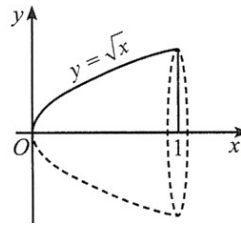


TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho khối tròn xoay như Hình. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bởi hình phẳng cho ở Hình khi quay quanh trục Ox (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).



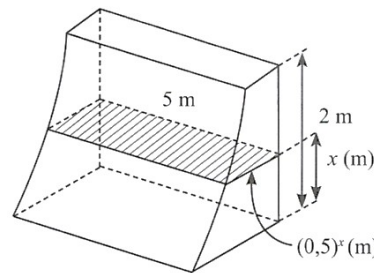
Lời giải

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$, khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như Hình. Thể tích

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \approx 1,6.$$

khối tròn xoay đó là:

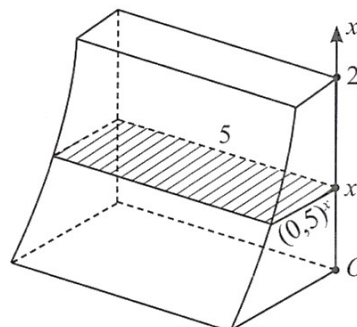
Câu 2. Một khối bê tông cao 2 m được đặt trên mặt đất phẳng. Nếu cắt khối bê tông này bằng mặt phẳng nằm ngang, cách mặt đất $x(m) (0 \leq x \leq 2)$ thì được mặt cắt là hình chữ nhật có chiều dài 5 m, chiều rộng $(0,5)^x(m)$ (Hình).



Tính thể tích của khối bê tông (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của mét khối).

Lời giải

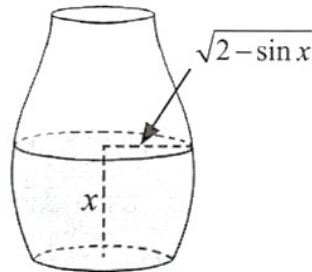
Chọn trục Ox thẳng đứng, gốc O nằm trên mặt đáy của khối bê tông, chiều dương hướng lên trên (Hình).



Khi đó, khối bê tông nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng vuông góc với Ox lần lượt tại các điểm $x = 0$ và $x = 2$. Mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq 2)$ cắt khối bê tông theo mặt cắt có diện tích là $S(x) = 5 \cdot (0,5)^x (m^2)$. Do đó, thể tích của khối bê tông là

$$V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \right)^x dx = \frac{5}{\ln \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^x \bigg|_0^2 = -\frac{5}{\ln 2} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{15}{4 \ln 2} \approx 5,41 (m^3).$$

- Câu 3.** Một bình chứa nước dạng như hình có chiều cao là $\frac{3\pi}{2}$ dm. Nếu lượng nước trong bình có chiều cao là x (dm) thì mặt nước là hình tròn có bán kính $\sqrt{2 - \sin x}$ (dm) với $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$



Tính dung tích của bình (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của đềximét khối).

Lời giải

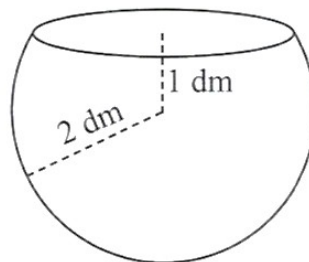
Diện tích của mặt nước hình tròn bán kính $R = \sqrt{2 - \sin x} (dm)$ là

$$S(x) = \pi R^2 = \pi(2 - \sin x) (dm^2).$$

Dung tích của bình là

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \pi(2 - \sin x) dx \\ &= \pi(2x + \cos x) \bigg|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \pi(3\pi - 1) \approx 26,47 (dm^3). \end{aligned}$$

- Câu 4.** Một bể cá có dạng là một phần hình cầu được tạo thành khi cắt hình cầu bán kính 2 dm bằng mặt phẳng cách tâm của hình cầu 1 dm (Hình).

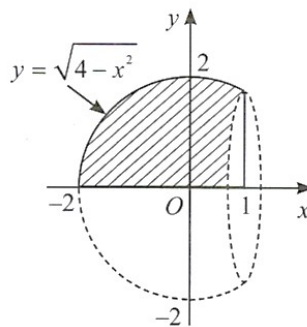


Tính dung tích của bể cá (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của đềximét khối).

Gợi ý: Có thể coi bể cá là khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ với $-2 \leq x \leq 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ quanh trục hoành.

Lời giải

$$V = \pi \int_{-2}^1 (4 - x^2) dx = \pi \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_{-2}^1 = 9\pi \approx 28,3 (dm^3).$$



Câu 5. Khi sử dụng phần mềm mô phỏng để thiết kế một chậu cây, người ta quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x} + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=4$ quanh trục hoành. Biết đơn vị trên các trục tọa độ là đềximét. Thể tích của chậu cây (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) bằng bao nhiêu đềximét khối?

Lời giải

Thể tích chậu cây là

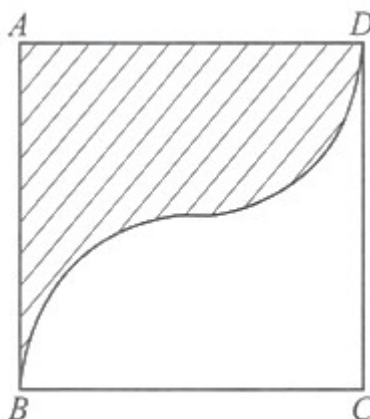
$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x} + 2)^2 dx = \pi \int_0^4 (x + 4\sqrt{x} + 4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + \frac{8}{3} x\sqrt{x} + 4x \right) \Big|_0^4 = \frac{136\pi}{3} \approx 142,4 (dm^3)$$

Câu 6. Một chi tiết máy được thiết kế bằng cách quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$, trục hoành và các đường thẳng $x=1, x=4$ quanh trục hoành. Biết đơn vị trên các trục tọa độ là centimét. Thể tích của chi tiết máy đó (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) bằng bao nhiêu centimét khối?

Lời giải

$$V = \pi \int_1^4 (x^2 - 4x + 5)^2 dx = \frac{78\pi}{5} \approx 49 (cm^3)$$

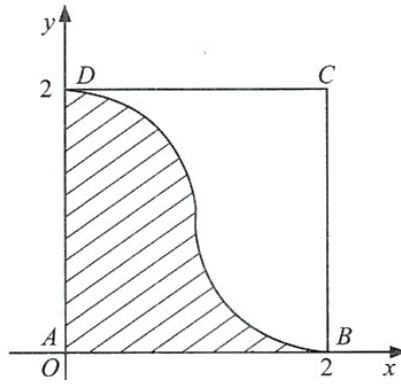
Câu 7. Một vật trang trí có dạng là khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình bên) quanh trục AB .



Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD . Thể tích của vật trang trí đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) bằng bao nhiêu centimét khối? (Trích đề Minh họa tốt nghiệp THPT năm 2024).

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình dưới đây.



Ta có phương trình các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD là $y = 1 - \sqrt{1 - (x - 2)^2}$; $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$.

Vậy thể tích của vật trang trí đó là

$$V = \pi \int_1^2 \left(1 - \sqrt{1 - (x - 2)^2}\right)^2 dx + \pi \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)^2 dx \approx 10,5 (cm^3)$$

Câu 8. Một thùng dầu bị rò rỉ từ lúc 13 giờ với tốc độ rò rỉ là $v(t) = 16 + 3t$ (lít/giờ), trong đó t (giờ) là thời gian tính từ khi bắt đầu bị rò rỉ. Khi đó $V(t)$ (lít) là thể tích dầu bị mất đi thoả mãn $V'(t) = v(t)$. Giả sử V_1 là thể tích dầu bị mất đi trong khoảng thời gian từ 13 giờ đến 16 giờ và V_2 là thể tích dầu bị mất đi trong khoảng thời gian từ 16 giờ đến 19 giờ. Tính $V_2 - V_1$ (theo đơn vị lít).

