Lời giải

$$f(x)+x=\int_0^2 [f(x)-x] dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 x dx = k-2 \quad (1)$$

Theo đề ta có , với k là hằng số.

Suy ra $f(x) = -x + k - 2$.

Mặt khác, lấy tích phân cận từ 0 tới 2 hai vế của (1) ta được

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 x dx = \int_0^2 (k-2) dx \Rightarrow k+2=2(k-2) \Rightarrow k=6.$$

Suy ra $f(x) = -x + 4$, thử lại thấy thỏa mãn $f(x)+x=\int_0^2 [f(x)-x] dx$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^2 [mx+f(x)] dx=0 \Leftrightarrow m \int_0^2 x dx + \int_0^2 f(x) dx = 0 \Leftrightarrow 2m+6=0 \Leftrightarrow m=-3$$

Theo đề

Câu 58. (Sở Bạc Liêu 2023) Cho hàm số $f(x) = |x-2| - |x+2|$, biết $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} f(x) dx = a(\sqrt{b} - \sqrt{c})$, với a là số nguyên dương. Giá trị biểu thức $T=a+b+c$ là?

Lời giải

$$\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} f(x) dx = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} |x-2| dx - \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} |x+2| dx$$

*Nhận xét: $y = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & (x \geq 2) \\ 2 - x & (x < 2) \end{cases}$ và $y = |x + 2| = \begin{cases} x + 2 & (x \geq -2) \\ -x - 2 & (x < -2) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} f(x) dx &= \int_{-\sqrt{6}}^2 (2 - x) dx + \int_2^{\sqrt{5}} (x - 2) dx - \left(\int_{-\sqrt{6}}^{-2} (2 - x) dx + \int_{-2}^{\sqrt{5}} (x + 2) dx \right) \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{6}}^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^{\sqrt{5}} - \left[\left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{6}}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^{\sqrt{5}} \right] \\ &= 5 + 2\sqrt{6} + \frac{9}{2} - 2\sqrt{5} - \left(5 - 2\sqrt{6} + \frac{9}{2} + 2\sqrt{5} \right) = 4\sqrt{6} - 4\sqrt{5} = 4(\sqrt{6} - \sqrt{5}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = 4 + 5 + 6 = 15. \end{aligned}$$

Câu 59. (Mã 101-2021-Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

Lời giải

Ta có $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = x^2 + 5x + C_1 & x \geq 1 \\ F(x) = x^3 + 4x + C_2 & x < 1 \end{cases}$

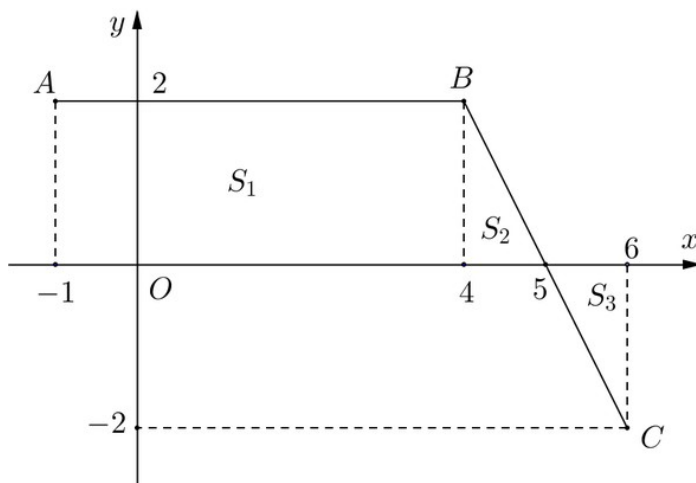
Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$ nên $C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^3 + 4x + 2$.

