

ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong chương trình toán học THPT các bài toán liên quan đến dãy số là một phần quan trọng của đại số và giải tích lớp 11, Học sinh thường phải đối mặt với nhiều dạng toán khó liên quan đến vấn đề này và gặp khó khăn trong vấn đề xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số. Đặc biệt ở một số lớp bài toán khi đã xác định được công thức tổng quát của dãy số thì nội dung của bài toán gần như được giải quyết

Để đáp ứng được một phần đề tài “ **Xác định công thức tổng quát của dãy số** “ và kết hợp với sự tiếp cận “ **Lý thuyết phương trình sai phân** “ qua một số chuyên đề mà bản thân tác giả đã được học

Nội dung của đề tài nhằm cung cấp một số phương pháp cơ bản xác định công thức tổng quát của dãy số và có sự phân loại ở một số lớp bài toán. Đây cũng là đề tài và bài giảng mà tác giả đã dạy cho học sinh, đặc biệt là học sinh khá giỏi và lớp chọn, là tài liệu học sinh và đồng nghiệp tham khảo

Trong đề tài này tác giả đã sử dụng một số kết quả có tính hệ thống của “ **Lý thuyết phương trình sai phân** “. Tuy nhiên những vấn đề áp dụng kiến thức toán học hiện đại chỉ dừng lại ở một số trường hợp đặc biệt và giới hạn trong trường số thực.

Giới hạn của đề tài chỉ dừng lại ở việc xác định công thức tổng quát của một số dãy số, từ đó có áp dụng vào một số bài toán cụ thể. Qua đó, người đọc có thể trang bị thêm cho mình phương pháp xác định công thức tổng quát của dãy số. Đặc biệt các thầy cô có thể tự kiểm tra kết quả và xây dựng cho mình một lớp các bài toán về dãy số được trình bày trong đề tài

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ VÀ XÂY DỰNG BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ

A. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP MỘT

Phương trình sai phân tuyến tính cấp một là phương trình sai phân dạng

$$u_1 = \alpha, \quad a.u_{n+1} + b.u_n = f_n, \quad n \in N^*$$

trong đó a, b, α là các hằng số, $a \neq 0$ và f_n là biểu thức của n cho trước

Dạng 1

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, \quad a.u_{n+1} + b.u_n = 0 \quad (1.1)$$

trong đó a, b, α cho trước $n \in N^*$

Phương pháp giải

Giải phương trình đặc trưng $a.\lambda + b = 0$ để tìm λ Khi đó $u_n = q\lambda^n$ (q là hằng số), trong đó q được xác định khi biết $u_1 = \alpha$

Bài toán 1: Xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết số hạng đầu tiên bằng 1 và công bội bằng 2

Bài giải Ta có

$$u_{n+1} = 2u_n, \quad u_1 = 1 \quad (1.2)$$

Phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda = 2$ Vậy $u_n = c.2^n$. Từ $u_1 = 1$ suy ra $c = \frac{1}{2}$ Do đó $u_n = 2^{n-1}$

Dạng 2

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, \quad a.u_{n+1} + b.u_n = f_n, \quad n \in N^* \quad (2.1)$$

trong đó f_n là đa thức theo n

Phương pháp giải

Giải phương trình đặc trưng $a.\lambda + b = 0$ ta tìm được λ Ta có $u_n = u_n^0 + u_n^*$ Trong đó u_n^0 là nghiệm của phương trình thuần nhất (1.1) và u_n^* là nghiệm riêng tùy ý của phương trình không thuần nhất (2.1) Vậy $u_n^0 = q.\lambda^n$ q là hằng số sẽ được xác định sau

Ta xác định u_n^* như sau :

- 1) Nếu $\lambda \neq 1$ thì u_n^* là đa thức cùng bậc với f_n
- 2) Nếu $\lambda = 1$ thì $u_n^* = n.g_n$ với g_n là đa thức cùng bậc với f_n

Thay u_n^* vào phương trình, đồng nhất các hệ số ta tính được các hệ số của u_n^*

Bài toán 2: Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = 2; u_{n+1} = u_n + 2n, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (2.2)$$