Lời giải

Ta có $V'(t) = v(t) \Rightarrow V(t) = \int v(t) dt$.

Thể tích dầu bị mất đi trong khoảng thời gian từ 13 giờ đến 16 giờ là

$$V_1 = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (16 + 3t) dt = \left(16t + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^3 = 61,5 (l).$$

Thể tích dầu bị mất đi trong khoảng thời gian từ 16 giờ đến 19 giờ là

$$V_2 = \int_3^6 v(t) dt = \int_3^6 (16 + 3t) dt = \left(16t + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_3^6 = 88,5 (l).$$

Do đó, $V_2 - V_1 = 88,5 - 61,5 = 27 (l)$.

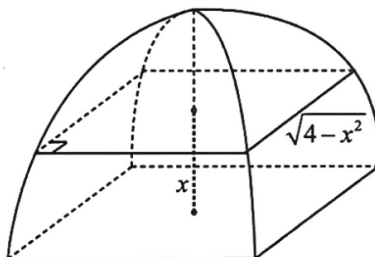
Câu 9. Một cái chậu cao 16 cm. Khi đổ nước vào chậu, nếu độ cao của nước là $x (cm)$ ($0 \leq x \leq 16$) thì mặt thoáng của nước là hình tròn bán kính $r = 9 + \sqrt{x} (cm)$. Tính dung tích của chậu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của lít).

Lời giải

$$V = \pi \int_0^{16} (9 + \sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^{16} (81 + 18\sqrt{x} + x) dx = \pi \left(81x + 12x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{16} = 2192\pi (cm^3).$$

Suy ra $V = 2,192\pi (l) \approx 6,89 (l)$.

- Câu 10.** Một cái màn chụp có dạng như hình vẽ bên. Biết rằng mặt cắt của cái màn theo mặt phẳng song song với mặt phẳng đáy và cách mặt đáy một khoảng $x(m)$, $0 \leq x \leq 2$, là một hình vuông cạnh bằng $\sqrt{4 - x^2}(m)$. Thể tích của cái màn là bao nhiêu mét khối? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)



Lời giải

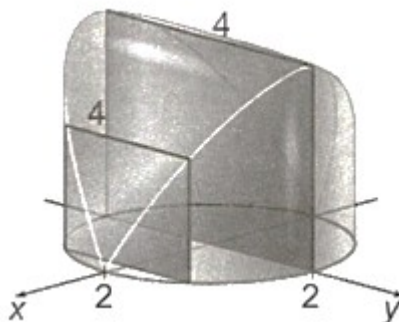
$$S(x) = (\sqrt{4 - x^2})^2 = 4 - x^2$$

Diện tích mặt cắt:

$$V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3} \approx 5,3 (m^3)$$

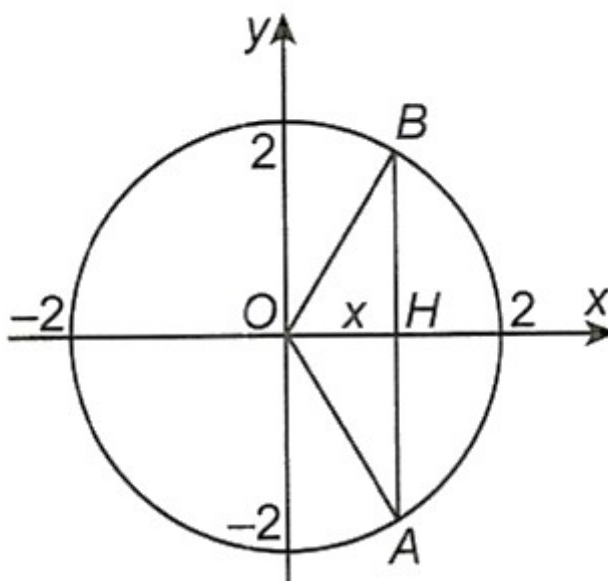
Thể tích cái màn:

- Câu 11.** Tính thể tích của vật thể B , biết đáy của B là hình tròn bán kính 2 và các mặt cắt vuông góc với mặt đáy là những hình vuông



(làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải



Mỗi mặt phẳng (P) vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng x ($-2 \leq x \leq 2$) cắt vật thể theo mặt cắt là hình vuông có độ dài cạnh là $AB = 2\sqrt{4 - x^2}$. Khi đó diện tích mặt cắt là $4(4 - x^2)$.

$$V = \int_{-2}^2 4(4 - x^2) dx = \frac{128}{3} \approx 42,7$$

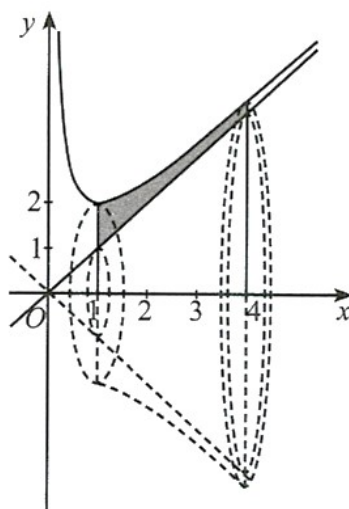
Vậy thể tích vật thể là

- Câu 12.** Một cột bê tông hình trụ có chiều cao 9 m. Nếu cắt cột bê tông bằng mặt phẳng nằm ngang cách chân cột $x(m)$ thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $1 - \frac{\sqrt{x}}{4}(m)$ với $0 \leq x \leq 9$. Tính thể tích của cột bê tông (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của mét khối).

Lời giải

$$V = \pi \int_0^9 \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{4}\right)^2 dx = \pi \int_0^9 \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{16}x\right) dx = \frac{81\pi}{32} \approx 7,95(m^3)$$

- Câu 13.** Một chiếc bát thủy tinh có bề dày của phần xung quanh là một khối tròn xoay, khi xoay hình phẳng D quanh một đường thẳng a bất kì nào đó mà khi gắn hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên trục là decimét) vào hình phẳng D tại một vị trí thích hợp, thì đường thẳng a sẽ trùng với trục Ox . Khi đó, hình phẳng D được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x + \frac{1}{x}, y = x$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$ (Hình). Thể tích của bề dày chiếc bát thủy tinh đó bằng bao nhiêu decimét khối? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Gọi V_1 là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$ quay quanh trục Ox . Khi đó

$$V_1 = \pi \int_1^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{111\pi}{4}(dm^3)$$

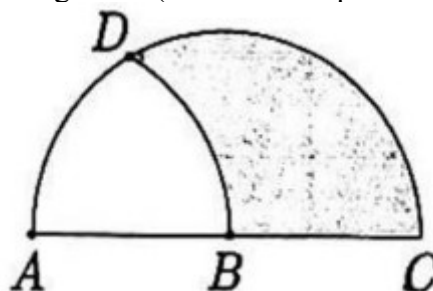
- Gọi V_2 là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$ quay quanh trục Ox . Khi đó

$$V_2 = \pi \int_1^4 x^2 dx = 21(dm^3)$$

Vậy thể tích của bể dày chiếc bát thủy tinh đó là:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{111\pi}{4} - 21\pi = \frac{27\pi}{4} \approx 21,2(dm^3)$$

Câu 14. (Chuyên Vinh 2024) Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (H) (phần màu xám trong hình vẽ bên) quanh trục AC . Biết rằng $AC = 2cm, B$ là trung điểm của AC . Miền (H) được giới hạn bởi đoạn thẳng BC và các cung tròn bán kính $1cm$ có tâm A và B . Tính thể tích của vật trang trí đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy với $O \equiv B$, tia $Ox \equiv BC$,

Đường tròn tâm $B(0;0), R = 1$ là $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$

