NGUYÊN LÝ DIRICHLET VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Nguyễn Duy Thái Sơn
(Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)
Nguyễn Văn Vinh
(sinh viên Khoa Công nghệ viễn thông, Đại học quốc gia Singapore;
nguyên học sinh khoá 2001-2004 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng,
giải Ba kỳ thi HSG Quốc gia lớp 12 năm học 2003-2004)

Nguyên lý Dirichlet (thuật ngữ tiếng Anh: *the pigeonhole principle*, cũng có nơi gọi là *the drawer principle*) - ở dạng đơn giản nhất - được phát biểu đầu tiên bởi G. Lejeune Dirichlet (1805-1859), một nhà toán học Đức gốc Pháp, như sau:

"Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng $(n \in \mathbf{N}^*)$ thì luôn có (ít nhất là) hai con thỏ bị nhốt trong cùng một chuồng".

Một cách tổng quát, ta có nguyên lý Dirichlet *mở rộng*:

"Nếu nhốt m con thỏ vào n cái chuồng $(m, n \in \mathbf{N}^*)$ thì luôn tồn tại một chuồng chứa ít nhất là $1+\left[\frac{m-1}{n}\right]$ con thỏ".

Ở đây, ký hiệu $[a]$ được dùng để chỉ *phần nguyên* của số thực a, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.

Dùng phương pháp phản chứng, ta có thể đưa ra một cách chứng minh *khá ngắn gọn* cho nguyên lý Dirichlet (ngay cả dưới dạng mở rộng); học sinh THPT cũng có thể làm được việc này; và điều đó không hề làm giảm đi giá trị của bản thân nguyên lý. Nguyên lý Dirichlet có rất nhiều ứng dụng (hiệu quả đến bất ngờ): sử dụng nó, ta có thể chứng minh được nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Chính vì vậy, tại các cuộc thi học sinh giỏi toán (quốc gia và quốc tế), nguyên lý Dirichlet thường xuyên được khai thác. Để minh hoạ, dưới đây, ta xét một số bài toán cụ thể.

Bài 1 (Putnam 1993): Cho một dãy số gồm 19 số nguyên dương không vượt quá 93 và một dãy số gồm 93 số nguyên dương không vượt quá 19. Chứng minh rằng từ hai dãy số đó ta có thể lần lượt trích ra hai dãy con có tổng các số hạng là bằng nhau.
Giải:
Ta xét bài toán tổng quát:

Cho hai dãy (hữu hạn) các số nguyên dương:

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m \le n,\ y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n \le m.$$

Khi đó, tồn tại các "chỉ số" $1 \le i_1 \le i_2 \le m$, $1 \le j_1 \le j_2 \le n$ sao cho $\sum_{i=i_1}^{i_2} x_i = \sum_{j=j_1}^{j_2} y_j$.

Giải bài toán tổng quát:

Đặt $a_p := \sum_{i=1}^{p} x_i\ (p \in \mathbf{Z}, 1 \le p \le m)$ và $b_q := \sum_{j=1}^{q} y_j\ (q \in \mathbf{Z}, 1 \le q \le n)$. Thay đổi vai trò của các "ký tự" *x, a, m, i, p* tương ứng với các ký tự *y, b, n, j, q* nếu cần, ta có thể xem rằng $a_m \le b_n$. Khi đó, với mỗi $p \in \mathbf{Z} \cap [1; m]$, tồn tại $f(p) := q \in \mathbf{Z} \cap [1; n]$ là chỉ số bé nhất mà $a_p \le b_q$. Xét *m* hiệu:

$$b_{f(1)} - a_1; b_{f(2)} - a_2; \ldots; b_{f(m)} - a_m. \tag{1}$$

Trước hết, ta có nhận xét rằng mọi hiệu đều bé hơn *m*. Thật vậy, nếu có một chỉ số $p \in \mathbf{Z} \cap [1; m]$ nào đó sao cho $m \le b_{f(p)} - a_p$, thì ($m < b_{f(p)}$ nên $f(p) > 1$, và)

$$m \le b_{f(p)-1} + y_{f(p)} - a_p \Rightarrow 0 \le m - y_{f(p)} \le b_{f(p)-1} - a_p$$
$$\Rightarrow a_p \le b_{f(p)-1},$$

mâu thuẫn với định nghĩa của $f(p)$. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng: quả thực, mỗi hiệu ở (1) là bé hơn *m*.

