**Đề 59**

**ĐỀ HSG TOÁN 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI 2023-2024**

**Câu 1:** (5,0 điểm)

1. Giải phương trình
2. Cho là các số thực khác 0 , thỏa mãn và .

Tính giá trị của biểu thức

**Câu 2**. (5,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số tự nhiên thỏa mãn .
2. Tìm tất cả số nguyên tố để phương trình có nghiệm nguyên dương.

**Câu 3.** (2,0 điểm)

Với các số thực thỏa mãn và , tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Câu 4.** (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn (, nội tiếp đường tròn . Các đường cao của tam giác đồng quy tại trực tâm . Gọi lần lượt là giao điểm của đường thẳng với hai đường thẳng .

1. Chứng minh .
2. Gọi là trung điểm của . Chứng minh .
3. Gọi lần lượt là trung điểm của Chứng minh vuông góc với .

**Câu 5.** (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên sao cho số là lập phương của một số nguyên tố.
2. Trên bảng ta viết số tự nhiên 222...2 gồm 2022 chữ số 2. Mỗi bước ta chọn 22 chữ số liên tiếp nào đó có chữ số ngoài cùng bên trái bằng 2 , rồi biến đổi các chữ số được chọn theo qui tắc: chữ số 2 đổi thành chữ số 0 còn chữ số 0 đổi thành chữ số 2 .

a) Chứng minh mọi cách thực hiện đều phải dừng lại sau một số hữu hạn bước.

b) Giả sử sau khi thực hiện được bước thì không thể thực hiện được thêm bước nào nữa. Chứng minh là số lẻ.

**---Hết---**

**Đáp án đề 59**

**Câu 1:** (5,0 điểm)

1. ĐKXĐ

Phương trình đã cho đưa về

Kết hợp với điều kiện xác định: phương trình có nghiệm là

1. Từ giả thiết suy ra:

**TH1:**  suy ra

Do đó . Suy ra .

**TH2:**

Suy ra

Vậy nếu thì

Nếu thì

**Câu 2**. (5,0 điểm)

1. Giả sử là hai số tự nhiên thỏa mãn

**TH1**: Loại vì không phải là số chính phương.

**TH2:**

**TH3:**

Dẫn tới hay

Điều này vô lí vì còn 2022 không chia hết cho 9

Vậy

1. Biến đổi được

Vì là số nguyên tố, còn nên

Vì là các số nguyên dương.

TH1: dẫn tới

Kết hợp với điều kiện ta được Từ đó ( loại)

TH2: . Làm tương tự ta được . Từ đó ( loại)

TH3: dẫn tới Từ đó

Vậy số nguyên tố cần tìm là .

**Câu 3:** (2,0 điểm)

**Tìm giá trị lớn nhất.**

Ta có:

Suy ra:

Vậy giá trị lớn nhất của là đạt giá trị lớn nhất khi .

**Tìm giá trị nhỏ nhất**. Không mất tính tổng quát, giả sử .

Vì nên suy ra , dẫn đến

Chứng minh tương tự:

Từ đó,

Nên ta có

Vậy giá trị nhỏ nhất của là đạt giá trị nhỏ nhất chẳng hạn khi .

**Câu 4**. (6,0 điểm)



1. Tứ giác có Tứ giáclà tứ giác nội tiếp

⇒

Kẻ đường kính của ⇒(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

(góc nội tiếp cùng chắn )

có

⇒

1. vuông tại cóEM

cân tại

Tương tự

Ta có (tính chất trung tuyến tam giác vuông)

Ta có (tính chất trung tuyến tam giác vuông)

là đường trung trực của .

là giao điểm của và

(hệ thức về cạnh và đường cao trong vuông tại .

Mặt khác : (g.g) ⇒

⇒.

⇒

1. Gọi S là điểm đối xứng với qua ; Gọi là điểm đối xứng với qua .

Chứng minh được

Xét có

(tính chất đường trung trực)

(tính chất đường trung trực)

Mặt khác, theo tính chất đường trung bình: và suy ra

Chứng minh tương tự ta có , suy ra là đường trung trực của , dẫn tới vuông góc với .

**Câu 5**. (2,0 điểm)

1. Giả sử a b, là hai số nguyên dương thỏa mãn   với  là số nguyên tố.

Rõ ràng  vì nếu   thì  vô lí do p là số nguyên tố.

Không mất tính tổng quát, giả sử .

Ta có Ảnh có chứa Phông chữ, văn bản, chữ viết tay, ảnh chụp màn hình

Mô tả được tạo tự động

Vì  

Ta có . Do đó  còn 2 trường hợp: 

TH1: .

TH2: . Rõ ràng  (Vô lí vì ).

Vậy  hoặc .

1. Gọi là số chữ số trong các chữ số được đánh dấu. Ban đầu , là số lẻ. Trong 22 chữ số liên tiếp luôn có đúng một chữ số được đánh dấu, do đó mỗi bước S tăng 1 hoặc giảm 1, tức là mỗi bước thay đổi tính chã̃ n lè. Cụ thể là, sau số lè bước thay thì chuyển từ lẻ thành chẵn; sau số chã̃n bước thay thì chuyển từ chã̃ n thành lè. Nếu , tồn tại ít nhất một dãy 22 chữ số liên tiếp có chữ số ngoài cùng bên trái là 2 , tức là ta còn có thể thực hiện được ít nhất một bước nữa. Do đó để ta không thể thực hiện được bước nào nữa thì . Từ đó số bước đã thực hiện đến lúc dừng lại phải lẻ, hay lẻ.