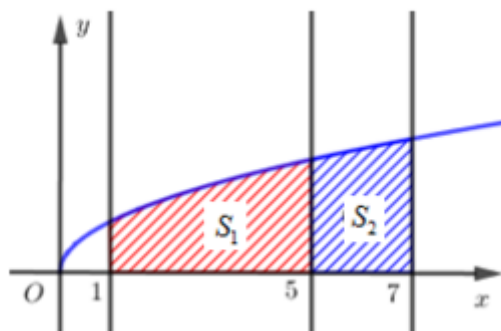
Đường tròn tâm $A(-1;0), R = 1$ là $(x+1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - (x+1)^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường tròn là

$$1 - x^2 = 1 - (x+1)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx - \pi \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 - (1+x)^2) dx = \frac{11}{12}\pi \approx 2,9 cm^3$$

Câu 15. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 7$. Đường thẳng $x = k$ với $1 < k < 7$ chia (H) thành hai phần là (S_1) và (S_2) quay quanh trục Ox ta thu được hai khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 . Xác định k để $V_1 = 2V_2$. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



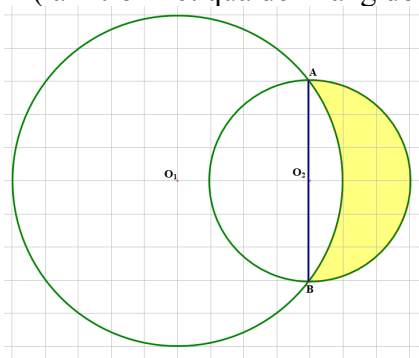
Lời giải

$$\int_1^k x dx = \frac{x^2}{2} = F(x) \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \int_1^k (\sqrt{x})^2 dx}{\pi \int_k^7 (\sqrt{x})^2 dx} = \frac{F(k) - F(1)}{F(7) - F(k)} = 2 \Leftrightarrow F(k) - \frac{1}{2} = 2 \left(\frac{49}{2} - F(k) \right)$$

Ta có

$$\Rightarrow F(k) = \frac{33}{2} \Rightarrow k = \sqrt{33} \approx 5,7$$

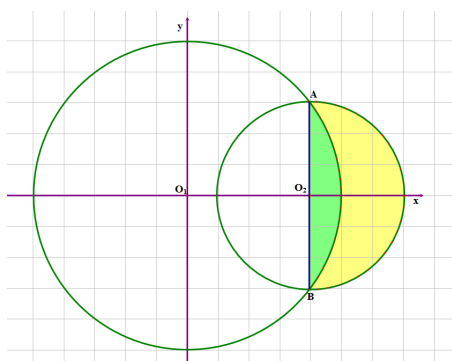
Câu 16. (Sở Hải Phòng 2024) Cho hai đường tròn $C_1(O_1; 10)$ và $C_2(O_2; 6)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (C_2) . Gọi (D) là miền mặt phẳng nằm ngoài đường tròn (C_1) và nằm trong đường tròn (C_2) (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích khối tròn xoay khi quay (D) xung quanh trục O_1O_2 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Chọn gốc tọa độ tại O_1 , suy ra phương trình đường tròn O_1 là: $x^2 + y^2 = 100$

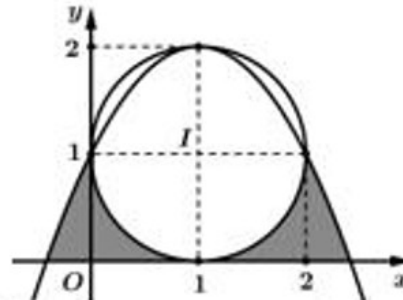
Ta có $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = 8$, suy ra phương trình đường tròn $O_2: (x - 8)^2 + y^2 = 36$



Thể tích khối xoay khi quay (màu xanh) quay trục O_1O_2 là: $V = \pi \int_8^{10} (\sqrt{100 - x^2}) dx = \frac{113}{8} \pi$

Vậy thể tích cần tìm là $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 - \frac{113}{8} \pi = \frac{320}{3} \pi \approx 107$

Câu 17. (Sở Nam Định 2024) Hình phẳng được tô đậm trong hình bên được giới hạn bởi đường tròn, đường parabol, trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng đã cho quanh trục Ox . (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Phương trình đường tròn là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

$\Rightarrow (y - 1)^2 = 1 - (x - 1)^2$ suy ra phương trình nửa đường tròn dưới là

$$y - 1 = -\sqrt{1 - (x - 1)^2} \Leftrightarrow y = f(x) = 1 - \sqrt{1 - (x - 1)^2}$$

Phương trình Parabol có dạng: $g(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{Trong đó } \begin{cases} g(0) = 1 \\ g(1) = 2 \\ g(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$g(x) = -x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

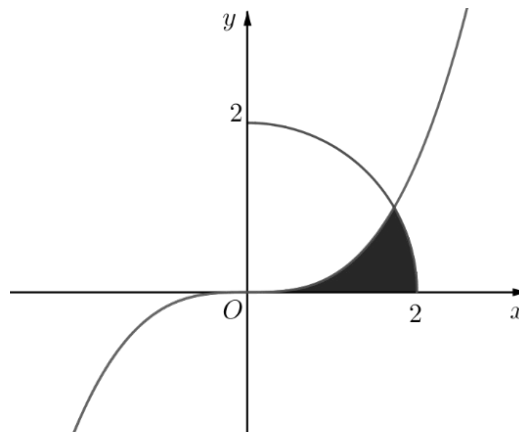
Do đó

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng đã cho quanh trục Ox là:

$$V = 2\pi \int_{1-\sqrt{2}}^0 g^2(x) dx + 2\pi \int_0^1 f^2(x) dx$$

Suy ra $V \approx 1,55$

Câu 18. (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018) Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3}}{9} x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).



Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V = \left(-\frac{a}{b}\sqrt{3} + \frac{c}{d} \right) \pi$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P = a + b + c + d$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{\sqrt{3}}{9}x^3 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$$V = \pi \left[\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{9}x^3 \right)^2 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \left(\sqrt{4-x^2} \right)^2 dx \right]$$

$$= \pi \left[\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{27}x^6 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (4-x^2) dx \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{27} \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_0^{\sqrt{3}} + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\sqrt{3}}^2 \right]$$

$$= \left(-\frac{20\sqrt{3}}{7} + \frac{16}{3} \right) \pi$$

$$\Rightarrow a = 20, b = 7, c = 16, d = 3$$

$$\Rightarrow P = a + b + c + d = 46$$

Câu 19. (HSG Tỉnh Bắc Ninh 2019) Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000\pi$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$

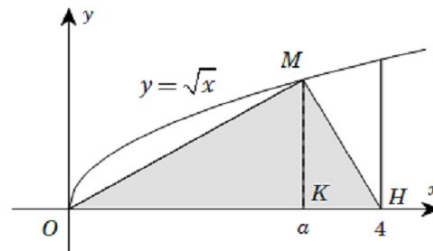
$$V = \pi \int_{-|m|}^{|m|} (m^2 - x^2) dx = \pi \left(m^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-|m|}^{|m|} = \frac{4\pi m^2 |m|}{3}$$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

Ta có: $V < 1000\pi \Leftrightarrow \frac{4\pi m^2 |m|}{3} < 1000\pi \Leftrightarrow |m|^3 < 750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750} < m < \sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750} \approx 9,08$ và $m \neq 0$. Vậy có 18 giá trị nguyên của m .

Câu 20. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



Lời giải

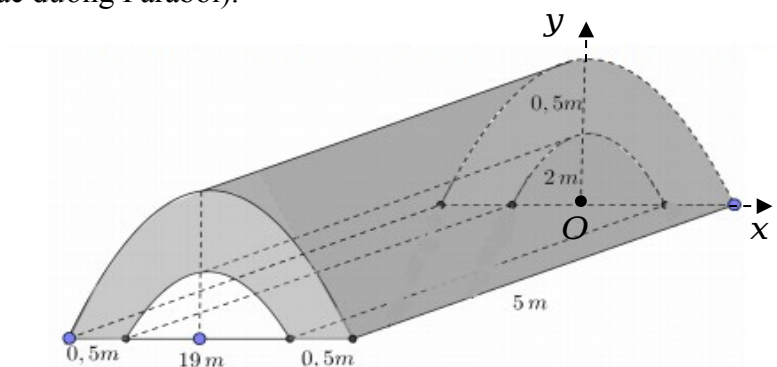
Ta có: $V = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$. Mà $V = 2V_1 \Rightarrow V_1 = 4\pi$.