Bây giờ, nếu một trong các hiệu đó triệt tiêu: $b_{f(p)} - a_p = 0$, thì rõ ràng ta có ngay đpcm với cách chọn $i_1 := 1 =: j_1, i_2 := p, j_2 := f(p)$. Trong trường hợp còn lại, theo nhận xét trên, toàn bộ *m* hiệu ở (1) đều thuộc $\mathbf{Z} \cap [1; m-1]$, một tập hợp chỉ có $m-1$ phần tử, nên theo nguyên lý Dirichlet, có hai hiệu bằng nhau; tức là, tồn tại $r, s \in \mathbf{Z} \cap [1; m], r > s$, để

$$b_{f(r)} - a_r = b_{f(s)} - a_s$$
$$\Rightarrow b_{f(r)} - b_{f(s)} = a_r - a_s;$$

và ta cũng có đpcm, với $i_1 := s+1, i_2 := r, j_1 := f(s)+1, j_2 := f(r)$.

Bài 2 (Vô địch Cộng hoà Czech 1998): Cho X là một tập hợp gồm 14 số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng có một số nguyên dương $k \le 7$ và có hai tập con $k-$phần tử:

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_k\}, \{b_1; b_2; \ldots; b_k\}$$

rời nhau của X sao cho

$$\left|\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)-\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_k}\right)\right| < \frac{1}{1000}.$$

Giải: Xét $C_{14}^7 = 3432$ tập con $7-$phần tử của X. Tổng (các) nghịch đảo của các phần tử trong mỗi tập con này rõ ràng là không vượt quá $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{7} < 2{,}6$ nên phải thuộc vào một trong số 2600 nửa khoảng:

$$\left(\frac{0}{1000}; \frac{1}{1000}\right], \left(\frac{1}{1000}; \frac{2}{1000}\right], \ldots, \left(\frac{2599}{1000}; \frac{2600}{1000}\right].$$

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai tập con khác nhau có tổng nghịch đảo các phần tử thuộc vào cùng một nửa khoảng. Loại bỏ khỏi hai tập con đó các phần tử chung (hai tập con $7-$phần tử *khác nhau* thì có tối đa sáu phần tử chung), ta sẽ thu được hai tập con $k-$phần tử (với k nguyên dương, $k \le 7$) thoả yêu cầu của bài toán: hiệu của hai tổng nghịch đảo các phần tử trong hai tập con này sẽ sai khác nhau ít hơn 1/1000.

Bài 3 (Iberoamerica 1998): Các đại diện của *n* quốc gia $(n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\})$ ngồi quanh một bàn tròn theo cách sao cho hai người ngồi sát bên phải hai đại diện bất kỳ với cùng quốc tịch thì phải có quốc tịch khác nhau. Hãy xác định (theo *n*) số lớn nhất có thể có các đại diện ngồi quanh bàn tròn đó.
Giải: Ta sẽ dùng $X_1, X_2, \ldots, X_n$ để ký hiệu *n* quốc gia có đại diện ngồi tại bàn tròn; các đại diện có quốc tịch $X_i\ (\mathbf{N}^* \ni i \le n)$ sẽ được đánh số là $x_i^1, x_i^2, \ldots$

1/ Trước tiên, nếu có nhiều hơn n^2 đại diện ngồi tại bàn tròn, thì theo nguyên lý Dirichlet tồn tại $i\ (\mathbf{N}^* \ni i \le n)$ để quốc gia X_i có ít nhất là $n+1$ đại diện, mà ta ký hiệu là $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{n+1}$; nhưng chỉ có *n* quốc tịch, nên vẫn theo nguyên lý Dirichlet, trong số $n+1$ người ngồi sát bên phải các đại diện $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{n+1}$, phải có hai người có cùng quốc tịch; mâu thuẫn với yêu cầu của bài toán. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng có không quá n^2 đại diện ngồi tại bàn tròn.