Bài giải Phương trình đặc trưng $\lambda - 1 = 0$ có nghiệm $\lambda = 1$ Ta có

$u_n = u_n^0 + u_n^*$ trong đó $u_n^0 = c.1^n = c$, $u_n^* = n(an + b)$ Thay u_n^* và phương trình (2.2) ta được

$$(n+1)[a(n+1)+b] = n(an+b) + 2n \quad (2.3)$$

thay $n=1$ và $n=2$ vào (2.3) ta được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ 5a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Do đó $u_n = n(n-1)$

Ta có $u_n = u_n^0 + u_n^* = c + n(n-1)$ Vì $u_1 = 2$ nên $2 = c + 1(1-1) \Leftrightarrow c = 2$

Vậy $u_n = 2 + n(n-1)$, hay $u_n = n^2 - n + 2$

Dạng 3

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, \quad a.u_{n+1} + bu_n = v.\mu_n, \quad n \in N^* \quad (3.1)$$

trong đó f_n là đa thức theo n

Phương pháp giải

Giải phương trình đặc trưng $a.\lambda + b = 0$ ta tìm được λ Ta có $u_n = u_n^0 + u_n^*$ Trong đó $u_n^0 = c.\lambda^n$, c là hằng số chưa được xác định, u_n^* được xác định như sau :

- 1) Nếu $\lambda \neq \mu$ thì $u_n^* = A.\mu^n$
- 2) Nếu $\lambda = \mu$ thì $u_n^* = A.n.\mu^n$

Thay u_n^* vào phương trình (3.1) đồng nhất các hệ số ta tính được các hệ số của u_n^* . Biết u_1 , từ hệ thức $u_n = u_n^0 + u_n^*$, tính được c

Bài toán 3: Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = 1; \quad u_{n+1} = 3.u_n + 2^n, \quad n \in N^* \quad (3.2)$$

Bài giải Phương trình đặc trưng $\lambda - 3 = 0$ có nghiệm $\lambda = 3$ Ta có

$$u_n = u_n^0 + u_n^* \text{ trong đó } u_n^0 = c.3^n, \quad u_n^* = a.2^n$$

Thay $u_n^* = a.2^n$ vào phương trình (3.2), ta thu được

$$a.2^{n+1} = 3a.2^n + 2^n \Leftrightarrow 2a = 3a + 1 \Leftrightarrow a = -1$$

Suy ra $u_n = -2^n$ Do đó $u_n = c.3^n - 2^n$ vì $u_1 = 1$ nên c=1 Vậy $u_n = 3^n - 2^n$

Dạng 4

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, \quad a.u_{n+1} + bu_n = f_{1n} + f_{2n}, \quad n \in N^* \quad (4.1)$$

Trong đó f_{1n} là đa thức theo n và $f_{2n} = v.\mu^n$

Phương pháp giải

Ta có $u_n = u_n^0 + u_{1n}^* + u_{2n}^*$ Trong đó u_n^0 là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $au_{n+1} + bu_n = 0$, u_n^* là một nghiệm riêng của phương trình

không thuần nhất $a.u_{n+1} + b.u_n = f_{1n}$, u_{2n}^* là nghiệm riêng bất kỳ của phương trình không thuần nhất $a.u_{n+1} + b.u_n = f_{2n}$

Bài toán 4: Tìm u_n thỏa mãn điều kiện

$$u_1 = 1; u_{n+1} = 2u_n + n^2 + 3.2^n, \quad n \in N^* \quad (4.2)$$

Bài giải Phương trình đặc trưng $\lambda - 2 = 0$ có nghiệm $\lambda = 2$ Ta có

$$u_n = u_n^0 + u_{1n}^* + u_{2n}^* \text{ trong đó } u_n^0 = c.2^n, u_n^* = a.n^2 + b.n + c, u_{2n}^* = A.n.2^n$$

Thay u_n^* vào phương trình $u_{n+1} = 2u_n + n^2$, ta được

$$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2an^2 + 2bn + 2c + n^2$$

Cho $n=1$, $n=2$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ a - b - c = 4 \\ 2a + 2b + c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