Gọi K là hình chiếu của M trên $Ox \Rightarrow OK = a, KH = 4 - a, MK = \sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK, MHK , hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là

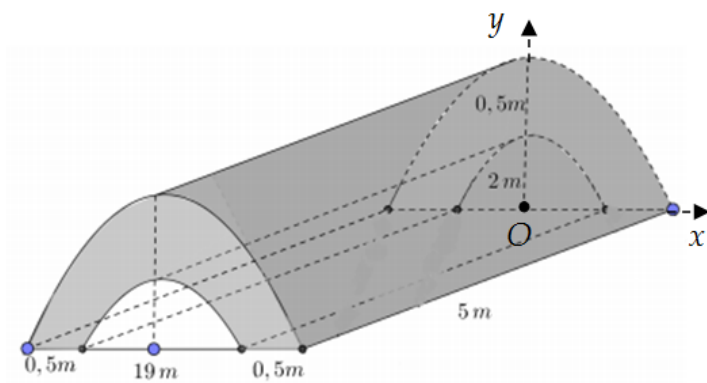
$OH = 4$ nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 \cdot (\sqrt{a})^2 = \frac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a = 3$.

Câu 21. (THPT Cẩm Giàng 2 - 2019) Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a_1 \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$$

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a_2 \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$$

Ta có thể tích của bê tông là:
$$V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right) dx \right] = 40 \text{ m}^3$$

Câu 22. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

Lời giải

Giả sử nền trại là hình chữ nhật ABCD có AB = 3 mét, BC = 6 mét, đỉnh của parabol là I. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B và I, phương trình của parabol có

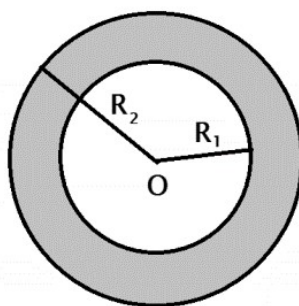
dạng $y = ax^2 + b, a \neq 0$. Do I, A, B thuộc nên ta có
$$y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$$

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

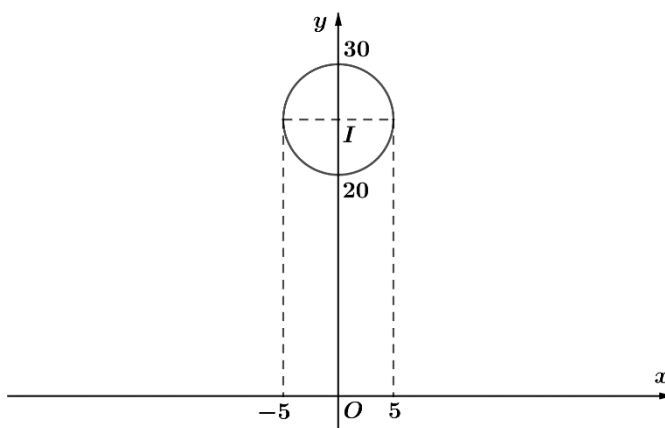
$$V = 6.2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{3}x^2 + 3\right) dx = 36$$

Câu 23. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Săm lốp xe ô tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20 \text{ cm}$, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30 \text{ cm}$ và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng

nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ sấm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong sấm. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải



Thể tích sấm xe bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình tròn tâm $I(0; 25)$ bán kính bằng 5 quay quanh trục Ox .

$$x^2 + (y - 25)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 25 + \sqrt{25 - x^2} \\ y = 25 - \sqrt{25 - x^2} \end{cases}, x \in [-5; 5]$$

Ta có phương trình đường tròn là

$$V = \pi \cdot \left[\int_{-5}^5 (25 + \sqrt{25 - x^2})^2 dx - \int_{-5}^5 (25 - \sqrt{25 - x^2})^2 dx \right] = 100\pi \cdot \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$$

Vậy

$$\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$$

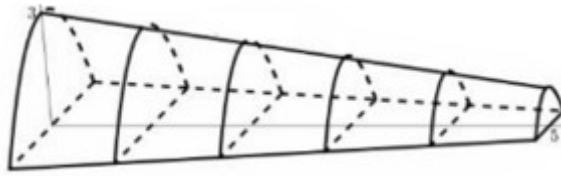
Ta có $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$ là diện tích nửa hình tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính bằng 5

$$\Rightarrow \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25\pi}{2}$$

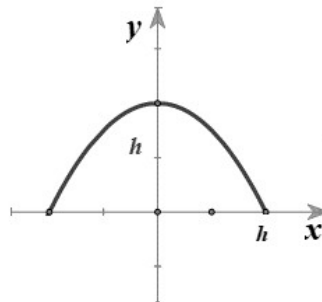
$$V = 100\pi \cdot \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = 100\pi \cdot \frac{25\pi}{2} = 1250\pi^2 \text{ cm}^3 \approx 12337 \text{ cm}^3$$

Suy ra

Câu 24. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Cho một mô hình 3- D mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5(cm); khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

Parabol (P) có phương trình $(P): y = ax^2 + h, (a < 0)$

Có $B(h, 0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h} \text{ (do } h > 0 \text{)}$

Diện tích S của thiết diện: $S = \int_{-h}^h \left(-\frac{1}{h}x^2 + h \right) dx = \frac{4h^2}{3}, h = 3 - \frac{2}{5}x$

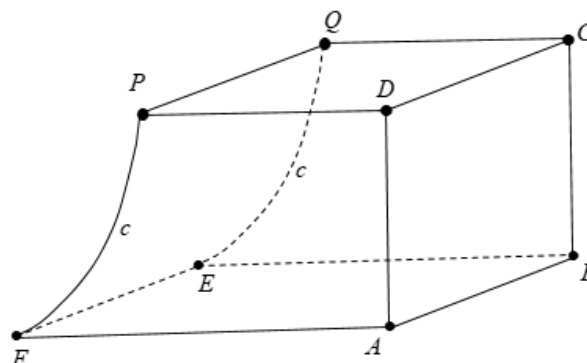
$$\Rightarrow S(x) = \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2$$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$$\Rightarrow V = \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2 dx \approx 28,888$$

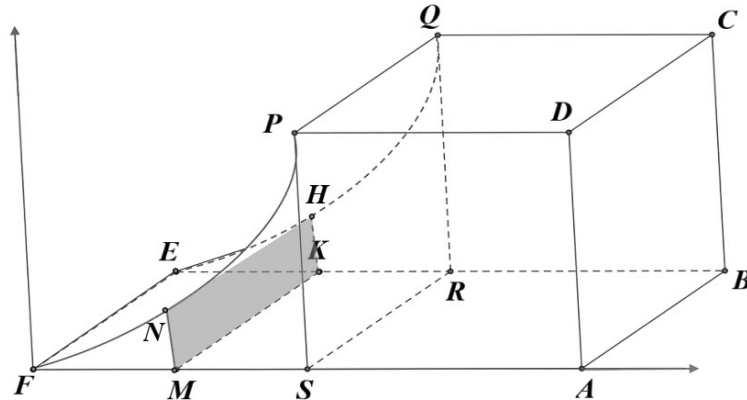
$$\Rightarrow V \approx 29 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 25. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5\text{ cm}$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5\text{ cm}$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF . Tính thể tích của chi tiết máy. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải



Gọi hình chiếu của P, Q trên AF và BE là R và S . Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5\text{ cm}$, thể tích $V_1 = \frac{125}{8}\text{ cm}^3$ và phần còn lại có thể tích V_2 . Khi đó thể tích vật thể $V = V_1 + V_2 = \frac{125}{8} + V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F , Ox trùng với FA , Oy trùng với tia Fy song song với AD . Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P\left(1; \frac{5}{2}\right)$ do đó $a = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x; 0; 0), 0 \leq x \leq 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNKH$ có cạnh là $MN = \frac{5}{2}x^2$ và $MK = \frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x) = \frac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2 = \int_0^1 \frac{25}{4}x^2 dx = \frac{25}{12}$

Từ đó $V = \frac{125}{8} + \frac{25}{12} = \frac{425}{24}\text{ cm}^3 \approx 18\text{ cm}^3$

Câu 26. (THPT Lục Ngạn 2018) Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm , trục nhỏ 25 cm . Biết cứ 1000 cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền (nghìn đồng) từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

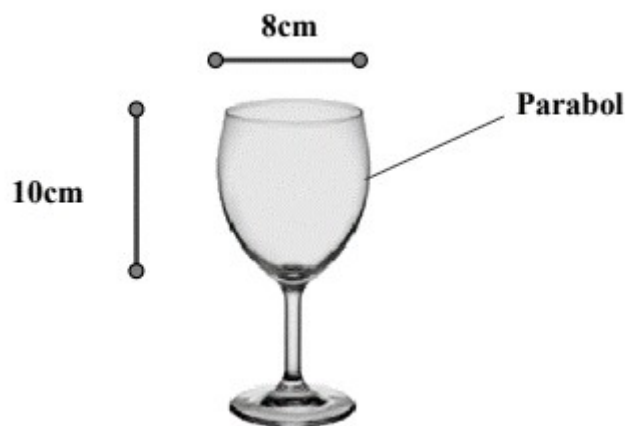
Lời giải

Đường elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm có phương trình $\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1$
 $\Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm \frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}$

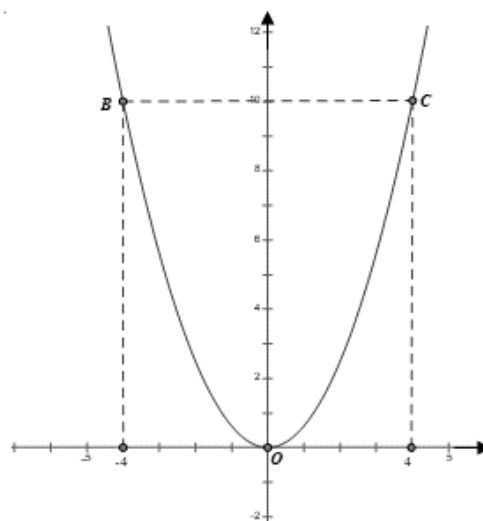
Do đó thể tích quả dưa là $V = \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \int_{-14}^{14} \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) dx$
 $= \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 14^2}\right) \Big|_{-14}^{14} = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{56}{3} = \frac{8750\pi}{3} \text{ cm}^3$

Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183$ nghìn đồng

Câu 27. (THPT Thực Hành - TPHCM - 2018) Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bỏ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải

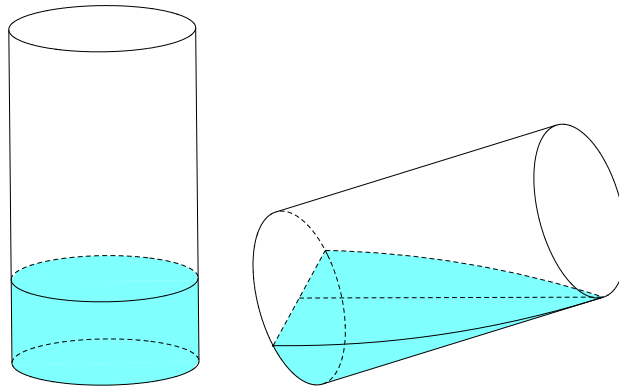


Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

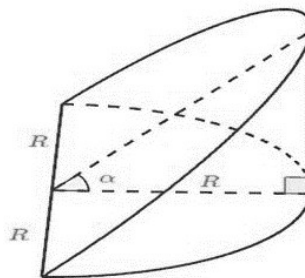
Thể tích tối đa cốc:

$$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) dy \approx 251$$

Câu 28. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018) Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



Lời giải



Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha$$

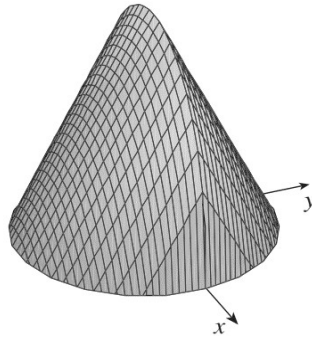
$$V = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$

Thể tích hình cái nôm là:

$$V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$

$$\Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = 240 \text{ cm}^3$$

Câu 29. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu -- 2018) Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó (làm tròn kết quả đến chữ số phần trăm)



- A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = 3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \pi$.

Lời giải

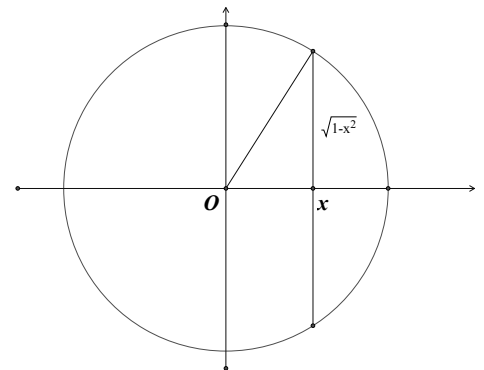
Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O .

Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích tam giác thiết diện là: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = (1-x^2)\sqrt{3}$.

Thể tích khối cần tìm là:

$$V = 2 \int_0^1 S dx = 2 \int_0^1 \sqrt{3} (1-x^2) dx = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31$$



- Câu 30.** (THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh 2018) Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

Lời giải

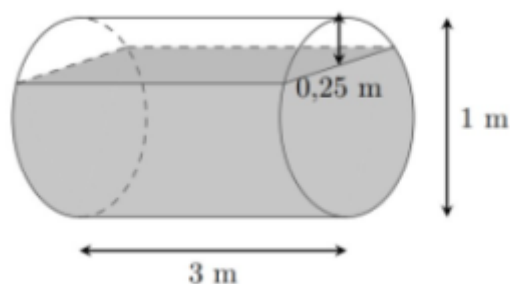
$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases}$. Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

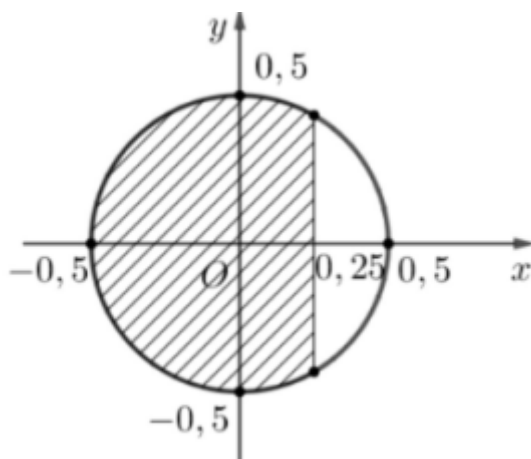
$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458 (m^3)$$

- Câu 31. (THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội – 2022)** Một téc nước hình trụ, đang chứa nước được đặt nằm ngang, có chiều dài $3m$ và đường kính đáy $1m$. Hiện tại mặt nước trong téc cách phía trên đỉnh của téc $0,25m$ (xem hình vẽ). Tính thể tích của nước trong téc (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?



Lời giải

Thể tích phần dầu còn lại sẽ bằng diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình nhân với chiều dài của bồn (chiều cao của trụ).