2/ Tiếp theo, giả sử mỗi quốc gia có đúng n đại diện: các đại diện của $X_i\ (\mathbf{N}^* \ni i \le n)$ là $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n$; ta sẽ chỉ ra bằng quy nạp theo *n* rằng có một cách sắp xếp toàn bộ n^2 đại diện đó vào bàn tròn sao cho mọi yêu cầu của bài toán đều được thoả mãn.
Mỗi cách sắp xếp toàn bộ n^2 đại diện vào bàn tròn thực chất là một hoán vị

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n^2-1}, a_{n^2}) \tag{1}$$

của tập hợp $\{x_i^j \mid i, j \in \mathbf{N}^*; i, j \le n\}$, với quy ước rằng trong cách sắp xếp này:

- a_{k+1} là đại diện ngồi sát bên phải a_k (với mọi *k* nguyên dương mà $k < n^2$)
- a_1 ngồi sát bên phải a_{n^2}

(ta đồng nhất các hoán vị có thể thu được từ nhau qua một phép hoán vị vòng quanh).
Khi $n=2$ dễ thấy cách sắp xếp $(x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2)$ thoả mãn mọi yêu cầu của bài toán. Giả sử với $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ nào đó đã có một cách sắp xếp, mà ta vẫn giữ ký hiệu (1), thoả mãn mọi yêu cầu của bài toán. Khi đó, có thể chứng minh rằng:

Với mỗi $i \in \mathbf{N} \cap [1; n]$, tồn tại duy nhất $j \in \mathbf{N} \cap [1; n]$ sao cho người ngồi sát bên phải x_i^j cũng có quốc tịch X_i. (2)

Thật vậy, nếu n người ngồi sát bên phải các đại diện $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n$ đều có quốc tịch khác X_i (chỉ có $n-1$ quốc tịch như thế), thì theo nguyên lý Dirichlet, ít nhất hai người trong số họ phải có cùng quốc tịch; mâu thuẫn với yêu cầu của bài toán. Mâu thuẫn này chứng tỏ sự tồn tại của $j = j_i$. Hơn nữa, nếu $\mathbf{N} \cap [1; n] \ni k \ne j_i$, thì - theo yêu cầu của bài toán - người ngồi sát bên phải x_i^k sẽ không cùng quốc tịch X_i với người ngồi sát bên phải $x_i^{j_i}$. Điều đó cho thấy tính duy nhất của j_i, và (2) đã được chứng minh.

Do (2), bằng cách hoán vị vòng quanh nếu cần, trong (1) ta có thể xem a_1 và a_2 có cùng quốc tịch; từ đó, a_1 khác quốc tịch với a_{n^2}; vậy, vẫn theo (2), với mỗi $i \in \mathbf{N} \cap [1; n]$, tồn tại duy nhất $k_i \in \mathbf{N} \cap [1; n^2-1]$ sao cho a_{k_i} và a_{k_i+1} có cùng quốc tịch X_i.

Bây giờ, giả sử mỗi quốc gia $X_i\ (\mathbf{N}^* \ni i \le n)$ có thêm đại diện thứ $n+1$ là x_i^{n+1}; ngoài ra, có thêm quốc gia X_{n+1} với $n+1$ đại diện là $x_{n+1}^1, x_{n+1}^2, \ldots, x_{n+1}^{n+1}$. Khi đó, từ bộ (1), bằng cách:

- thay cặp (a_{k_1}, a_{k_1+1}) bởi bộ năm $(a_{k_1}, x_{n+1}^1, x_{n+1}^{n+1}, x_1^{n+1}, a_{k_1+1})$
- thay cặp (a_{k_i}, a_{k_i+1}) bởi bộ bốn $(a_{k_i}, x_{n+1}^i, x_i^{n+1}, a_{k_i+1})$ với mỗi $i \in \mathbf{N} \cap [2; n]$

ta sẽ thu được một cách sắp xếp thoả mãn mọi yêu cầu của bài toán cho trường hợp $n+1$ quốc gia. Vậy 2/ đã được chứng minh theo nguyên lý quy nạp.
Từ 1/ và 2/, ta thấy: số lớn nhất có thể có các đại diện ngồi quanh bàn tròn đã cho là n^2.