Vậy $u_{1n}^* = -n^2 - 2n - 3$ thay u_{2n}^* vào phương trình $u_{n+1} = 2u_n + 3.2^n$ Ta được

$$A(n+1)2^{n+1} = 2An.2^n + 3.2^n \Leftrightarrow 2A(n+1) = 2An + 3 \Leftrightarrow A = \frac{3}{2}$$

Vậy

$$u_{2n}^* = \frac{3}{2}n.2^n = 3n.2^{n-1}$$

Do đó $u_n = c.2^n + (-n^2 - 2n - 3) + 3n.2^{n-1}$. Ta có $u_1 = 1$ nên

$$1 = 2c - 2 + 3 \Leftrightarrow c = 0 \text{ Vậy } u_n = 3n.2^{n-1} - n^2 - 2n - 3$$

B. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI

Phương trình sai phân tuyến tính cấp một là phương trình sai phân dạng

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, a.u_{n+1} + bu_n + c.u_{n-1} = f_n, \quad n \in N^*$$

trong đó a, b, c, α, β là các hằng số, $a \neq 0$ và f_n là biểu thức của n cho trước

(NX: Phương trình đặc trưng của phương trình sai phân tuyến tính cấp hai luôn có hai nghiệm kể cả nghiệm phức, song nội dung của đề tài chỉ dừng lại trong trường số thực, tức là chỉ xét nghiệm thực)

Dạng 1

Tìm u_n thỏa mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0, n \in \mathbb{N}^* \quad (5.1)$$

Phương pháp giải

Giải phương trình đặc trưng $a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$ tìm λ Khi đó

- 1) Nếu λ_1, λ_2 là hai nghiệm thực khác nhau thì $u_n = A.\lambda_1^n + B.\lambda_2^n$, trong đó A và B được xác định khi biết u_1, u_2
- 2) Nếu λ_1, λ_2 là hai nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ thì $u_n = (A + Bn).\lambda^n$, trong đó A và B được xác định khi biết u_1, u_2

Bài toán 5: Tìm u_n thỏa mãn điều kiện sau

$$u_0 = 1, u_1 = 16, u_{n+2} = 8.u_{n+1} - 16.u_n \quad (5.1)$$

Bài giải Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ có nghiệm kép $\lambda = 4$

Ta có

$$u_n = (A + Bn).4^n \quad (5.2)$$

Cho $n=0, n=1$ thay vào (5.2) ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u_0 = 1 = A \\ u_1 = (1 + B).4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}$$

Vậy $u_n = (1 + 3n).4^n$

Dạng 2

Tìm u_n thỏa mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, a.u_{n+1} + b.u_n + c.u_{n-1} = f_n, n \geq 2, \quad (6.1)$$

trong đó $a \neq 0$, f_n là đa thức theo n cho trước

Phương pháp giải

Giải phương trình đặc trưng $a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$ để tìm λ . Khi đó ta có $u_n = u_n^0 + u_n^*$, trong đó u_n^0 là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $a.u_{n+1} + b.u_n + c.u_{n-1} = 0$ và u_n^* là một nghiệm tùy ý của phương trình

$$a.u_{n+1} + b.u_n + c.u_{n-1} = f_n$$

Theo dạng 1 ta tìm được u_n^0 , trong đó hệ số A, B chưa được xác định, u_n^* được xác định như sau :

- 1) Nếu $\lambda \neq 1$ thì u_n^* là đa thức cùng bậc với f_n
- 2) Nếu $\lambda = 1$ là nghiệm đơn thì $u_n^* = n.g_n$, g_n là đa thức cùng bậc với f_n
- 3) Nếu $\lambda = 1$ là nghiệm kép thì $u_n^* = n^2.g_n$, g_n là đa thức cùng bậc với f_n ,

Thay u_n^* vào phương trình, đồng nhất các hệ số, tính được các hệ số của u_n^* .

