

Họ, tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

ĐỀ SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực trị là điểm $A(2; -2)$. Tính $a + 2b$.

- A. $a + 2b = 4$. B. $a + 2b = 2$. C. $a + 2b = -4$. D. $a + 2b = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-\infty; 1)$.

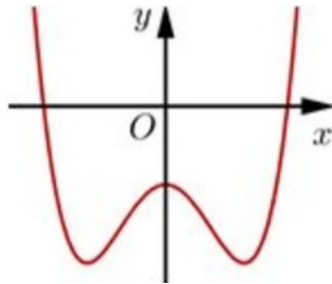
Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ trên đoạn $[-1; 3]$.

- A. 9 . B. 19 . C. 25 . D. 0 .

Câu 4: Tìm các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{7x+2}$.

- A. $y = \frac{3}{7}; x = \frac{-2}{7}$. B. $y = \frac{-3}{7}; x = \frac{-2}{7}$. C. $y = \frac{3}{7}; x = \frac{2}{7}$. D. $y = \frac{-1}{2}; x = \frac{-2}{7}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Xác định dấu của a, b, c .



- A. $a < 0, b < 0, c < 0$. B. $a > 0, b < 0, c < 0$. C. $a > 0, b > 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

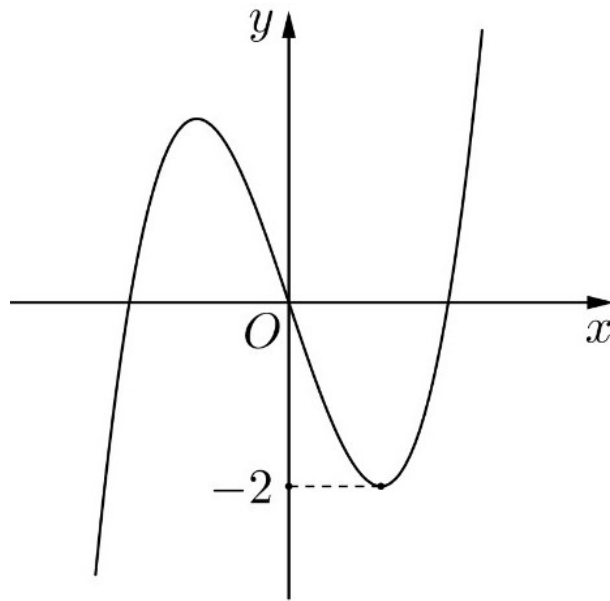
Câu 7: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây đúng

- A. $\vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$ B. $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$
C. $\vec{AO} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$ D. $\vec{AO} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$

Câu 8: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 3$ khi

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Phương trình $f(x^2) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



- A. 0 . B. 3 . C. 4 . D. 2 .

Câu 10: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; 2)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; 3)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^4 - m$ có ba điểm cực trị đều thuộc các trục tọa độ

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 1$.

Câu 12: Cho tứ diện đều ABCD, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(\angle AB, DM)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý I, II, III, IV ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{-1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$

- (I) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$
 (II) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
 (III) Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$
 (IV) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; +\infty)$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5}{x-1}$, khi đó:

- (I) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang
 (II) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$

(III) Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị nằm trên trục hoành

(IV) Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị là đỉnh parabol $y=x^2-2x+1$

Câu 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN

(I) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

(II) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

(III) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

(IV) $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Câu 4: Cho hàm số (C): $y=f(x)=\frac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$, khi đó:

(I) Giao điểm của Δ của trục Ox có hoành độ lớn hơn 2

(II) Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3; -9)$

(III) Gọi $A=\Delta \cap Ox$, $B=\Delta \cap Oy$ ta có $S_{OAB} > 3$

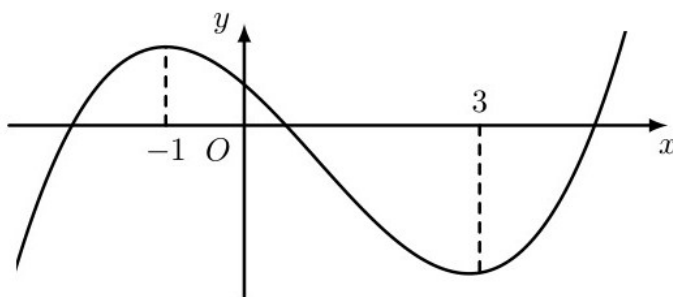
(IV) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $[0;3]$ là 4.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m+3)x-5+m$ đồng biến trên R

