ĐỀ SỐ 14: ĐỀ TỰ LUYỆN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8
NĂM HỌC: 2023-2024
Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức P = $\left(\dfrac{x^2-2x}{2x^2+8}-\dfrac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$ với $x \neq 0; x \neq 2$ là:

A. $P=\dfrac{x-1}{2x}$ **B.** $P=\dfrac{x+1}{x}$ **C.** $P=\dfrac{x-1}{x}$ **D.** $P=\dfrac{x+1}{2x}$

Câu 2. Cho biểu thức $Q=\dfrac{3}{4}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{15}{16}+...+\dfrac{9999}{10000}$ Ta có:

A. Q>98 **B.** $Q=99$ **C.** $Q=99,5$ **D.** Q>100

Câu 3. Rút gọn biểu thức:A = $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}$ Cho biết :x+y+z = 0 là:

A. $A=\dfrac{1}{2}$ **B.** $A=\dfrac{1}{3}$ **C.** $A=x+y+z$ **D.** Một kết quả khác.

Câu 4. Giải phương trình $\dfrac{5u-1}{4}=\dfrac{u+2}{3}$, ta được kết quả:

A. $u=-2$; B. $u=1$; C. $u=3$; D. $u=5$

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$ là:

A. $\{x/1\le x<2\}$ **B.** $\{1;2\}$ **C.** $\{x/1<x<2\}$ **D.** $\{x/1\le x\le 2\}$

Câu 6. Giá trị của k để đa thức f(x) = $x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k$ chia hết cho g(x) = $x^2 - x - 2$ là:

A. -2 **B.** 30 **C.** -30 **D.** -1

Câu 7. Hệ số a, b của f(x) = $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ để f(x) chia hết cho g(x) = $x^2 - 3x + 4$ là:

A. $a=-3; b=4$ **B.** $a=3; b=-4$ **C.** $a=-3; b=-4$ **D.** $a=3; b=4$

Câu 8. Với giá trị nào của a và b thì đa thức f(x)= x^3+ax^2+bx+2 chia cho x+1 dư 5; chia cho x+2 thì dư 8 là:

A. a=3; b=1 **B.** a=-3; b=-1 **C.** a=3; b=-1 **D.** a=-3; b=1

Câu 9. Cho tam giác đều ABC, Gọi M là trung điểm của BC. Một góc xMy bằng 60^0 quay quanh điểm M sao cho hai cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Ta có:

A. BD.CE = $\dfrac{BC^2}{4}$ **B.** BD.CE = $\dfrac{DE^2}{4}$ **C.** BD.CE = $\dfrac{BC^2}{2}$ **D.** BE.CD = $\dfrac{BC^2}{4}$

Câu 10. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết chu vi tam giác AHB là 30 cm, chu vi tam giác AHC là 40 cm. Chu vi tam giác ABC là:.

A. 50cm **B.** 60cm **C.** 70cm **D.** Một số khác

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, AB=20cm , HC=9cm. Độ dài AH là:

A. 10cm B. 12cm C. 16cm D. 20cm

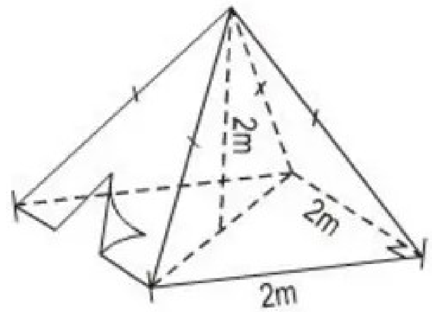
Câu 12. Cho Cho tam giác ABC có AB = 3cm; AC = 6cm; A = 120^0. Độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC là:

A. $\sqrt{5}$ cm B. 2cm C. 3cm D. $\sqrt{6}$ cm

Câu 13. Cho ΔABC có B = 2 C, AB = 8 cm, BC = 10 cm. Độ dài cạnh AC là:

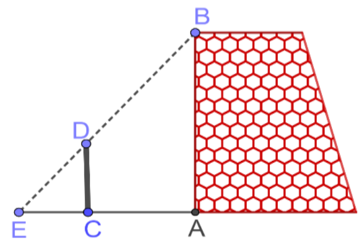
A. 10 cm B. 11 cm C. 12 cm D. 13 cm

Câu 14: Một cái lều ở trại hè của học sinh có dạng hình chóp tứ giác đều kèm theo các kích thước như hình vẽ. Thể tích không khí bên trong lều là bao nhiêu?