Biết u_1, u_2 từ hệ thức $u_n = u_n^0 + u_n^*$ tính được A, B

Bài toán 6: Tìm u_n thỏa mãn điều kiện

$$u_1 = 1; u_2 = 0, u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = n + 1, n \geq 2 \quad (6.2)$$

Bài giải Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ có nghiệm kép $\lambda = 1$ Ta có $u_n = u_n^0 + u_n^*$ trong đó $u_n^0 = (A + B.n).1^n = A + Bn$, $u_n^* = n^2(a.n + b)$

Thay u_n^* vào phương trình (6,2), ta được

$$(n+1)^2 [a(n+1) + b] - 2n^2(a.n + b) + (n-1)^2 [a(n-1) + b] = n + 1$$

Cho $n=1$, $n=2$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 4(2a+b) - 2(a+b) = 2 \\ 9(3a+b) - 8(2a+b) + (a+b) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy
$$u_n^* = n^2 \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{2} \right)$$

Do đó

$$u_n = u_n^0 + u_n^* = A + Bn + n^2 \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{2} \right)$$

Mặt khác

$$\begin{cases} A + B + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1 \\ A + 2B + 4 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy

$$u_n = 4 - \frac{11}{3}n + n^2 \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{2} \right)$$

Dạng 3

Tìm u_n thỏa mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = d \cdot \mu^n, n \geq 2 \quad (7.1)$$

Phương pháp giải

Giải phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ để tìm λ Khi đó ta có $u_n = u_n^0 + u_n^*$, trong đó u_n^0 được xác định như dạng 1 và hệ số A và B chưa được xác định, u_n^* được xác định như sau

- 1) Nếu $\lambda \neq \mu$ thì $u_n^* = k \cdot \mu^n$
- 2) Nếu $\lambda = \mu$ là nghiệm đơn thì $u_n^* = k \cdot n \mu^n$
- 3) Nếu $\lambda = \mu$ là nghiệm kép thì $u_n^* = k \cdot n^2 \mu^n$

Thay u_n^* vào phương trình, dùng phương pháp đồng nhất thức các hệ số sẽ tính được hệ số k. Biết u_1, u_2 từ hệ thức $u_n = u_n^0 + u_n^*$ tính được A, B

Bài toán 7: Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = 0; u_2 = 0, u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 3 \cdot 2^n, n \geq 2$$

Bài giải Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ có nghiệm kép $\lambda = 1$ Ta có $u_n = u_n^0 + u_n^*$ trong đó $u_n^0 = (A + B \cdot n) \cdot 1^n = A + Bn, u_n^* = k \cdot 2^n$

Thay u_n^* vào phương trình, ta được

$$k \cdot 2^{n+1} - 2k \cdot 2^n + k \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n \Leftrightarrow k = 6$$

Vậy $u_n^* = 6 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^{n+1}$. Do đó $u_n = u_n^0 + u_n^* = A + Bn + 3 \cdot 2^{n+1}$. (1) Thay

$u_1 = 1, u_2 = 0$ vào phương trình ta thu được

$$\begin{cases} 1 = A + B + 12 \\ 0 = A + 2B + 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -13 \end{cases}$$

Vậy

$$u_n = 2 - 13n + 3 \cdot 2^{n+1}$$

Dạng 4

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = f_n + g_n, n \geq 2 \quad (8.1)$$

trong đó $a \neq 0, f_n$ là đa thức theo n và $g_n = v \cdot \mu^n$

Phương pháp giải

Ta có $u_n = u_n^0 + u_{1n}^* + u_{2n}^*$ trong đó u_n^0 là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0$, u_{1n}^* là nghiệm riêng tùy ý của phương trình không thuần nhất $au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = f_n$, u_{2n}^* là nghiệm riêng tùy ý của phương trình không thuần nhất $au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = g_n$

Bài toán 8: (Đề thi OLYPIC 30 -4 Toán 11 Lần thứ VIII- 2002)

Tìm u_n thoả mãn điều kiện

$$u_1 = 0; u_2 = 0, u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = n + 2^n, n \geq 2 \quad (8.2)$$

Bài giải Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ có nghiệm $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$