Câu 2: Cho tứ diện ABCD có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC=4BM$, $AC=3AP$, $BD=2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

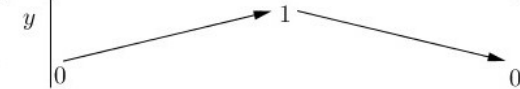


Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f((x-1)^2+m)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\frac{x+2m}{x+2}$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[1;3]}|f(x)| + \min_{[1;3]}|f(x)| = 2$. Số phần tử của S bằng

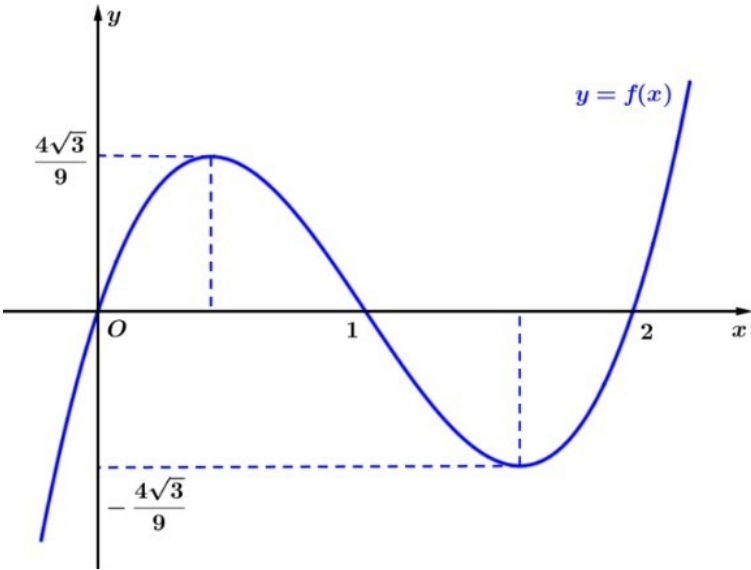
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		$+$	$-$
y		0	



Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng 3 .

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên:



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)=\frac{1}{2021}$ là

Họ, tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

ĐỀ SỐ 02

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực trị là điểm $A(2; -2)$. Tính $a + 2b$.

*A. $a + 2b = 4$.

B. $a + 2b = 2$.

C. $a + 2b = -4$.

D. $a + 2b = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; +\infty)$.

B. $(1; +\infty)$.

*C. $(-\infty; -1)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ trên đoạn $[-1; 3]$.

A. 9 .

B. 19 .

*C. 25 .

D. 0 .

Lời giải

$$y = x^4 - 8x^2 + 16 \Rightarrow y' = 4x^3 - 16x$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \notin [-1; 3] \end{cases}$$

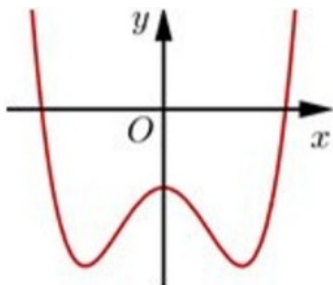
$y(-1) = 9; y(2) = 0; y(3) = 25$

Vậy $\max_{[-1; 3]} y = 25$

Câu 4: Tìm các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{7x+2}$.

- *A. $y = \frac{3}{7}; x = \frac{-2}{7}$. B. $y = \frac{-3}{7}; x = \frac{-2}{7}$. C. $y = \frac{3}{7}; x = \frac{2}{7}$. D. $y = \frac{-1}{2}; x = \frac{-2}{7}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Xác định dấu của a, b, c .



- A. $a < 0, b < 0, c < 0$. *B. $a > 0, b < 0, c < 0$. C. $a > 0, b > 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải

Khi x dần về $+\infty$ thì đồ thị đi lên nên $a > 0$.