Vì $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow 6 + C_1 = 7 \Rightarrow C_1 = 1$$

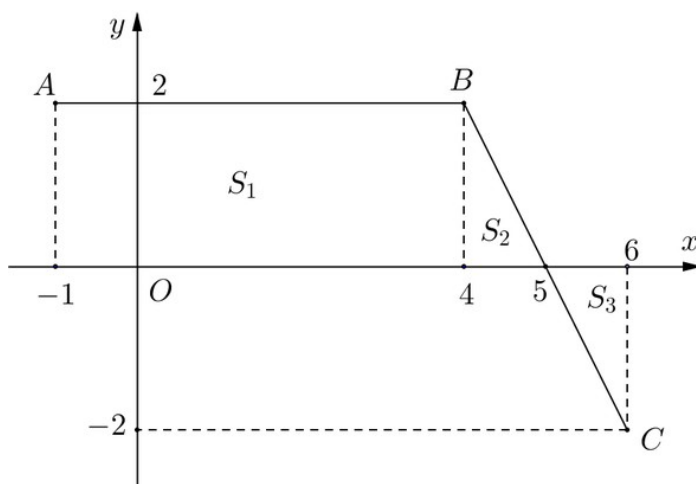
Vậy ta có $\begin{cases} F(x) = x^2 + 5x + 1 & x \geq 1 \\ F(x) = x^3 + 4x + 2 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(-1) + 2F(2) = -3 + 2 \cdot 15 = 27$

Câu 60. (Mã 120-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$.



Giá trị của $F(5)+F(6)$ bằng

Lời giải



Dựa vào hình vẽ ta có:

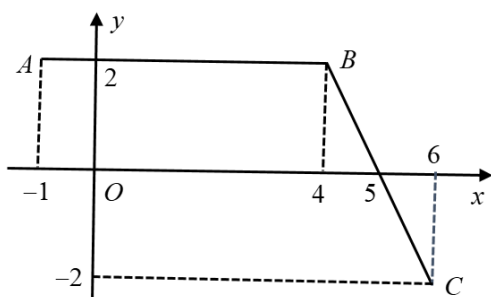
$$S_1 = \int_{-1}^4 f(x) dx = 10 \Rightarrow F(4) - F(-1) = 10 \Rightarrow F(4) = 8$$

$$S_2 = \int_4^5 f(x) dx = 1 \Rightarrow F(5) - F(4) = 1 \Rightarrow F(5) = 9$$

$$S_3 = \int_5^6 |f(x)| dx = 1 \Leftrightarrow F(6) - F(5) = -1 \Rightarrow F(6) = 8$$

Vậy $F(5)+F(6)=17$.

Câu 61. (Mã 111-2021-Lần 2) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1)=-1$. Giá trị của $F(5)+F(6)$ bằng



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{khi } -1 \leq x \leq 4 \\ -2x + 10 & \text{khi } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^4 2 dx = F(4) - F(-1) = 10 \Leftrightarrow F(4) = 9$$

Xét $4 \leq x \leq 6$, ta có: $F(x) = -x^2 + 10x + C$

Mà $F(4) = 9 \Rightarrow C = -15$. Nên $F(x) = -x^2 + 10x - 15$

Ta có: $F(5) = 10$; $F(6) = 9$. Vậy $F(5) + F(6) = 19$

Câu 62. (Mã 103 - 2021 - Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

Lời giải

Khi $x \geq 1$ thì $F(x) = \int f(x) dx = \int (2x+3) dx = x^2 + 3x + C_1$

Khi $x < 1$ thì $F(x) = \int f(x) dx = \int (3x^2 + 2) dx = x^3 + 2x + C_2$

Theo giả thiết $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 5$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 + 4 = C_2 + 3 \Rightarrow C_1 = 1$

Vậy $F(-1) + 2F(2) = -3 + C_2 + 2(10 + C_1) = 21$

Câu 63. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+7 & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2-1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 4$. Giá trị của $F(-2) + 3F(4)$ bằng