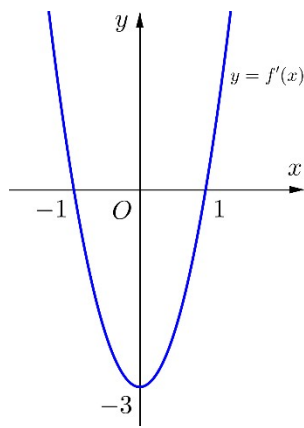


Đường tròn có tâm $O(0;0)$, $R=0,5$ có phương trình là $x^2 + y^2 = 0,25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{0,25 - x^2}$. Diện tích hình gạch sọc chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{0,25 - x^2}$; $y = -\sqrt{0,25 - x^2}$; $x = -0,5$; $x = 0,25$.

$$V = S.h = 3 \int_{-0,5}^{0,25} \left| \sqrt{0,25 - x^2} - \left(-\sqrt{0,25 - x^2} \right) \right| dx \approx 1,896m^3$$

Do đó

- Câu 32. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2022)** Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox . (làm tròn kết quả đến chữ số phần mười)



Lời giải

Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt là: $-1; 1$

$$\Rightarrow f'(x)=k(x+1)(x-1)$$

Mà $f'(0)=-3 \Leftrightarrow k.1.(-1)=-3 \Leftrightarrow k=3$. Do đó: $f'(x)=3(x+1)(x-1) \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$

$$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-3)dx=x^3-3x+C$$

Đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm, nghĩa là đường thẳng $(d): y=4$ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 âm.

$$\Rightarrow f'(x_0)=k_d \Leftrightarrow 3x_0^2-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ x_0=-1 \end{cases}. \text{ Vì } x_0 \text{ âm, nên } x_0=-1.$$

$$\text{Ta có: } f(x_0)=4 \Leftrightarrow (-1)^3-3(-1)+C=4 \Leftrightarrow C=2$$

$$\text{Do đó: } f(x)=x^3-3x+2. \text{ Xét: } f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{Hình phẳng } (H) \text{ được giới hạn bởi: } \begin{cases} y=f(x); y=0 \\ x=1; x=-2 \end{cases}$$

Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H quanh trục Ox là:

$$V=\pi \int_{-2}^1 f^2(x)dx=\frac{729}{35}\pi \approx 20,8$$

Câu 33. (Sở Nam Định 2023) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x)=x^3+3\int_0^1 x^4 f(x)dx$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục $Ox, x=0, x=1$ khi quay quanh trục Ox . (làm tròn kết quả đến chữ số phần trăm)

Lời giải

$$f(x)=x^3+3\int_0^1 x^4 f(x)dx$$

$$\text{Đặt } I = \int_0^2 x^4 f(x) dx \quad \text{khi đó } f(x) = x^3 + 3I$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 x^4 (x^3 + 3I) dx = \int_0^1 (x^7 + 3x^4 \cdot I) dx$$

$$= \int_0^1 x^8 dx + 3I \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^8}{8} \Big|_0^1 + 3I \left(\frac{x^5}{5} \Big|_0^1 \right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{8} + 3I \frac{1}{5} = \frac{3I}{5} + \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{2}{5} I = \frac{1}{8} \Rightarrow I = \frac{5}{16}$$

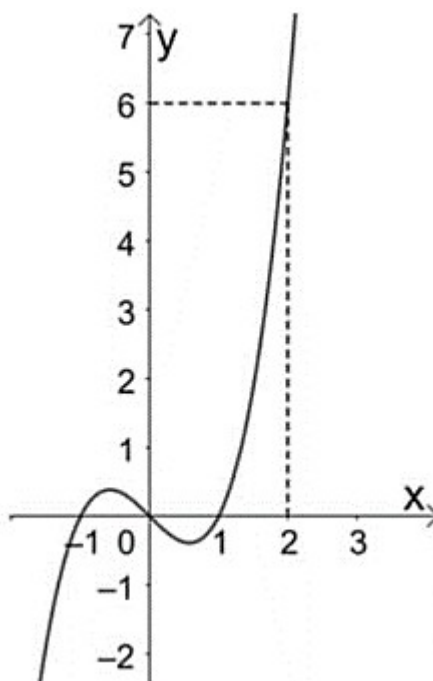
$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 3 \frac{5}{16} = x^3 + \frac{15}{16}$$

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \cdot \int_0^1 \left(x^3 + \frac{15}{16} \right)^2 dx = \frac{2671}{1792} \pi \approx 1,49$$

Thể tích khối tròn xoay là:

Câu 34. (Sở Nghệ An. Liên Trường THPT 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên

$\mathbb{R}$, biết rằng $f(0) = 0$ và hàm số $g(x) = \frac{1}{16} [xf''(x) + f'(x)]$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ.



Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số

$y = f(x), y = \frac{f''(x) - 40}{12}$ khi quay quanh trục Ox . (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} g(x) = a(x+1)(x-1)x \\ g(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow g(x) = x^3 - x$$

Với

$$g(x) = \frac{1}{16} [xf''(x) + f'(x)] = \frac{1}{16} [x.f'(x)]' = x^3 - x$$

$$\Rightarrow xf'(x) = 4x^4 - 8x^2 + c$$

Mà $g(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 8x \Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^2 + c_1$

Vì $f(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^2, f''(x) = 12x^2 - 8$

Ta có $y = \frac{f''(x) - 40}{12} = x^2 - 4$

Đặt $y_1 = x^4 - 4x^2, y_2 = x^2 - 4$

Khi đó $V = 2\pi \left[\int_0^1 (y_2^2 - y_1^2) dx + \int_1^2 (y_1^2 - y_2^2) dx \right] = 2\pi \cdot \frac{56}{3} \approx 117$

- Câu 35. (Sở Bắc Ninh 2023)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện $f(0) = -2, (x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{1 + f(x)}$, hai trục tọa độ và đường thẳng $x = 3$. Quay (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng V (đơn vị thể tích). Tính V . (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)
- Lời giải**

Ta có

$$\bullet \sqrt{x^2 + 1}f'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = -\sqrt{x^2 + 1} + C$$

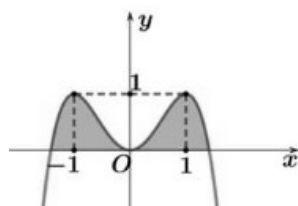
$$\bullet f(0) = -2 \Rightarrow -2 = -1 + C \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = -\sqrt{x^2 + 1} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow g(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$$

$$+V = \pi \int_0^3 g^2(x) dx = \pi \int_0^3 (x^2 + 1) dx = 12\pi \approx 38$$

- Câu 36. (Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2023)** Cho đồ thị hàm số trùng phương $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c, (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ như hình vẽ.



Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi miền tô đậm trong hình vẽ quanh trục Ox (làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm)

Lời giải

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^4 + 2x^2$$

Từ đồ thị, ta có:

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (-x^4 + 2x^2)^2 dx = \frac{256\sqrt{2}}{315} \pi \approx 1,15$$

Vậy thể tích khối tròn xoay là

Câu 37. (Sở Thái Bình 2024x) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và thỏa mãn hệ thức $2f(x) \cdot f'(x) - 3(x+1)^2 = (x^2 + x)f'(x) + (2x+1)f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ quanh trục Ox . (làm tròn kết quả đến chữ số phần mười)

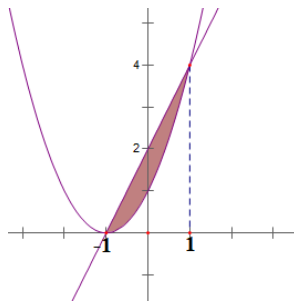
Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} 2f(x) \cdot f'(x) - 3(x+1)^2 &= (x^2 + x)f'(x) + (2x+1)f(x) \\ \Leftrightarrow (f^2(x))' - 3(x+1)^2 &= [(x^2 + x)f(x)]' \\ \Leftrightarrow [f^2(x) - (x+1)^3]' &= [(x^2 + x)f(x)]' \\ \Leftrightarrow f^2(x) - (x+1)^3 &= (x^2 + x)f(x) + C (*) \end{aligned}$$

Thay $x = 0$ vào (*) suy ra $1 - (0+1)^3 = C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f^2(x) - (x+1)^3 = (x^2 + x)f(x)$ (1)