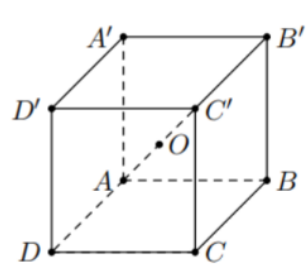
Hàm số có 3 điểm cực trị nên $a \cdot b < 0$. Suy ra $b < 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Câu 7: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây đúng

- A. $\vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$
 B. $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$
 C. $\vec{AO} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$
 D. $\vec{AO} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$

Hướng dẫn giải



$$\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$$

$$+ O \text{ là trung điểm } AC' \rightarrow \vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AC'} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$$

Câu 8: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 3$ khi

- A. $m = \frac{1}{2}$. *B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Lời giải

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$

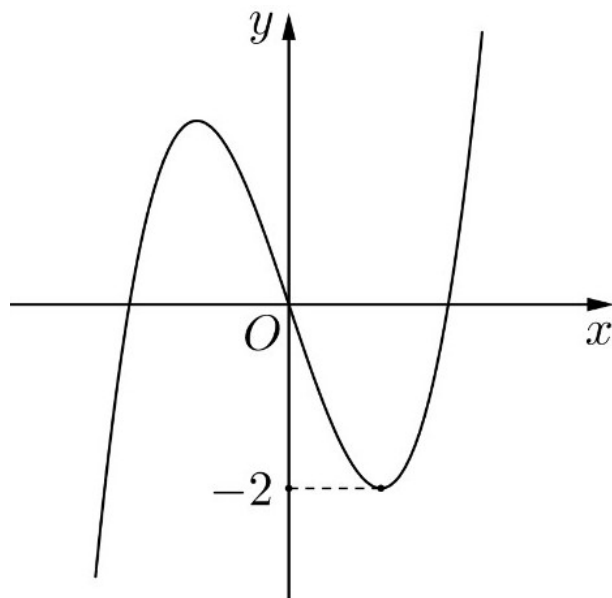
Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x + m, (a = 3, b = -6, c = m, \Delta = 36 - 12m)$$

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Theo đề bài $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{2}{3}m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$. (nhận)

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Phương trình $f(x^2) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



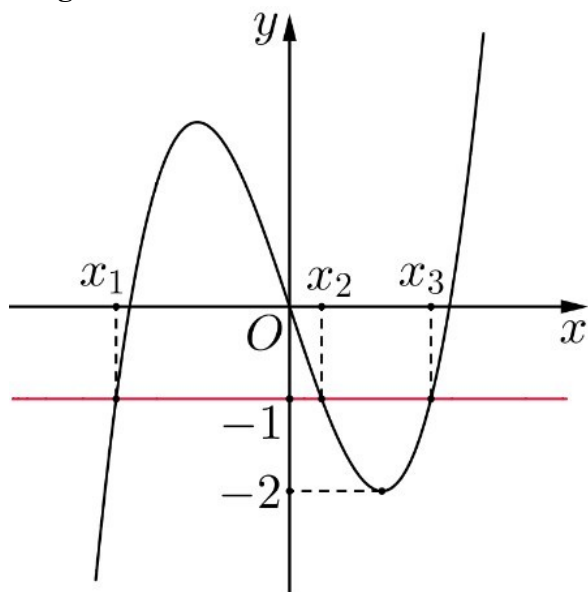
A. 0.

B. 3.

*C. 4.

D. 2.

Lời giải



Từ đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ suy ra $f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases}$ với $x_1 < 0 < x_2 < x_3$

Ta có: $f(x^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^2) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x_1 & (1) \\ x^2 = x_2 & (2) \\ x^2 = x_3 & (3) \end{cases}$

Vì $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ nên phương trình (1) vô nghiệm; mỗi phương trình (2) và (3) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f(x^2)+1=0$ có 4 nghiệm.

Câu 10: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$ thuộc khoảng nào sau đây?