Bài 4 (trích đề chọn đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán quốc tế năm 1999): Cho $\mathcal{A} = \{a_1; a_2; a_3; \ldots\} \subset \mathbf{N}^*$ thoả mãn điều kiện $1 \le a_{p+1} - a_p \le 1999$ với mọi $p \in \mathbf{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại cặp chỉ số *p, q* với $p < q$ sao cho $a_p \mid a_q$.
Giải: Đặt $A(1; j) := a_1 + j - 1$ với mọi *j* nguyên dương mà $j \le 1999$, và bằng quy nạp, ta định nghĩa:

$$B_i := \prod_{k=1}^{1999} A(i-1; k),\ A(i; j) := B_i + A(i-1; j)$$

với mọi *i, j* nguyên dương mà $i \ge 2, j \le 1999$. Từ cách xây dựng trên, dễ dàng chứng minh $A(m; j) < A(n; j)$, $A(m; j) \mid A(n; j)$ với mọi bộ ba số nguyên dương *m, n, j* mà $j \le 1999$ và $m < n$. Từ cách xây dựng trên, cũng dễ thấy (với mỗi $i \in \mathbf{N}^*$): $A(i; 1), A(i; 2), \ldots, A(i; 1999)$ là 1999 số nguyên dương liên tiếp (không bé hơn a_1); do đó, theo giả thiết của bài toán về tập hợp $\mathcal{A}$, thì tồn tại $j_i \in \mathbf{Z} \cap [1; 1999]$ để $A(i; j_i) \in \mathcal{A}$.
Bây giờ, vì $j_1, j_2, \ldots, j_{2000} \in \mathbf{Z} \cap [1; 1999]$, nên theo nguyên lý Dirichlet, có hai số nguyên dương $m < n \le 2000$ mà $j_m = j_n =: j$; với chúng, ta tìm được cặp chỉ số $p < q$ sao cho

$$a_p = A(m; j_m) = A(m; j) \mid A(n; j) = A(n; j_n) = a_q \text{ (đpcm).}$$

Bài 5 (Vô địch Trung Quốc 2000): Có 2000 học sinh tham gia một cuộc thi trắc nghiệm gồm 5 câu hỏi; mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời, và mỗi học sinh chỉ được phép chọn 1 trong số 4 phương án tương ứng để trả lời cho câu hỏi. Tìm số tự nhiên *n* bé nhất sao cho các học sinh có thể làm bài thi theo cách nào đó mà cứ *n* học sinh thì tìm được bốn học sinh (trong số *n* học sinh này) để hai học sinh nào trong số bốn học sinh đó cũng có bài làm khác nhau ở ít nhất là hai câu hỏi.
Giải:
1/ Trước tiên, ta chứng minh rằng nếu $n \le 24$ thì trong mọi trường hợp (của bài làm các học sinh) yêu cầu của bài toán đều không được thoả mãn.
Xét $I := \{1; 2; 3; 4\}$. Bài làm của mỗi học sinh có thể được đặt tương ứng với một bộ $x := (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in I^5$; trong đó, x_i là số thứ tự của phương án mà học sinh đã chọn để trả lời cho câu hỏi thứ $i\ (i \in \mathbf{Z}, 1 \le i \le 5)$. Ngoài ra, nếu $x \in I^5$, ta cũng sẽ chấp nhận cách viết $x \equiv (x_1; x')$ với $x' := (x_2; x_3; x_4; x_5) \in I^4$. Bằng cách như vậy, dễ thấy I^5 được phân hoạch thành $4^4 = 256$ tập con (rời nhau); mỗi tập con gồm đúng 4 bộ chỉ khác nhau ở thành phần thứ nhất, tức là tập con có dạng

$$\mathcal{A}_{x'} := \{(1; x'); (2; x'); (3; x'); (4; x')\} \subset I^5 \tag{1}$$

với $x' \in I^4$. Vì $2000 > 7 \times 256$ nên theo nguyên lý Dirichlet có tám học sinh (khác nhau) $A_1, A_2, \ldots, A_8$, mà bài làm của họ thì ứng với các bộ thuộc cùng một tập con $\mathcal{A}$ nào đó (trong số 256 tập con nói trên). Nhưng $2000 - 8 = 1992 > 7 \times 256$, nên - lại theo nguyên lý Dirichlet - tồn tại tám học sinh (khác nhau, trong số 1992 học sinh còn lại), là $B_1, B_2, \ldots, B_8$, có bài làm ứng với các bộ thuộc cùng một tập con $\mathcal{B}$ nào đó (trong số 256 tập con nói trên). Cuối cùng, vẫn có $1992 - 8 = 1984 > 7 \times 256$, nên dùng nguyên lý Dirichlet một lần nữa, từ 1984 học sinh còn lại, ta tiếp tục tìm ra tám học sinh (khác nhau), là $C_1, C_2, \ldots, C_8$, mà bài làm của họ ứng với các bộ trong cùng một tập con $\mathcal{C}$ nào đó. Từ bốn học sinh bất kỳ trong số 24 học sinh