Lời giải

Ta có:

$$F(0) - F(-2) = \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 (3x^2 - 1) dx = x^3 - x \Big|_{-2}^0 = 6 \Rightarrow F(-2) = F(0) - 6 = -2$$

$$F(2) - F(0) = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (3x^2 - 1) dx = x^3 - x \Big|_0^2 = 6 \Rightarrow F(2) = F(0) + 6 = 10$$

$$F(4) - F(2) = \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 (2x + 7) dx = x^2 + 7x \Big|_2^4 = 26 \Rightarrow F(4) = F(2) + 26 = 36$$

Vậy $F(-2) - 3F(4) = -2 + 3 \cdot 36 = 106$

Câu 64. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1+x| - |1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính tổng $F(0) + F(2) + F(-3)$

Lời giải:

Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-2	$2x$	2	

Ta có: $\int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1) = F(2) - 3$ mà $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 2 dx = 2$ nên $F(2) = 5$

$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = 3 - F(0)$ mà $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$ nên $F(0) = 2$

$\int_{-1}^0 f(x) dx = F(0) - F(-1) = 2 - F(-1)$ mà $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx = x^2 \Big|_{-1}^0 = -1$ nên $F(-1) = 3$

$\int_{-3}^{-1} f(x) dx = F(-1) - F(-3) = 3 - F(-3)$ mà $\int_{-3}^{-1} f(x) dx = \int_{-3}^{-1} -2 dx = -4$ nên $F(-3) = 7$

Vậy $F(0) + F(2) + F(-3) = 2 + 5 + 7 = 14$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{khi } x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Câu 65. Cho hàm số f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$. Giá trị của $F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

Lời giải

Ta có:

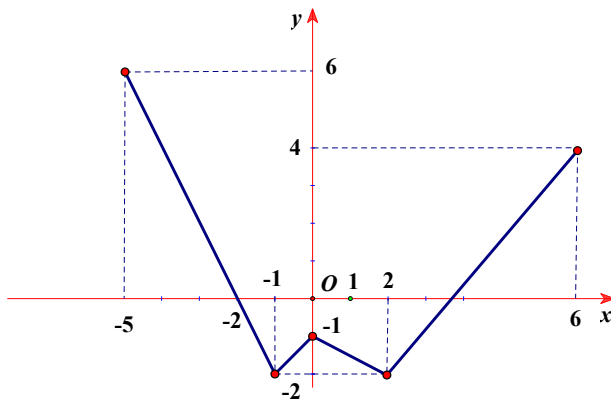
$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow F(0) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = 1$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

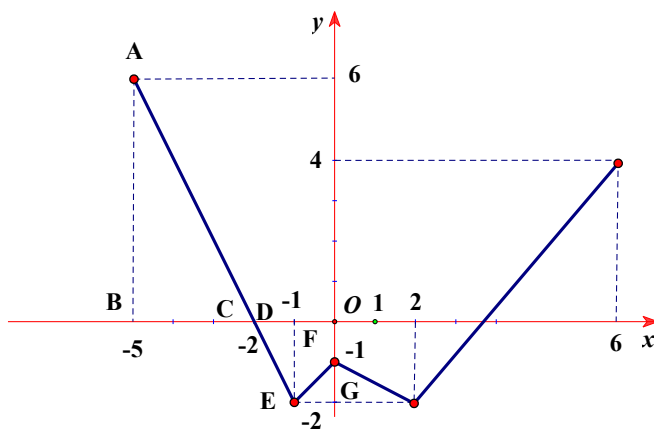
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2(1 + \sqrt{2}) = -1 - 2\sqrt{2}$$

Câu 66. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5; 6]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-5}^0 f(x) dx$ bằng.