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x + 1 \\ f(x) = -x - 1 \end{cases}; f(0) = 1 \Rightarrow f(x) = (x+1)^2.$$

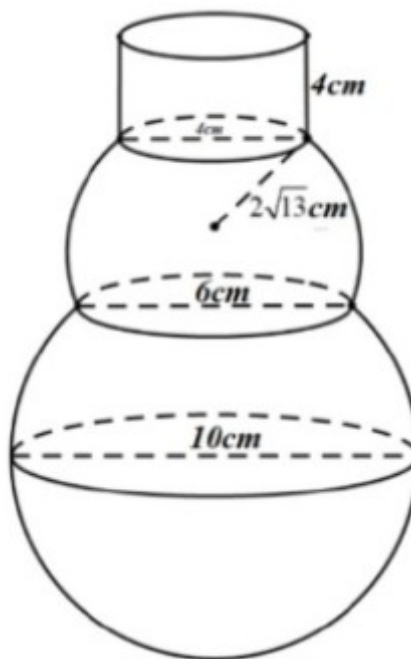


Xét $f'(x) = 2(x+1) \Rightarrow f(x) = f'(x) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

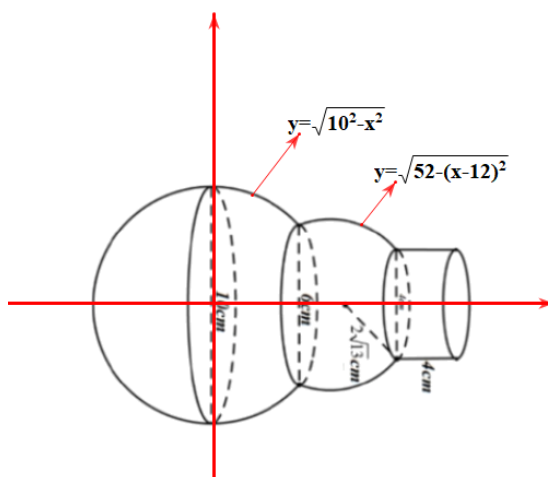
$$V = \pi \cdot \int_{-1}^1 [4(x+1)^2 - (x+1)^4] dx = \frac{64}{15} \pi \approx 13,4$$

Câu 38. (Sở Thanh Hóa 2024x) Bạn An là người có sở thích tái chế đồ cũ. Để tận dụng đồ dùng trong nhà bạn dùng hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 10 \text{ cm}$ và $r = 2\sqrt{13} \text{ cm}$ và một phần của mặt trụ để làm hồ lô đựng nước như hình vẽ dưới đây. Biết giao của hai mặt cầu là đường tròn có bán kính

$r_1 = 6\text{ cm}$ và cổ của hồ lô là một hình trụ có bán kính đáy bằng $r_2 = 4\text{ cm}$, chiều cao bằng 4 cm . Giả sử độ dày của hồ lô không đáng kể. Hồ lô đựng được tối đa V lít nước. Tính V . (làm tròn kết quả đến chữ số phần mười)

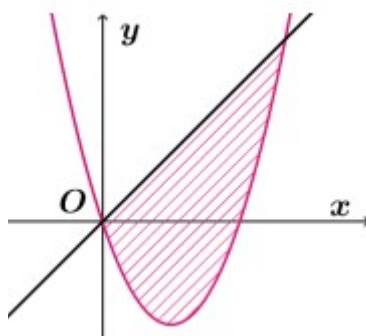


Lời giải



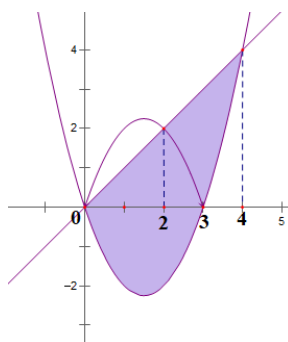
$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 + \pi \int_0^8 (10^2 - x^2) dx + \pi \int_8^{18} (52 - (x-12)^2) dx + 4\pi \cdot 4^2 = \frac{5360}{3} \pi \approx 5,6$$

Câu 39. (Sở Quảng Ninh 2024) Cho (H) là hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 3x$ và đường thẳng $y = x$ (tham khảo hình vẽ bên).



Thể tích khối tròn xoay được tạo bởi khi quay (H) quanh trục hoành là $\frac{a\pi}{b}$ với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của $18a - 300b$ bằng

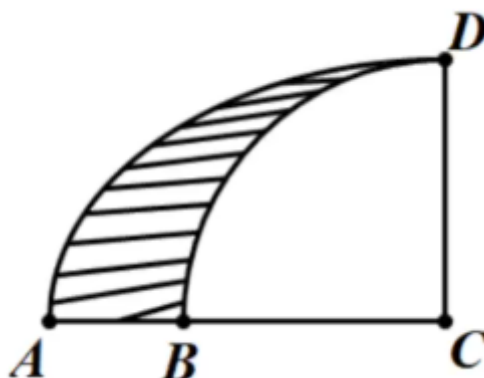
Lời giải



Ta có $x^2 - 3x = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Vậy
$$V_{0x} = \pi \left[\int_0^3 (x^2 - 3x)^2 dx + \int_3^4 x^2 dx - \int_0^3 |x^2 - 3x| dx - \int_3^4 (x^2 - 3x)^2 dx \right] = \frac{611}{30} \pi$$

Câu 40. (Sở Nghệ An 2024) Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay khi quay miền (H) (phần gạch sọc trong hình vẽ bên dưới)



quanh trục AC . Biết rằng $AC = 10\text{ cm}, BC = 6\text{ cm}$, miền (H) được giới hạn bởi đoạn thẳng AB , cung tròn BD có tâm C , đường cong elip AD có trục AC và CD . Tính thể tích của vật trang trí bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Cho elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

Ta chứng minh được thể tích của elip khi quay quanh trục Ox bằng:

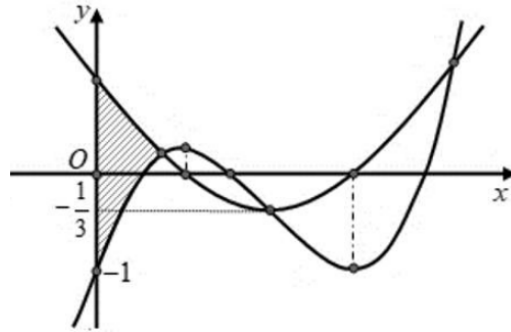
$$V = \pi \int_{-a}^a \left(b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^2 dx = \frac{4}{3} \pi ab^2$$

Xét đường cong ADC khi quay quanh trục AC có thể tích là $V_e = \frac{2}{3}\pi \cdot 10 \cdot 6^2$

Xét đường cong BDC khi quay quanh trục AC có thể tích là $V_c = \frac{2}{3}\pi \cdot 6^3$

Vậy thể tích cần tìm là $V = V_e - V_c = 96\pi \approx 283$

Câu 41. (Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi 2024) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$; $g(x) = mx^2 + nx + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Biết rằng $f''(2) = 0$ và hai đồ thị hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ quay quanh trục Ox (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Xét $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$.

Theo bài ra $f''(2) = 0 \Rightarrow b = -6a$.

Phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax^3 + (b - m)x^2 + (c - n)x - 2 = 0$.

Ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow \frac{m - b}{a} = 7 \Rightarrow m = a$ do $(b = -6a)$

Ta thấy 2 điểm cực trị của $y = f(x)$ là 2 nghiệm của phương trình $g(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3g(x)$.
 $\Rightarrow 2b = 3n \Rightarrow -12a = 3n \Rightarrow n = -4a$.

Ta có $c = 3 \Rightarrow g(x) = ax^2 - 4ax + 1$.