$$A_1, A_2, \ldots, A_8, B_1, \ldots, B_8, C_1, \ldots, C_8,$$

ta luôn chọn ra được hai học sinh có bài làm ứng với các bộ thuộc cùng một tập con (một trong ba tập con $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, hoặc $\mathcal{C}$); giả sử, chẳng hạn, đó là các học sinh A_i và $A_j\ (i, j \in \mathbf{Z}; 1 \le i < j \le 8)$ mà bài làm ứng với hai bộ trong $\mathcal{A}$. Theo cách xây dựng các tập con (1), bài làm của hai học sinh này chỉ có thể khác nhau ở tối đa là một câu hỏi (chính là câu hỏi thứ nhất, nếu hai bài làm không hoàn toàn giống nhau); yêu cầu của bài toán đã không được thoả mãn!
2/ Bây giờ, ta chỉ ra một tình huống mà $n = 25$ thoả yêu cầu của bài toán.
Muốn vậy, xét

$$S := \left\{x \in I^5 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} x_i \equiv 0 \pmod 4\right\} \tag{2}$$

Rõ ràng *S* gồm đúng $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 1 = 256$ bộ; hơn nữa, (2) cho thấy: khi $x, y \in S$, thì

$$x \ne y \Rightarrow \exists i, j \in \mathbf{N}^*, i < j \le 5, x_i \ne y_i, x_j \ne y_j. \tag{3}$$

Lấy $\mathcal{D}$ là một tập con $250-$phần tử của *S* và xét tình huống mà: với mỗi $x \in \mathcal{D}$, tồn tại đúng 8 học sinh có bài làm cùng ứng với bộ *x* (tình huống này hoàn toàn có thể xảy ra vì $2000 = 8 \times 250$). Khi ấy (do $25 > 8 \times 3$), theo nguyên lý Dirichlet, cứ 25 học sinh thì tìm được bốn học sinh (trong số 25 học sinh này) có bài làm ứng với bốn bộ $x, y, z, t \in \mathcal{D} \subset S$ đôi một khác nhau; và theo (3), hai học sinh nào trong số bốn học sinh đó cũng có bài làm khác nhau ở ít nhất là hai câu hỏi, đúng như yêu cầu của bài toán.
Từ 1/ và 2/, ta thấy: số tự nhiên bé nhất phải tìm là $n = 25$.