Lời giải



Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9.$$

$$S_{DEE} = \frac{1}{2} DF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

$$S_{FEGO} = \frac{1}{2} (GO + EF) DO = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Khi đó

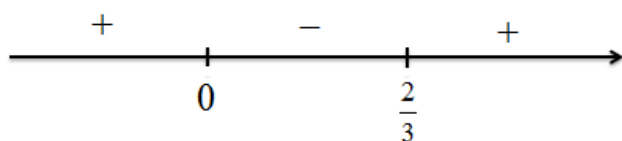
$$\int_{-5}^0 f(x) dx = \int_{-5}^{-2} f(x) dx - \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx = S_{ABC} - S_{DEE} - S_{FEGO} = 9 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

Câu 67. (Sở Lào Cai - 2021) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn:

$$\int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10 \quad ?$$

Lời giải

Đặt $I = \int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$; $f(x) = 3x^2 - 2x$. Dấu của $f(x)$:



Xét các trường hợp sau:

+) Nếu $m < 0$: $I = \int_0^m (3x^2 - 2x) dx = (x^3 - x^2) \Big|_0^m = m^3 - m^2 = m - 10$

$$\Rightarrow m^3 - m^2 - m + 10 = 0 \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn)}.$$

+) Nếu $0 \leq m < \frac{2}{3}$: $I = - \int_0^m (3x^2 - 2x) dx = -(x^3 - x^2) \Big|_0^m = -m^3 + m^2 = m - 10$

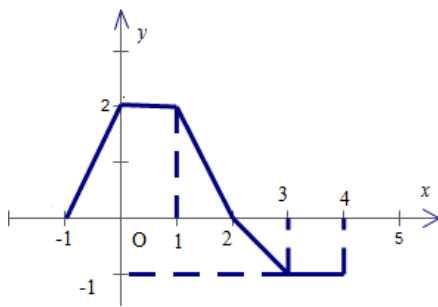
$$\Rightarrow m^3 - m^2 + m - 10 = 0 \Leftrightarrow m \approx 2,36 \text{ (loại)}.$$

+) Nếu $m \geq \frac{2}{3}$: $I = - \int_0^{\frac{2}{3}} (3x^2 - 2x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^m (3x^2 - 2x) dx = \frac{4}{27} + (x^3 - x^2) \Big|_{\frac{2}{3}}^m$

$$= m^3 - m^2 + \frac{8}{27} = m - 10 \Rightarrow m^3 - m^2 - m + \frac{278}{27} = 0 \Leftrightarrow m \approx -2,02 \text{ (loại)}.$$

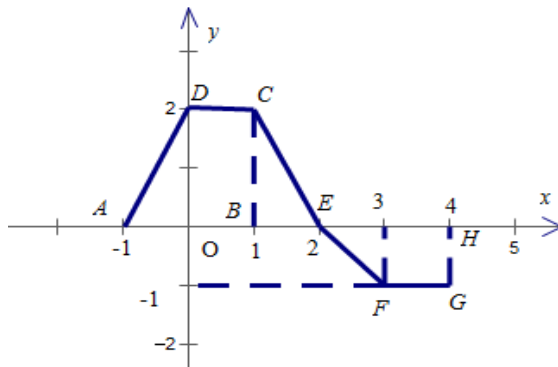
Vậy có 1 giá trị thực của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 68. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ với $-1 \leq x \leq 4$ có đồ thị các đoạn thẳng như hình bên.



Tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$ bằng

Lời giải



Ta có:
$$I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$$

Trong đó:
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 2 = 3$$

$$\int_1^2 f(x) dx = S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$
 ;
$$\int_2^4 f(x) dx = -S_{EFGH} = -\frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 1 = -\frac{3}{2}$$

Vậy
$$I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 3 + 1 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Câu 69. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh - 2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ thoả mãn

$\int_0^2 f(x) dx = 13$. Tính $T = a + b - ab$?

Lời giải

Nhận thấy hàm số phải liên tục tại $x=1$. Khi đó:

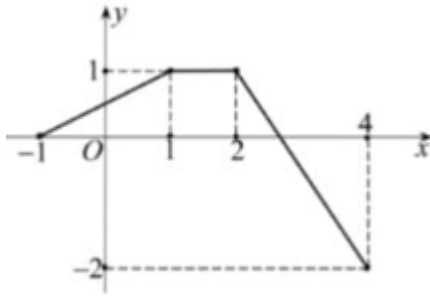
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2+a = 3+b \Leftrightarrow a-b=1$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 13 &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2+b) dx + \int_1^2 (2x+a) dx = (x^3+bx) \Big|_0^1 + (x^2+ax) \Big|_1^2 \\ &= (b+1) + (a+3) = a+b+4 \Rightarrow a+b=9 \end{aligned}$$

Như vậy $\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$ suy ra $T = a + b - ab = 5 + 4 - 5 \cdot 4 = -11$.