Ta có

$$u_n = u_n^0 + u_{1n}^* + u_{2n}^*$$

trong đó

$$u_n^0 = A(-1)^n + B.3^n, u_{1n}^* = a + bn, u_{2n}^* = k.2^n$$

Thay u_{1n}^* vào phương trình $u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = n$, ta được

$$a(n+1) + b - 2(an+b) - 3[a(n-1)+b] = n \Leftrightarrow (4a+1)n - 4(a-b) = 0$$

Vậy

$$a = b = -\frac{1}{4}$$

Do đó

$$u_n^* = -\frac{1}{4}(n+1)$$

Thay u_{2n}^* vào phương trình $u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = 2^n$, ta được

$$k.2^{n+1} - 2.k.2^n = 3.k.2^{n-1} = 2^n \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

Do đó

$$u_{2n}^* = -\frac{2}{3}.2^n = -\frac{1}{3}.2^{n+1}$$

Vậy

$$u_n = u_n^0 + u_{1n}^* + u_{2n}^* = A(-1)^n + B.3^n - \frac{1}{4}(n+1) - \frac{1}{3}.2^{n+1} \quad (8.3)$$

Ta thay $u_1 = 1, u_2 = 0$ vào (8.3) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -A + 3B - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = 1 \\ A + 9B - \frac{3}{4} - \frac{8}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{61}{48} \\ B = \frac{25}{48} \end{cases}$$

Vậy

$$u_n = -\frac{61}{48} \cdot (-1)^n + \frac{25}{48} \cdot 3^n - \frac{1}{4} \cdot (n+1) - \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1}$$

C. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP BA

Phương trình sai phân tuyến tính cấp ba là phương trình sai phân dạng

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, u_3 = \gamma, a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n + d.u_{n-1} = f_n, n \geq 2 \quad (a.1)$$

trong đó $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ là các hằng số, $a \neq 0$ và f_n là biểu thức của n cho trước

(NX: Phương trình đặc trưng của phương trình sai phân tuyến tính cấp ba luôn có ba nghiệm kể cả nghiệm phức, song nội dung của đề tài chỉ dừng lại trong trường số thực, tức là chỉ xét nghiệm thực)

Phương pháp giải

Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính cấp ba có dạng $u_n = u_n^0 + u_n^*$, trong đó u_n^0 là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất, u_n^* là một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình đặc trưng

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (a.2)$$

1) Xác định công thức nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính cấp ba thuần nhất

a) Nếu (a.2) có ba nghiệm thực $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ phân biệt thì

$$u_n^0 = a_1 \cdot \lambda_1^n + a_2 \cdot \lambda_2^n + a_3 \cdot \lambda_3^n$$

b) Nếu (a.2) có một nghiệm thực bội 2 và một nghiệm đơn

($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$) thì

$$u_n^0 = (a_1 + a_2 n) \lambda_1^n + a_3 \cdot \lambda_3^n$$

c) Nếu (a.2) có một nghiệm thực bội 3 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) thì

$$u_n^0 = (a_1 + a_2 n + a_3 n^2) \lambda_1^n$$

2) Xác định nghiệm riêng u_n^* của phương trình (a.1)

- Xét f_n là đa thức của n ta có
 - a) Nếu $\lambda \neq 1$ thì u_n^* là đa thức cùng bậc với f_n
 - b) Nếu $\lambda = 1$ (nghiệm đơn) thì $u_n^* = n \cdot g_n$ g_n là đa thức cùng bậc với f_n
 - c) Nếu $\lambda = 1$ (bội 2) thì $u_n^* = n^2 \cdot g_n$ g_n là đa thức cùng bậc với f_n
 - d) Nếu $\lambda = 1$ (bội 3) thì $u_n^* = n^3 \cdot g_n$ g_n là đa thức cùng bậc với f_n
- Xét $f_n = v \cdot \mu^n$ ta có
 - a) Nếu $\lambda \neq \mu$ thì $u_n^* = k \cdot n \cdot \mu^n$
 - b) Nếu $\lambda = \mu$ (nghiệm đơn) thì $u_n^* = k \cdot \mu^n$
 - c) Nếu $\lambda = \mu$ (nghiệm bội s) thì $u_n^* = k \cdot n^s \cdot \mu^n$

Bài toán 9: Tìm dãy số a_n biết rằng

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 3, u_n = 7u_{n-1} - 11u_{n-2} + 5u_{n-3}, n \geq 4 \quad (9.1)$$