*A. $(-2; 2)$

B. $(-\infty; -1)$

C. $(1; 3)$

D. $(0; +\infty)$

Lời giải

Ta có $x^2 - xy + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 3}{x}$ thay vào $2x + 3y - 14 \leq 0$ ta có bất phương trình $2x + 3\frac{x^2 + 3}{x} - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{9}{5}$. Thay $y = \frac{x^2 + 3}{x}$ vào $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$ ta có

$$P = 3x^2 \frac{x^2 + 3}{x} - x \left(\frac{x^2 + 3}{x} \right)^2 - 2x^3 + 2x = 3x(x^2 + 3) - \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{x} - 2x^3 + 2x = \frac{5x^2 - 9}{x}$$

$$P' = \frac{5x^2 + 9}{x^2} > 0, \forall x \in \left[1; \frac{9}{5} \right]. \text{ Suy ra } P = \frac{5x^2 - 9}{x} \text{ đồng biến trên } \left[1; \frac{9}{5} \right].$$

$$\text{Vậy } \left. \begin{matrix} \text{Max } P = P\left(\frac{9}{5}\right) = 4; \\ \text{Min } P = P(1) = -4 \end{matrix} \right\} \text{ Suy ra } \left. \begin{matrix} \text{Max } P + \text{Min } P = 0 \end{matrix} \right\}$$

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^4 - m$ có ba điểm cực trị đều thuộc các trục tọa độ

A. $m = 2$

B. $m = 3$

C. $m = \frac{1}{2}$

*D. $m = 1$

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Xét

Để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị thì $m > 0$.

Khi đó tọa độ các điểm cực trị là $A(0; 2m^4 - m), B(\sqrt{m}; 2m^4 - m^2 - m), C(-\sqrt{m}; 2m^4 - m^2 - m)$

$$\text{Ta có } A \in Oy. \text{ Để } B, C \in Ox \text{ thì } \begin{cases} m = 0 \\ 2m^3 - m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Do $m > 0$ nên ta được $m = 1$.

Câu 12: Cho tứ diện đều ABCD, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(\angle AB, DM)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

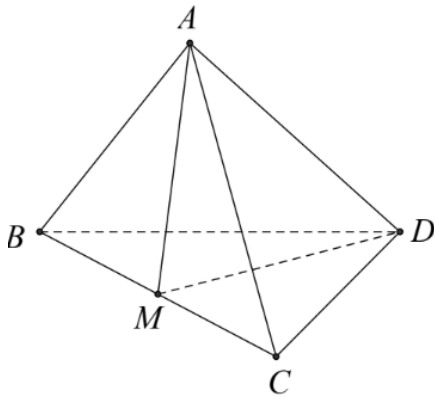
Hướng dẫn giải

Giả sử cạnh của tứ diện là a

$$\text{Ta có } \cos(\vec{AB}, \vec{DM}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{DM}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{DM}|}$$

$$\text{Mặt khác } \vec{AB} \cdot \vec{DM} = \vec{AB} (\vec{AM} - \vec{AD}) = \vec{AB} \cdot \vec{AM} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB \cdot AM \cdot \cos 30^\circ - AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Do đó } \cos(\vec{AB}, \vec{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



Câu 1: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$

(I) Hàm số nghịch biến trên R

(II) Hàm số đồng biến trên R

(III) Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$

(IV) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; +\infty)$

Hướng dẫn giải

$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên R

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5}{x-1}$, khi đó:

(I) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

(II) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$

(III) Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị nằm trên trục hoành

(IV) Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị là đỉnh parabol $y = x^2 - 2x + 1$

Hướng dẫn giải

(I) S (II) Đ (III) Đ (IV) Đ

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là 2 đường thẳng $x=1, y=0$

Giao điểm 2 đường tiệm cận là điểm $I(1;0) \in Ox$ và cũng là đỉnh parabol $y=x^2-2x+1$

Câu 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN

(I) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

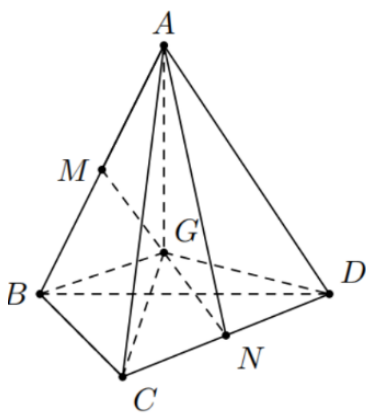
(II) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$

(III) $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{CD})$

(IV) $2\vec{MN} = \vec{AC} + \vec{BD}$

Hướng dẫn giải

(I) Đ (II) Đ (III) S (IV) Đ



Vì M, N lần lượt là trung điểm AB, CD $\rightarrow \begin{cases} \vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GM} \\ \vec{GC} + \vec{GD} = 2\vec{GN} \end{cases}$