Câu 70. (THPT Lê Quý Đôn – Đà Nẵng 2024X) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường gấp khúc như hình vẽ bên dưới.



Giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^4 [2f(x) + 3] dx$ bằng

Lời giải

+) Với $x \in [-1; 1] \Rightarrow f(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $(-1; 0)$ và $(1; 1)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

+) Với $x \in [1; 2] \Rightarrow f(x) = 1$.

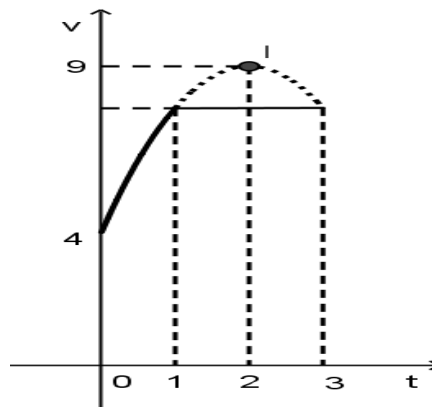
+) Với $x \in [2; 4] \Rightarrow f(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $(2; 1)$ và $(4; -2)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 4a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x + 4.$$

$$I = \int_{-1}^4 [2f(x) + 3] dx = 2 \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_{-1}^4 3 dx = 2 \left(\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \right) + 15$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^4 \left(-\frac{3}{2}x + 4 \right) dx \right) + 15 = 2(1 + 1 - 1) + 15 = 17.$$

Câu 71. (Mã 123 2017) Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường S mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:

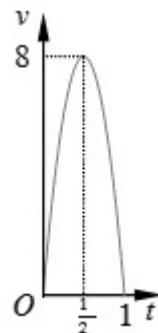
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $v = \frac{31}{4}$.

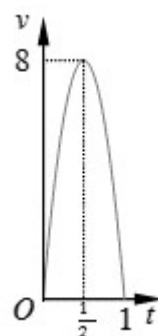
Vậy quãng đường vật chuyển động được là

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,583$$

Câu 72. (Mã 104 2017) Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



Lời giải



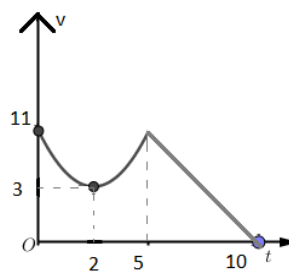
Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}$$

Suy ra $(P): y = -32x^2 + 32x$.

$$\text{Vậy quãng đường người đó đi được là } s = \int_0^{\frac{3}{4}} (-32x^2 + 32x) dx = 4,5 \text{ (km).}$$

Câu 73. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0 \leq t \leq 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10(s)$. Cho đỉnh Parabol là $I(2, 3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Lời giải

Gọi Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ khi $0 \leq t \leq 5(s)$

Do $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua $I(2; 3); A(0; 11)$ nên

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases}$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \leq t \leq 5(s)$ là

$$S = \int_0^5 (2x^2 - 8x + 11) dx = \frac{115}{3} (m)$$

Ta có $f(5) = 21$

Gọi $d: y = ax + b$ khi $5 \leq t \leq 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5; 21)$ và $C(10; 0)$ nên:

$$\begin{cases} 5a+b=11 \\ 10a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{21}{5} \\ b=42 \end{cases}$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $5 \leq t \leq 10(s)$ là

$$S = \int_5^{10} \left(-\frac{26}{5}x + 52 \right) dx = \frac{105}{2} (m)$$

Quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là $S = \frac{115}{3} + \frac{105}{2} = \frac{545}{6}$.