**Bài 98.** Từ điểm  nằm ngoài đường tròn  vẽ hai tiếp tuyến  và cát tuyến . Gọi  là trung điểm của . Gọi  lần lượt là giao điểm của đường thẳngvới .

a) Chứng minh .

b) Chứng minh  cùng nằm trên một đường tròn.

c) Khi cung  nhỏ hơn cung  hãy chứng minh .

****

**Giải:**

a) Ta có  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);   là trung trực của   tại trung điểm  của .

Mặt khác vì  là trung điểm của nên   (hai tam giác vuông có góc nhọn  chung) .

Mặt khác trong tam giác  vuông tại  có  là đường cao, ta có  hay . Vậy .

b) Ta có  (theo tính chất của tiếp tuyến và quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) nên năm điểm  cùng nằm trên đường tròn đường kính .

c) Xét tam giác  và tam giác  có  chung,  (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn )  .

Mặt khác trong tam giác  vuông tại  có  là đường cao, ta có   lại có  chung nên 

. Tứ giác  có góc ngoài một đỉnh bằng góc trong đỉnh đối diện nên là tứ giác nội tiếp mà  (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn ) nên ta có .

**Bài 99.** Cho đường tròn , qua điểm  ở bên ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến  ( là các tiếp điểm), kẻ cát tuyến ( nằm giữa và ).

a) Chứng minh rằng .

b) Chứng minh rằng: .

c) Gọi  là trung điểm của . Chứng minh tứ giác nội tiếp.

d) Kẻ dây  song song với . Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.

****

**Giải:**

a) Xét tam giác  và tam giác  có chung;  (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn ) .

b) (ý a)  (1)

Chứng minh tương tự ý a) ta có  (2)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta lại có  (3)

Từ (1), (2), (3) ta có .

c) Ta có  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);   là trung trực của   tại trung điểm  của . Trong tam giác  vuông tại  có  là đường cao, ta có  . Lại có

 lại có  chung nên 

. Tứ giác  có góc ngoài một đỉnh bằng góc trong đỉnh đối diện nên là tứ giác nội tiếp.

d) Dây  mà  (ý c)  hay  là trung trực của  (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) 

Tứ giác  nội tiếp nên  (hai góc nội tiếp cùng chắn )

Tam giác  cân tại  nên .

Mà  (hai góc đối của tứ giác  nội tiếp) nên  suy ra  hay ba điểm  thẳng hàng.

**Bài 100.** Cho ba điểm  cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Đường tròn  thay đổi đi qua  và  sao cho  không thuộc . Từ điểm  vẽ hai tiếp tuyến và  với đường tròn . Gọi  là trung điểm ,  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của đường thẳng  và đường thẳng .

a) Chứng minh bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh .

c) Chứng minh đường thẳng  luôn đi qua một điểm cố định.



a) Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có . Lại có  là trung điểm của dây nên  (Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) nên  cùng thuộc đường tròn đường kính .

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có  mà  (bán kính của  ) nên  là trung trực của  tại trung điểm  của .  (hai tam giác vuông có góc nhọn  chung)

(1)

Lại có trong tam giác  vuông tại  có  là đường cao nên  (2)

Từ (1) và (2) suy ra .

c) Gọi  là giao điểm của  và  ta có  (hai tam giác vuông có góc nhọn  chung)  (3).

Trong tam giác  vuông tại  có  là đường cao nên  (4)

Mặt khác  ( chung;  góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn  ) (5)

Từ (3), (4), (5) ta có 

Vì  cố đinh,  là trung điểm của  cố định nên  không đổi suy ra  cố định.

Vậy đường thẳng  luôn đi qua điểm  cố định