G là trung điểm MN $\rightarrow \vec{GM} + \vec{GN} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. Vậy (I) đúng

Khi đó $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG} + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) = 4\vec{MG}$. Vậy (II) đúng

Dễ chứng minh được $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$ nên (III) sai

Ta có:

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CN}$$

$$\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BD} + \vec{DN}$$

Do đó $2\vec{MN} = \vec{AC} + \vec{BD}$. Vậy (IV) đúng

Câu 4: Cho hàm số (C): $y=f(x)=\frac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$, khi đó:

(I) Giao điểm của Δ của trục Ox có hoành độ lớn hơn 2

(II) Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3; -9)$

(III) Gọi $A=\Delta \cap Ox, B=\Delta \cap Oy$ ta có $S_{OAB} > 3$

(IV) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $[0;3]$ là 4.

Hướng dẫn giải

(I) S (II) Đ (III) S (IV) S

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = -3 \Rightarrow$ TCX: $y=2x-3$

$+\Delta \cap Ox \Rightarrow y=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} < 2$ nên (I) SAI

+TCD $x = -3$ với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 2.(-3) - 3 = -9$ vậy (II) ĐÚNG

+ $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A(-3;0)$ và $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B(0;\frac{3}{2}) \Rightarrow SOAB = \frac{9}{4} < 3$ nên (III) SAI

+ $y = 2x - 3$ đồng biến trên R suy ra GTLN trên $[0;3]$ là 3 vậy (IV) SAI

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m+3)x - 5 + m$ đồng biến trên R

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN 2

Ta có tập xác định $D = R$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + m + 3 = 0$$

Hàm số đồng biến trên R khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in R$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 - (m+3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{4} \leq m \leq 1$$

Câu 2: Cho tứ diện ABCD có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC = 4BM$, $AC = 3AP$, $BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$

Hướng dẫn giải

Đặt $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, $\vec{AD} = \vec{c}$, $\vec{AQ} = k \vec{AD} = k \vec{c}$

Theo đề bài, ta có $\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$; $\vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$; $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{b}$

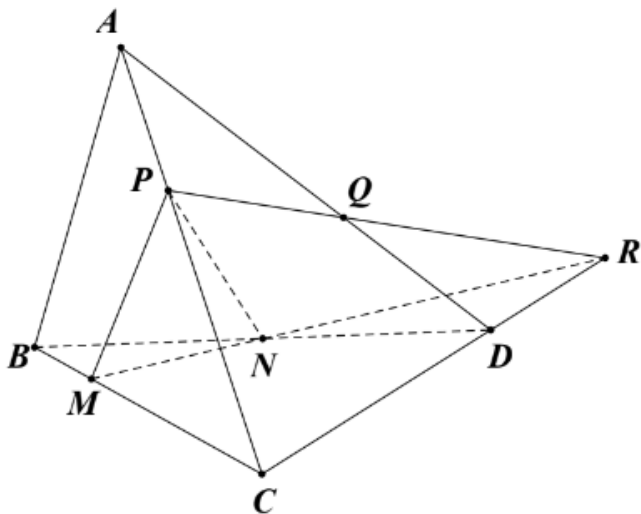
$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{-1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \vec{MP} = \vec{AP} - \vec{AM} = \frac{-3}{4}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} \\ \vec{MQ} = \vec{AQ} - \vec{AM} = \frac{-3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + k\vec{c} \end{cases}$$

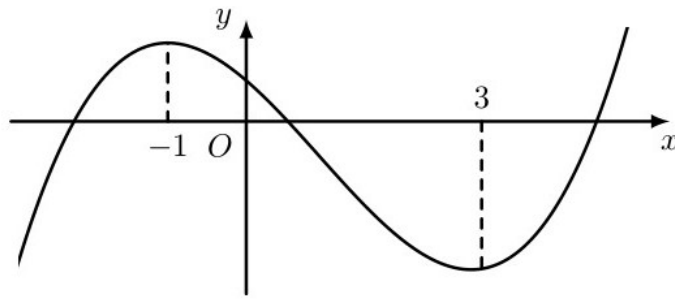
Vì M, N, P, Q đồng phẳng nên

$$x\vec{MN} + y\vec{MP} = \vec{MQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25x + 0,75y = 0,75 \\ 0,25x - \frac{1}{12}y = 0,25 \\ 0,5x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ k = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{Vậy}$$

$$\vec{AQ} = \frac{3}{5}\vec{AD}$$

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ





Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

Xét hàm số

$$y = f((x-1)^2 + m)$$

$$\bullet y' = 2(x-1)f'((x-1)^2 + m)$$

$$\bullet y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 + m = -1 \\ (x-1)^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 = -1-m \\ (x-1)^2 = 3-m \end{cases}$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $-1-m \leq 0 < 3-m \Leftrightarrow -1 \leq m < 3 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$

