ĐỀ HSG TOÁN 9 BA VÌ 2023-2024

Bài 1. *(2 điểm)* Rút gọn biểu thức : A = $\frac{\sqrt{4x^3-16x^2}+21x-9}{\sqrt{x-1}}$

Bài 2. *(5 điểm)*

1, Giải phương trình: $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3+3x^2+3x+2}$

2, Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn: $4x^2 - (8y + 11)x + (8y^2 + 14) = 0$

Tìm y khi x lần lượt đạt được giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. *(5điểm)*

1, Tìm 7 số nguyên dương sao cho tích các bình phương của chúng bằng 2 lần tổng các bình phương của chúng.

2, Cho các số thức không âm x, y thay đổi và thỏa mãn x + y = 1 . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $B = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x)+ 25xy$.

Bài 4. *(6 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC.

1, Vẽ về phía ngoài tam giác ABC nửa đường tròn (I) đường kính AB và nửa đường tròn (K) đường kính AC. Đường thẳng qua A cắt hai nửa đường tròn (I), (K) lần lượt tại các điểm M, N(M khác A, B và N khác A,C)

Tính các góc của tam giác ABC khi diện tích tam giác CNA bằng 3 lần diện tích tam giác
AMB

2, Cho AB < AC và điểm D thuộc cạnh AC sao cho AD = AB. Gọi E là hình chiếu của điểm D trên đường thẳng BC và điểm F là hình chiếu điểm A trên đường thẳng DE.

So sánh $\frac{AF}{AB}$ và $\frac{AF}{AC}$với cos $\widehat{AEB}$.

Bài 5. *(2 điểm)*

Hai người chơi trò chơi như sau: trong hộp có 311 viên bi, lần lượt từng người lấy k viên bi, với k $\in\{1,2,3\}$. Người thắng là người lấy được viên bi cuối cùng trong hộp bi đó.

1, Hỏi người thứ nhất hay người thứ 2 thắng và chiến thuật chơi thế nào để thắng?

2, Cũng hỏi như câu trên, khi đề bài thay 311 viên bi bằng n viên bi, với n là số nguyên dương?

LỜI GIẢI

Bài 1:

Rút gọn A

*	Phân tích $4x^3 - 16x^2 + 21x - 9 = (2x - 3)^2(x - 1)$

*	Điều kiện: $x > 1$

*	$A=|2x-3|$

*	$A = \begin{cases} 2x-3 \quad x \leq \frac{3}{2} \\ 3-2x \quad 1<x<\frac{3}{2} \end{cases}$

Bài 2:

1) Giải phương trình …

*Phân tích $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^2 + x + 1)$

*Điều kiện: $x \geq -2$

*Đặt $x + 2 = a$, $x^2 + x + 1 = b$ đưa về $2(a + b) = 5ab$

*Giải được $a = 4b$, $b = 4a$

*$a = 4b \Leftrightarrow x + 2 = 4(x^2 + x + 1)$ phương trình vô nghiệm

*$b = 4a \Leftrightarrow x^2 - 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x_1=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{37}}{2}$

*So sánh với điều kiện và kết luận

2) Cho các số thực …

*Đưa về phương trình: $8y^2 - 8yx + 4x^2 - 11x + 14 = 0$

*$\Delta'y= - 16x^2 + 88x - 112 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 14 \leq 0$

*Giải được $2 \leq 3 \leq 3,5$

*Với $x = 2 \Rightarrow y = 1$; $x = 3,5 \Rightarrow y = 1,75$

* Kết luận: (2;1), (3,5;1,75)

Bài 3:

1) Tìm 7 số …

*Goi 7 số nguyên dương phải tìm là x1, x2, …, x7;

$$x_1^2.x_2^2\ldots x_7^2=2\left(x_1^2+x_2^2+\ldots x_7^2\right)$$

*Giả sử $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_7\geq 1$ *có* $x_1^2.x_2^2\ldots x_7^2\leq 2.7\,x_1^2=14\,x_1^2$

$\Rightarrow x_2^2\ldots x_7^2\leq 14$

* x2…x7 $\leq\sqrt{14}<4=2^2$ ⇒ x2 = …= x7 = 1

*⇒ $x_1^2.x_2^2=2(x_1^2+x_2^2+5)$

*Đặt x_1^2=a, $x_2^2=b$ b với a, b là các số nguyên dương chính phương

ab = 2a + 2b + 10 ⇔ (a - 2)(b – 2) = 14.1 = 7.2

*Trường hợp 1: $\begin{cases}a-2=14\\ b-2=2\end{cases}$ =¿ $b=3$ không phải lá số chính phương

*Trường hợp 2: $\begin{cases}a-2=7\\ b-2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=9\\ b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3\\ x_2=2\end{cases}$ và kết luận

2) Cho các số …

*B = $16x^2y^2+12x^3+12y^3+34xy$

*B = $16x^2y^2+12(x+y)^3-2xy=\ldots=16\left(xy-\frac{1}{16}\right)^2+\frac{191}{16}$