Mà $y = g(x)$ có tung độ đỉnh bằng $-\frac{1}{3} \Rightarrow g(2) = -\frac{1}{3} \Rightarrow 4a - 8a + 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

Do đó ta có
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\ g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \end{cases}$$

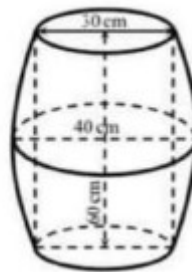
Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} = x_1 \end{cases}.$$

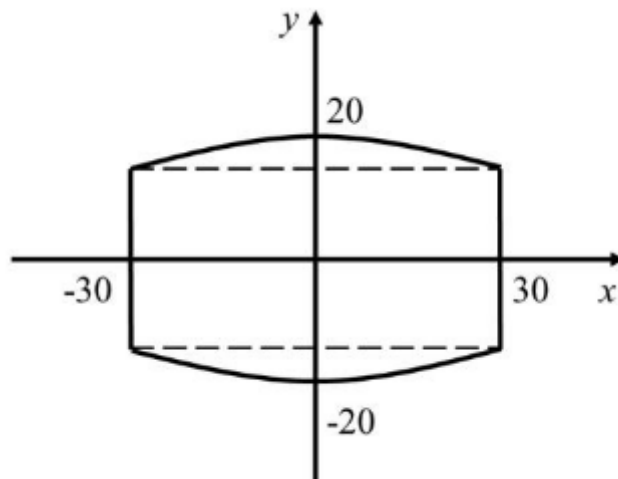
Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ quay quanh trục Ox

$$V = \pi \left| \int_0^{x_1} \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \right)^2 - \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \right)^2 \right] dx \right| \approx 0.86$$

Câu 42. (Sở Bắc Ninh 2024) Một thùng đựng bia hơi (có dạng khối tròn xoay như hình vẽ) có đường kính đáy là 30 cm , đường kính lớn nhất của thân thùng là 40 cm , chiều cao thùng là 60 cm , các cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Tính thể tích của thùng bia hơi? (giả sử độ dày thùng bia không đáng kể và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải



Đặt thùng nằm ngang và ghép trục như hình:

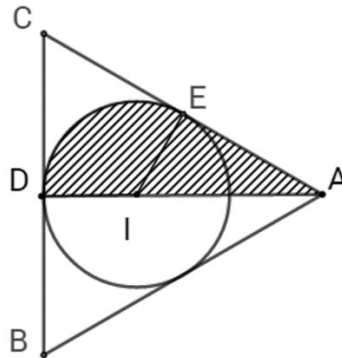
Parabol phía trên Ox đi qua $(-30; 15)$, $(30; 15)$ và $(0; 20)$ nên phương trình có dạng:

$$y = \frac{-x^2}{180} + 20$$

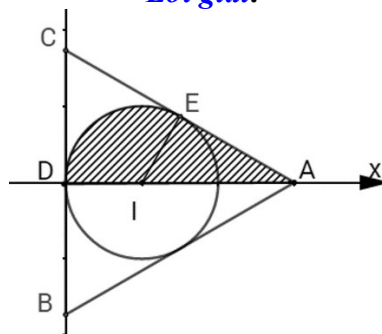
Thể tích thùng giới hạn bởi các đường $y = \frac{-x^2}{180} + 20$, $y = 0$ và $x = -30$, $x = 30$ ta được:

$$V = \pi \int_{-30}^{30} \left(\frac{-x^2}{180} + 20 \right)^2 dx = 20300\pi (\text{cm}^3) \approx 64 (\text{dm}^3)$$

Câu 43. (THPT Kim Liên - Hà Nội 2024) Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ bên) quanh trục AD . Miền (R) được giới hạn bởi cạnh AC , đường cao AD của tam giác đều ABC có cạnh bằng $20\sqrt{3}$ cm và cung nhỏ $\widehat{DE}$ của đường tròn nội tiếp tam giác ABC (E là trung điểm của đoạn thẳng AC). Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Lời giải:



Chọn trục Ox chứa DA và $D \equiv O(0;0)$.

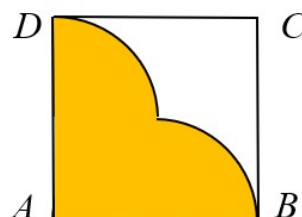
Khi đó $C(0;10\sqrt{3})$ và $A(30;0)$ với $E(15;5\sqrt{3})$ là trung điểm của AC .

Khi đó đường tròn nội tiếp tam giác ABC có phương trình là $(x-10)^2 + y^2 = 100$ và đường thẳng AC có phương trình là $x + \sqrt{3}y - 30 = 0$.

Khi đó, thể tích vật thể trang trí là

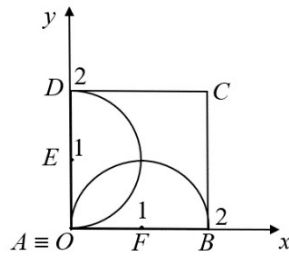
$$V = \pi \int_0^{15} (20x - x^2) dx + \pi \int_{15}^{30} \left(\frac{30-x}{\sqrt{3}} \right)^2 dx = 1500\pi \approx 4712,4 \text{ cm}^3$$

Câu 44. (THPT Bình Sơn - Quảng Ngãi 2024) Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần được tô màu trong hình vẽ bên) quanh trục AB . Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB , AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng $1m$ với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD , AB .



Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải



Chọn trục Ox chứa điểm B , trục Oy chứa điểm D , và gốc tọa độ O trùng điểm A (như hình vẽ).

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, AB . Khi đó $E(0;1), F(1;0)$.

*Phương trình đường tròn có tâm $E(0;1)$ và đường kính $AD=2$ là: $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm E là: $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$

*Phương trình đường tròn có tâm $F(1;0)$ và đường kính $AB=2$ là: $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm F là: $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$

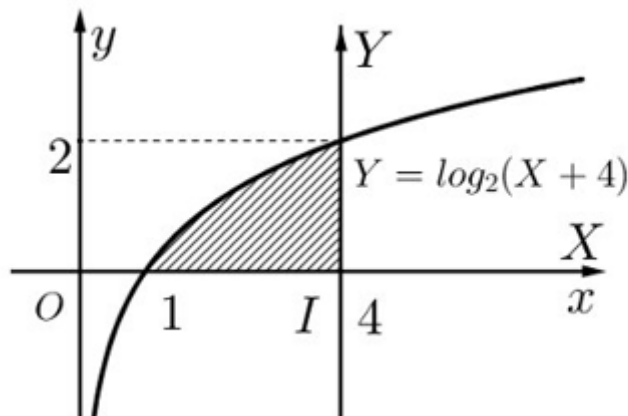
Vậy, thể tích vật trang trí là:

$$V = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1-x^2})^2 \cdot dx + \pi \int_1^2 (1 - (x-1)^2) \cdot dx \approx 12,3 \text{ (m}^3\text{)}$$

Câu 45. (Sở Tiền Giang 2024) Khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \log_2 x, y = 0$ và $x = 4$ xung quanh đường thẳng $x = 4$ thu được khối tròn xoay có thể tích gần nhất với giá trị nào sau đây? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Đời hệ trục O_{xy} thành hệ trục I_{XY} với gốc tọa độ $I(4;0)$ như hình vẽ.



Công thức đổi trục $\begin{cases} x = X + 4 \\ y = Y \end{cases}$.

Trong hệ trục I_{XY} , các đường $y = \log_2 x, y = 0$ và $x = 4$ lần lượt trở thành các đường $Y = \log_2(X+4), Y = 0, X = 0$.

Bài toán trở thành tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $Y = \log_2(X + 4), Y = 0, X = 0$ quanh trục tung.

Ta có $Y = \log_2(X + 4) \Rightarrow X = 2^Y - 4$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là

$$V = \pi \int_0^2 (2^Y - 4)^2 dY = \pi \int_0^2 (2^{2Y} - 8 \cdot 2^Y + 16) dY = \pi \left(\frac{2^{2Y}}{2 \ln 2} - \frac{8 \cdot 2^Y}{\ln 2} + 16Y \right) \Bigg|_0^2 \approx 26$$