Vậy tổng các phần tử của S là 2.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2m}{x+2}$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho

$$\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| = 2$$

. Số phần tử của S bằng

A. 1.

B. 0.

*C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$f'(x) = \frac{2-2m}{(x+2)^2}, \forall x \neq -2$$

Ta có

Nếu $m=1 \Rightarrow f(x)=1, \forall x \neq -2$, khi đó $\max_{[1;3]} |f(x)| = \min_{[1;3]} |f(x)| = 1$

$$= \left| \frac{1+2m}{3} \right| + \left| \frac{3+2m}{5} \right|$$

Nếu $m \neq 1$ ta có $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;3]$, $f(1) = \frac{1+2m}{3}, f(3) = \frac{3+2m}{5}$.

+) Nếu $f(1).f(3) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq -\frac{1}{2}$ thì $\min_{[1;3]} |f(x)| = 0, \max_{[1;3]} |f(x)| = f(1)$ hoặc $\max_{[1;3]} |f(x)| = f(3)$. Do đó

$$\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{1+2m}{3} \right| = 2 \\ \left| \frac{3+2m}{5} \right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{2}, m = -\frac{7}{2} \\ m = \frac{7}{2}, m = -\frac{13}{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện xét thì không có giá trị m .

$$f(1).f(3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

+) Nếu $\min_{[1;3]} |f(x)| + \max_{[1;3]} |f(x)| = |f(1)| + |f(3)| = \left| \frac{1+2m}{3} \right| + \left| \frac{3+2m}{5} \right|$. Do đó

$$\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1+2m}{3} \right| + \left| \frac{3+2m}{5} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ \frac{1+2m}{3} + \frac{3+2m}{5} = -2 \\ m > -\frac{1}{2} \\ \frac{1+2m}{3} + \frac{3+2m}{5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{11}{4} \\ m = 1 \text{ (loại do } m \neq 1) \end{cases}$$

$$m=1, m=-\frac{11}{4}$$

Vậy S có hai phần tử

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	0	1	0

$$y = \frac{1}{f^2(x) - m}$$

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng 3. Chọn kết quả đúng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f^2(x) - m} = \frac{1}{-m}$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Do đó:

Nếu $m=0$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ không có tiệm cận ngang.

Mặt khác phương trình $f^2(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ có một tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{-m}$.

+ $m < 0$: Phương trình $f^2(x) - m = 0$ vô nghiệm vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

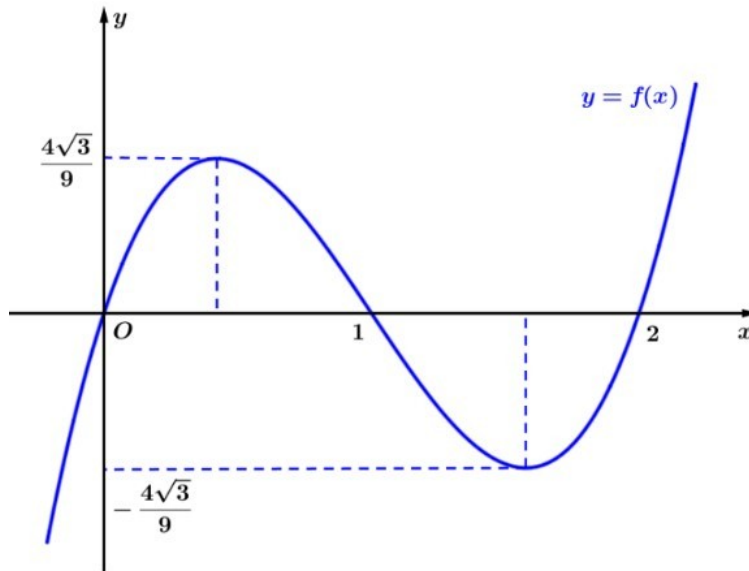
$$+ m > 0: f^2(x) - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{m} \\ f(x) = -\sqrt{m} \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = -\sqrt{m}$ vô nghiệm với $\forall m > 0$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $f(x) = \sqrt{m}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Vậy $0 < m < 1$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ có 3 tiệm cận.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - |x^2-1|\right|\right) = \frac{1}{2021}$ là