Bài giải Xét phương trình đặc trưng

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

có 3 nghiệm thực

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$$

Vậy $a_n = c_1 + c_2 n + c_3 5^n$

Cho $n=1, n=2, n=3$ và giải hệ phương trình tạo thành, ta được

$$c_1 = -\frac{1}{16}, c_2 = \frac{3}{4}, c_3 = \frac{1}{16}$$

Vậy $a_n = -\frac{1}{16} + \frac{3}{4}(n-1) + \frac{1}{16}.5^{n-1}$

D. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài toán 10: Cho dãy số a_n được xác định theo công thức sau

$$a_1 = 0; a_2 = 1, a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1, n \geq 2 \quad (10.1)$$

Chứng minh số $A = 4.a_n.a_{n+2} + 1$ là số chính phương

Bài giải Ta có

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1 \quad (10.2)$$

Trong (9.2) ta thay n bởi n-1, ta được

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \quad (10.3)$$

Trừ các vế của (10.1) cho (10.2) ta thu được

$$a_{n+1} - 3a_n + 3a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \quad (10.4)$$

Phương trình đặc trưng của (10.4) là

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

có nghiệm $\lambda = 1$ là nghiệm bội bậc ba

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (10.4) là

$$a_n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2) 1^n$$

Cho $n=0, n=1, n=2$ ta được

$$\begin{cases} 0 = c_1 \\ 1 = c_1 + c_2 + c_3 \\ 3 = c_1 + 2c_2 + 4c_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = c_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta thu được $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ và từ đó ta có

$$A = 4a_n.a_{n+2} + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

Điều này chứng tỏ A là một số chính phương

Bài toán 11: Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định theo công thức sau

$$x_1 = 7; x_2 = 50, x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} - 1975 \quad (n \geq 2) \quad (11.1)$$

Chứng minh rằng $x_{1996} \vdots 1997$

Bài giải Xét dãy số $\{y_n\}$ với $y_1 = 7, y_2 = 50$ và

$$y_{n+1} = 4y_n + 5y_{n-1} + 22 \quad (n \geq 2) \quad (11.2)$$

Dễ thấy $y_n \equiv x_n \pmod{1997}$. Do đó chỉ cần chứng minh

$$y_{1996} \equiv 0 \pmod{1997}$$

Đặt $z_n = 4y_n + 11$ suy ra $z_1 = 39, z_2 = 211$. Nhận xét rằng

$$z_{n+1} = 4y_{n+1} + 11 = 16y_n + 20y_{n-1} + 99 = 4z_n + 20y_{n-1} + 55 \quad (11.3)$$

Ta lại có

$$z_{n-1} = 4y_{n-1} + 11 \text{ suy ra } 20y_{n-1} = 5z_{n-1} - 55 \quad (11.4)$$

Thế (11.4) vào (11.3) ta được

$$z_{n+1} = 4z_n + 5z_{n-1}$$

Suy ra

$$z_{n+1} - 4z_n - 5z_{n-1} = 0 \quad (11.5)$$

Phương trình đặc trưng của (11.5) là

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \text{ có nghiệm } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

Nghiệm tổng quát của (11.1) là

$$z_n = (-1)^n \alpha + 5^n \beta$$

Ta có

$$\begin{cases} z_1 = -\alpha + 5\beta = 39 \\ z_2 = \alpha + 25\beta = 211 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{8}{3} \\ \beta = \frac{25}{3} \end{cases}$$

Do đó ta nhận được

$$z_n = \frac{8}{3} \cdot (-1)^n + \frac{25}{3} \cdot 5^n \quad (11.6)$$

Từ (11.6) ta suy ra

$$z_{1996} = \frac{8 + 25 \cdot 5^{1996}}{3}$$

Ta cần chứng minh

$$z_{1996} \equiv 11 \pmod{1997}$$

Do

$$\begin{cases} 5^{1996} - 1 \vdots 1997 \\ 5^{1996} - 1 \vdots 3 \end{cases}$$

Nên $5^{1996} - 1 \vdots 3 \cdot 1997$. Từ đó, ta có $5^{1996} = 3n \cdot 1997 + 1$, và khi đó

$$z_{1996} = \frac{8}{3} + \frac{25(3n \cdot 1997 + 1)}{3} = 25n \cdot 1997 + 11$$