* $B\geq\frac{191}{16}$, B nhỏ nhất = $\frac{191}{16}$ ⇔ xy $=\frac{1}{16}$. Giải được:

x = $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$; y=$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ hoặc x=$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$, y= $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

* Lại có $0\leq 4xy\leq(x+y)^2=1\Rightarrow 0\leq xy\leq\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{1}{16}\leq xy-\frac{1}{16}\leq\frac{3}{16}$

nên $0\leq\left|xy-\frac{1}{16}\right|\leq\frac{3}{16}$

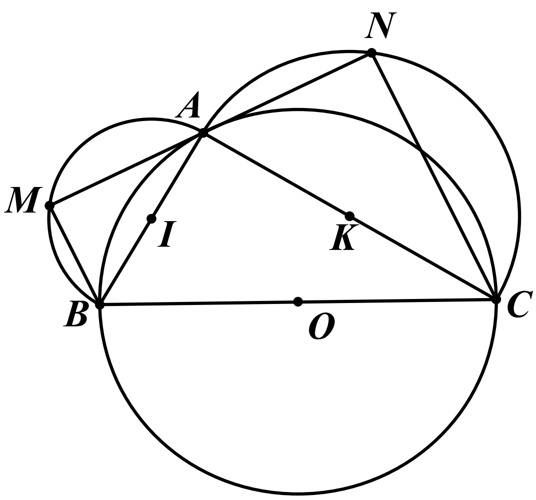
*B $=16(xy-\frac{1}{16})^2+\frac{191}{16}\leq 16.(\frac{3}{16})^2+\frac{191}{16}=\frac{25}{52}$.

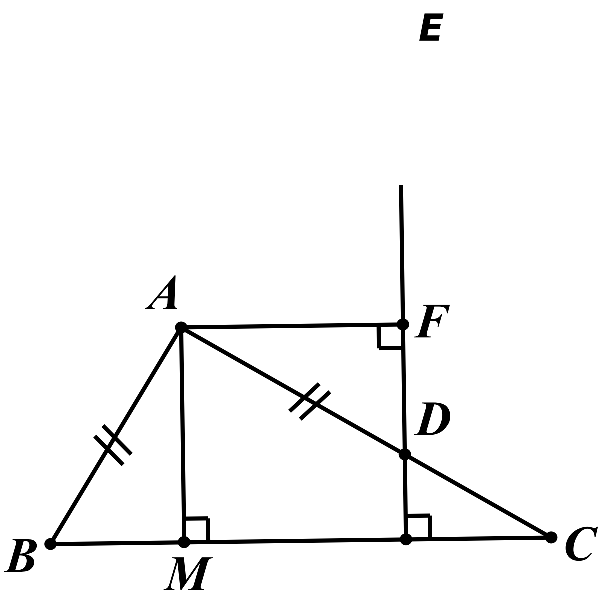
Vậy B lớn nhất $=\frac{25}{52}\Leftrightarrow(x+y)=1$ và $xy=\frac{1}{4}$

⇔ x = y = $\frac{1}{2}$

*Kết luận

Bài 4:





1) Tính các góc…

* Chứng minh được $\widehat{BAC}$= 900

* Chứng minh được ΔAMB và ΔCAN đồng dạng

* Suy ra $\frac{1}{3} = \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta CNA}}$ = $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

* $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = tg\,30^{\circ} = tg\,\widehat{ACB}$ => $\widehat{ACB} = 30^{\circ}$

* Vậy $\widehat{ABC}$ = 60^0 và kết luận.

2) So sánh …

*Kẻ AH ⊥ BC có AFEH là hình chữ nhật

*ΔABD vuông cân ⇒ $\widehat{AD}$ = 45^0

*Tứ giác ADEB nội tiếp ⇒ $\widehat{AEB}$ = $\widehat{ADB}$ = 45^0

*Do đó ΔAHE vuông cân ⇒ AH=HE=AF

*ΔABC vuông: $\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\text{¿}\frac{2}{AC^2}<\frac{1}{AF^2}<\frac{2}{AB^2}$

*Từ $\frac{2}{AC^2}<\frac{1}{AF^2}=\text{¿}\frac{AF}{AC}<\cos\widehat{AEB}<\frac{AF}{AB}=\cos 45^{\circ}=\cos\widehat{AEB}$

*Từ $\frac{1}{AF^2}<\frac{2}{AB^2}=\text{¿}\frac{AF}{AB}>\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^{\circ}=\cos\widehat{AEB}$

Kết luận : $\frac{AF}{AC}<\cos\widehat{AEB}<\frac{AF}{AB}$

Bài 5:

1) Ai thắng …

*Người thứ nhất lấy 3 viên bi còn 308 viên bi là bội số của 4

*Người thứ hai lấy 1, 2 hoặc 3 viên bi

*Nười thứ nhất lấy 3, 2 hoặc 1 viên số còn lại là bội của 4

*Cứ tiếp tục như vậy thì người lấy cuối cùng phải là người thứ nhất

2) Với n viên bi

*Nếu n không phải là bội số của 4, với cách làm như trên thì người thứ nhất thắng

* Nếu n là bội của 4 thì người thứ hai thắng.