Lời giải

$$y = g(x) = f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - |x^2-1|\right|\right) \quad \text{với} \quad g(x) = \frac{1}{2021}$$

Ta đặt: $t = \sqrt{4-x^2}, \forall x \in [-2; 2]$ thì suy ra $y = g(t) = f\left(t - |t^2-3|\right), \forall t \in [0; 2]$

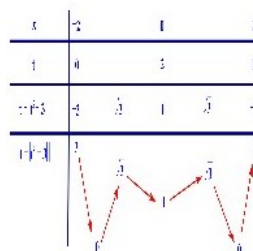
$$h(t) = t - |t^2-3| = \begin{cases} t^2 + t - 3, & t \in [0; \sqrt{3}] \\ -t^2 + t + 3, & t \in [\sqrt{3}; 2] \end{cases}$$

Suy ra:

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ bên:

t	0	$\sqrt{3}$	2
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	-3	$\sqrt{3}$	1

Đặt $u = \left|t - |t^2-3|\right|$ thì ta cũng có BBT của u như sau:



Nhìn vào đồ thị $y = f(x)$ trên ta có được:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx, a \neq 0 \\ f(1) = f(2) = 0, f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3} > 0$$

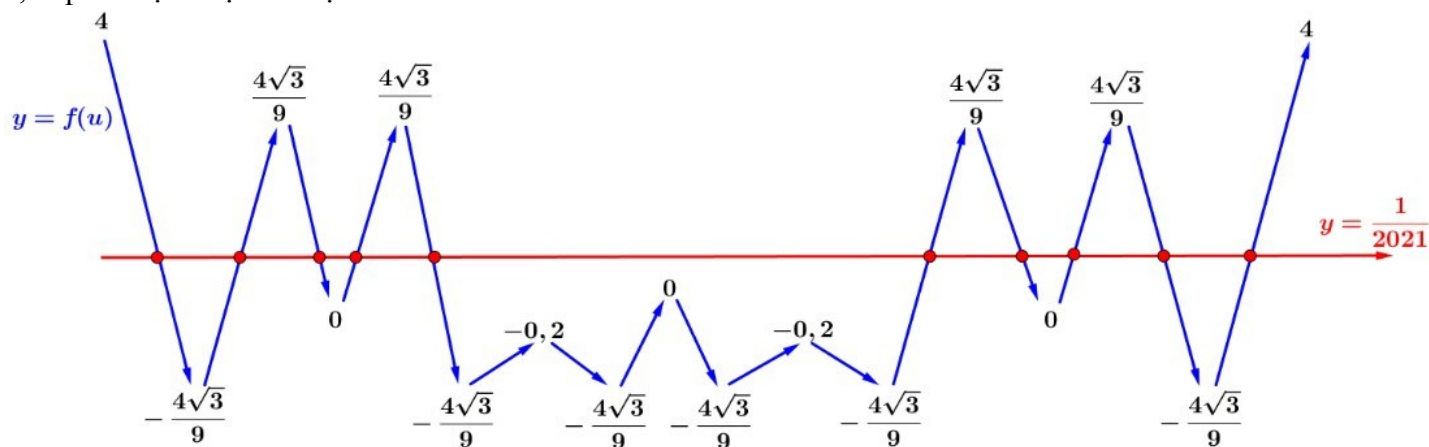
Như vậy ta suy ra $f(x) = \frac{2}{3}x(x-1)(x-2)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x = x_0$ nên suy ra

$$f(x_0) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} \Rightarrow x_0 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$f(3) = 4, f(\sqrt{3}) = -0,2, f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

Như vậy:

Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y = f(u)$ với $u = |t - |t^2 - 3||$ như sau:



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x) = \frac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.