Vậy $z_{1996} \equiv 11 \pmod{1997}$

E. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Xác định công thức của dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn các điều kiện sau

- 1) $x_1 = 11, x_{n+1} = 10x_n + 1 - 9n, \forall n \in \mathbb{N}$
- 2) $x_0 = 2, x_1 = -8, x_{n+2} = -8x_{n+1} + 9x_n$
- 3) $x_0 = 1, x_1 = 3, 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = -n^2 - 2n + 3$
- 4) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+1} - 4x_n + 4x_{n-1} = n^2 - 6n + 5$
- 5) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4$

Bài 2: Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} & n \in \mathbb{N} \quad (n \geq 3) \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng a_n là một số lẻ

Bài 3: Cho dãy số $\{b_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} b_n = 2.b_{n-1} + b_{n-2} \\ b_1 = 1, b_2 = 2 \end{cases} \quad n \in N \quad (n \geq 3)$$

Chứng minh rằng $b_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n, \forall n \in N$

Bài 4: Cho dãy số $\{u_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} u_{n+2} - 2.u_{n+1} + u_n = 2 \\ u_0 = 1, u_1 = 0 \end{cases} \quad n \in N \quad (n \geq 2)$$

Chứng minh rằng u_n là một số chính phương

Bài 5: (Tuyển tập đề thi Olympic 30 – 4 Toán 11 Lần thứ VIII – 2002 NXB giáo dục)

Cho dãy số $\{u_n\}$ thoả mãn như sau

$$\begin{cases} u_n \in Z^+, \forall n \in N \\ u_0 = 1, u_1 = 9 \\ u_n = 10.u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases} \quad \forall n \in N, n \geq 2$$

Chứng minh : $\forall k \in N, k \geq 1$

$$1) u_k^2 + u_{k-1}^2 - 10u_k.u_{k-1} = -8$$

$$2) 5.u_k - u_{k-1} : 4 \text{ và } 3.u_k^2 - 1 : 2$$

(: kí hiệu chia hết)

Bài 6: Cho dãy số $\{u_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}, \quad n \in N^*$$

Chứng minh rằng tồn tại các hằng số nguyên M sao cho các số $M + 4.a_{n+1}a_n$ đều là số chính phương

Bài 7: (Báo Toán Học và Tuổi Trẻ số 356)

Cho dãy số $\{u_i\}$ ($i=1,2,3,4,\dots$) được xác định bởi

$$a_1 = 1, a_2 = -1, a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}, n = 3, 4, \dots$$

Tính giá trị của biểu thức

$$A = 2.a_{2006}^2 + a_{2006}.a_{2007} + a_{2007}^2$$

Bài 8: Cho dãy số nguyên dương $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện

$$u_0 = 20, u_1 = 100, u_{n+2} = 4.u_{n+1} + 5.u_n + 20, n \in \mathbb{N}^*$$

Tìm số nguyên dương n bé nhất có tính chất

$$a_{n+h} - a_n : 1998, n \in \mathbb{N}$$

F. XÂY DỰNG BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ TRUY HỒI

Nhận xét : Nội dung của đề tài trên giúp bạn đọc tìm ra công thức tổng quát của một lớp dãy số có tính chất truy hồi một cách chính xác nhất, giúp các Thầy cô kiểm tra kết quả bài toán theo cách giải khác. Bên cạnh đó ta có thể tiến hành xây dựng thêm các bài toán mới về dãy số

Dưới đây là một số ví dụ “**xây dựng thêm các bài toán về dãy số có tính quy luật**” chỉ mang tính chất tham khảo. Tác giả mong muốn bạn đọc tìm hiểu và phát triển rộng hơn các bài toán khác về dãy số