Bài 6 (Đề *đề nghị*, Toán 11, kỳ thi Olympic 30/4 năm 2006; chúng tôi đã dựa theo ý của một đề thi Vô địch Romania 1997): Gọi $\mathcal{A}$ là tập hợp tất cả các bộ ba $x = (x_1; x_2; x_3)$ mà $x_1, x_2, x_3 \in [0; 7] \cap \mathbf{Z}$. Bộ $x = (x_1; x_2; x_3) \in \mathcal{A}$ được gọi là trội hơn bộ $y = (y_1; y_2; y_3) \in \mathcal{A}$ nếu $x \ne y$ và $x_i \ge y_i$ với mọi $i \in \{1; 2; 3\}$; khi đó, ta viết $x \succ y$. Tìm số tự nhiên *n* bé nhất sao cho mọi tập con $n-$phần tử của $\mathcal{A}$ đều chứa ít nhất là hai bộ *x, y* mà $x \succ y$.
Giải:
1/ Trước hết, xét tập hợp $\mathcal{B} := \{x \in \mathcal{A} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 11\}$. Có thể kiểm tra trực tiếp rằng $\mathcal{B}$ là một tập con $48-$phần tử của $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$ gồm đúng: 4 phần tử có dạng $x = (0; x_2; 11 - x_2)$ với $4 \le x_2 \le 7$; 5 phần tử có dạng $x = (1; x_2; 10 - x_2)$ với $3 \le x_2 \le 7$; 6 phần tử có dạng $x = (2; x_2; 9 - x_2)$ với $2 \le x_2 \le 7$; 7 phần tử có dạng $x = (3; x_2; 8 - x_2)$ với $1 \le x_2 \le 7$; 8 phần tử có dạng $x = (4; x_2; 7 - x_2)$ với $0 \le x_2 \le 7$; 7 phần tử có dạng $x = (5; x_2; 6 - x_2)$ với $0 \le x_2 \le 6$; 6 phần tử có dạng $x = (6; x_2; 5 - x_2)$ với $0 \le x_2 \le 5$; và 5 phần tử có dạng $x = (7; x_2; 4 - x_2)$ với $0 \le x_2 \le 4$).
Rõ ràng $\mathcal{B}$ không chứa hai bộ *x, y* nào mà $x \succ y$.
2/ Tiếp theo, cho $\mathbf{N} \ni n \ge 49$, và $\mathcal{B}$ là một tập con $n-$phần tử bất kỳ của $\mathcal{A}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{B}$ chứa ít nhất hai bộ *x, y* mà $x \succ y$.
Muốn vậy, xét các tập con sau đây của $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{C}_1 := \{x \in \mathcal{A} \mid x_1 = 0 \vee x_2 = 7\},\ \mathcal{C}_2 := \{x \in \mathcal{A} \mid (x_1 = 1 \wedge x_2 \le 6) \vee (x_1 \ge 1 \wedge x_2 = 6)\},$$
$$\mathcal{C}_3 := \{x \in \mathcal{A} \mid (x_1 = 2 \wedge x_2 \le 5) \vee (x_1 \ge 2 \wedge x_2 = 5)\},$$
$$\mathcal{C}_4 := \{x \in \mathcal{A} \mid (x_1 = 3 \wedge x_2 \le 4) \vee (x_1 \ge 3 \wedge x_2 = 4)\},\ \mathcal{C} := \bigcup_{i=1}^{4} \mathcal{C}_i,$$
$$\mathcal{D} := \mathcal{A} \setminus \mathcal{C} \equiv \{x \in \mathcal{A} \mid x_1 \ge 4 \wedge x_2 \le 3\},$$
$$\mathcal{C}_{i,j} := \{x \in \mathcal{C}_i \mid x_3 = j\}\ (i, j \in \mathbf{Z}; 1 \le i \le 4; 0 \le j \le 7),$$
$$\mathcal{D}_{p,q} := \{x \in \mathcal{D} \mid x_1 = p, x_2 = q\}\ (p, q \in \mathbf{Z}; 4 \le p \le 7; 0 \le q \le 3);$$

và chỉ cần khảo sát hai trường hợp:

(i) Nếu $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ là một tập hợp có nhiều hơn 32 phần tử, thì do chỉ có 32 tập con $\mathcal{C}_{i,j}\ (i, j \in \mathbf{Z}; 1 \le i \le 4; 0 \le j \le 7)$, tạo thành một "phân hoạch" của $\mathcal{C}$, nên theo nguyên lý Dirichlet, $\mathcal{B}$ phải chứa ít nhất là hai phần tử *x* và *y* $(x \ne y)$ của cùng một tập con $\mathcal{C}_{i,j}$ nào đó $(i, j \in \mathbf{Z}; 1 \le i \le 4; 0 \le j \le 7)$; từ cấu trúc của $\mathcal{C}_{i,j}$ ta thấy *x* và *y* có thể so sánh được với nhau theo quan hệ "trội", mà ta có thể giả sử là $x \succ y$.

(ii) Nếu $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ có không quá 32 phần tử, thì $\mathcal{B} \cap \mathcal{D}$ chứa ít nhất $n - 32 \ge 17$ phần tử; nhưng chỉ có 16 tập con $\mathcal{D}_{p,q}\ (p, q \in \mathbf{Z}; 4 \le p \le 7; 0 \le q \le 3)$, tạo thành một "phân hoạch" của $\mathcal{D}$; nên vẫn theo nguyên lý Dirichlet, $\mathcal{B}$ phải chứa ít nhất là hai phần tử *x* và *y* $(x \ne y)$ của cùng một tập con $\mathcal{D}_{p,q}$ nào đó $(p, q \in \mathbf{Z}; 4 \le p \le 7; 0 \le q \le 3)$; từ cấu trúc của $\mathcal{D}_{p,q}$ ta thấy *x* và *y* có thể so sánh được với nhau theo quan hệ "trội", mà ta cũng có thể giả sử là $x \succ y$ (đpcm).

Từ 1/ và 2/, ta thấy: số tự nhiên bé nhất cần tìm là $n = 49$.