Ví dụ 1: Xuất phát từ phương trình

$$(\lambda - 1)(\lambda + 9) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0 \quad (12.1)$$

phương trình (12.1) có thể được coi là phương trình đặc trưng của một dãy số có quy luật. Chẳng hạn dãy số u_n được xác định theo công thức sau

$$u_{n+2} + 8.u_{n+1} + 9.u_n = 0$$

có thể cho $u_0 = 2, u_1 = -8$. Ta có thể phát biểu thành các bài toán sau

Bài toán 1: Cho dãy số x_n xác định như sau

$$\begin{cases} x_{n+2} + 8.x_{n+1} + 9.x_n = 0 \\ x_0 = 2, x_1 = -8 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Xác định công thức của dãy số x_n

Bài toán 2: Cho dãy số x_n xác định như sau

$$\begin{cases} x_{n+2} + 8.x_{n+1} + 9.x_n = 0 \\ x_0 = 2, x_1 = -8 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Tính giá trị của biểu thức $A = x_{2006} - 5.x_{2007} + 4$

Ví dụ 2: Xuất phát từ phương trình

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (12.2)$$

phương trình (12.2) có thể được coi là phương trình đặc trưng của một dãy số có quy luật. Chẳng hạn dãy số u_n được xác định theo công thức sau

$$u_{n+2} - 2.u_{n+1} + u_n = 2$$

có thể cho $u_0 = 1, u_1 = 0$ khi đó vận dụng thuật toán trên xác định được công thức tổng quát của dãy số

$$x_n = (n - 1)^2$$

Ta có thể phát biểu thành các bài toán sau

Bài toán 1: Xác định công thức của dãy số x_n thoả mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2 \\ x_0 = 1, x_1 = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Bài toán 2: Cho dãy số x_n xác định như sau

$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2 \\ x_0 = 1, x_1 = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Chứng minh rằng x_n là một số chính phương

Bài toán 3: Cho dãy số x_n xác định như sau

$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2 \\ x_0 = 1, x_1 = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Xác định số tự nhiên n sao cho

$$x_{n+1} + x_n = 22685$$

KẾT LUẬN- KIẾN NGHỊ

Trải qua thực tiễn giảng dạy, nội dung các bài giảng liên quan đến đề tài và có sự tham gia góp ý của đồng nghiệp, vận dụng đề tài vào giảng dạy đã thu được một số kết quả nhất định sau :

- 1) Học sinh trung bình trở lên nắm vững được một số phương pháp và biết vận dụng ở dạng cơ bản xác định được công thức của dãy số
- 2) Một số đề thi học sinh giỏi, Học sinh lớp chọn có thể sử dụng phương pháp trình bày trong đề tài để giải bài toán
- 3) Là một phương pháp tham khảo cho học sinh và các thầy cô giáo
- 4) Qua nội dung đề tài, đồng nghiệp có thể xây dựng thêm các bài toán về dãy số

Xây dựng phương pháp giảng dạy theo quan điểm đổi mới là việc mà toàn xã hội và ngành đang quan tâm. Tuy nhiên, trong một số lớp bài toán

bậc THPT ta có thể sử dụng một số kết quả của toán học hiện đại để xây dựng phương pháp giải toán sơ cấp là một vấn đề ít được chú ý. Qua nội dung đề tài tác giả mong muốn có sự tìm hiểu sâu hơn về mối quan hệ giữa “**Toán học hiện đại**” và “**Phương pháp toán sơ cấp**”. Qua đó ta có thể tìm được phương pháp giải, xây dựng các lớp bài toán ở bậc THPT

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1) **Lê Đình Thịnh- Lê Đình Định** , *Phương pháp sai phân*. Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội 2004
- 2) *Tuyển tập đề thi OLYMPIC 30 – 4 Môn Toán Lần thứ V*, Nhà xuất bản Giáo Dục
- 3) *Tuyển tập đề thi OLYMPIC 30 – 4 Môn Toán Lần thứ VII-2002* , Nhà xuất bản Giáo Dục
- 4) *Tạp trí Toán Học và Tuổi Trẻ Số 356* , Nhà xuất bản Giáo Dục
- 5) **Trần Chí Hiếu Nguyễn Danh Phan** *Tuyển chọn các bài toán PTTH Đại số và giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo Dục
- 6) **Nguyễn Văn Mậu** , *Một số bài toán chọn lọc về dãy số* , Nhà xuất bản Giáo Dục - 2003