A. $\frac{8}{3}m^3$; B. $4m^3$; C. $8m^3$; D. $\frac{3}{8}m^3$

Câu 15: Một nhóm các bạn học sinh lớp 8 đã thực hành đo chiều cao AB của một bức tường như sau: Dùng một cái cọc CD đặt cố định vuông góc với mặt đất, với $CD = 3\ m$ và $CA = 5\ m$. Sau đó, các bạn đã phối hợp để tìm được điểm E trên mặt đất là giao điểm của hai tia BD, AC và đo được $CE = 2,5\ m$ *(như hình vẽ).*



Khi đó,chiều cao AB của bức tường là:

A. $9\ m$ B. $6,25\ m$. C. $6\ m$ D. $4,2\ m$

Câu 16. Bốn bạn Xuân, Hạ, Thu, Đông có tất cả 61 viên bi. Xuân có số bi ít nhất, Đông có số bi nhiều nhất và là số lẻ, Thu có số bi gấp 9 lần số bi của Hạ. Đông có số viên bi là:

A. 25 **B.** 27 **C.** 29 **D.** 31

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm):

a. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$.

b. Chứng minh rằng: $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi số n lẻ

Câu 2 (3,0 điểm):

a.Giải phương trình sau: $(2x^2 + x - 2013)^2 + 4(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$

b.Tìm đa thức dư khi chia đa thức $f(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 2039$ cho đa thức $g(x) = x^2 + 8x + 10$

Câu 3 (4,5 điểm): Cho đoạn thẳng AG và điểm D nằm giữa A và G. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AG vẽ các hình vuông $ABCD, DEFG$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AG, EC. Gọi I, K lần lượt là tâm đối xứng của các hình vuông $ABCD, DEFG$

a) Chứng minh $AE = CG$ và $AE \perp CG$ tại H

b) Chứng minh $IMKN$ là hình vuông.

c) Chứng minh B, H, F thẳng hàng.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho a, b, c là ba số dương thoả mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng **0,5 điểm**

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	A	B	B	D	C	B	C	A	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	C	B	C	A	A	C				

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Rút gọn biểu thức Rút gọn biểu thức sau: $A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$.

a) ĐK: $\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 2\end{cases}$

Ta có $A=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$

$$=\left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{4(2-x)+x^2(2-x)}\right)\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{(x^2+4)(2-x)}\right)\left(\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}\right)=\left(\frac{x(x-2)^2+4x^2}{2(x-2)(x^2+4)}\right)\left(\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}\right)$$

$$=\frac{x^3-4x^2+4x+4x^2}{2(x^2+4)}.\frac{x+1}{x^2}=\frac{x(x^2+4)(x+1)}{2x^2(x^2+4)}=\frac{x+1}{2x}$$

Câu 2. So sánh giá trị biểu thức $A=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+...+\frac{9999}{10000}$ với các số 98 và 99.

Ta có: $A=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{1}{16}\right)+...+\left(1-\frac{1}{10000}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\left(1-\frac{1}{4^2}\right)+...+\left(1-\frac{1}{100^2}\right)=$ $99-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}\right)=99-B$ với B = $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}$ > 0 Nên A < 99.

Ta có $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ với mọi k ≥ 1 nên

$$B=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}<1$$

Do đó $A=99-B>99-1=98$. Vậy $98<A<99$

Câu 3. Rút gọn biểu thức:A = $\frac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}$ Cho biết :x+y+z = 0

HD:(x+y+z) = 0 => $(x+y+z)^2=0$ => $x^2+y^2+z^2=-2xy-2xz-2yz$. Suy ra A=$\frac{1}{3}$

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình sau.

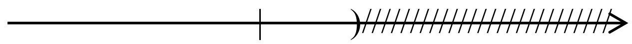
a) $2(x+1)-3x+2>x-3(1-x)$ b) $2(2x+3)-3x\le 3(x-2)+2(1-x)$

c) $\frac{1}{3}(x-1)\ge x+2$ d) $\frac{2x}{3}-\frac{x-1}{2}<\frac{x}{6}-x$ là:

Bài giải

a) $2(x+1)-3x+2>x-3(1-x)\Leftrightarrow 2x+2-3x+2>x-3+3x\Leftrightarrow 4-x>4x-3$

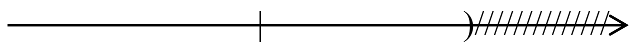
$\Leftrightarrow 4x+x<4+3 \Leftrightarrow 5x<7 \Leftrightarrow x<\frac{7}{5}$.



b) $2(2x+3)-3x\le 3(x-2)+2(1-x) \Leftrightarrow 4x+6-3x\le 3x-6+2-2x$

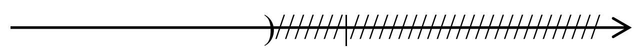
$\Leftrightarrow x+6\le x-4$ vô nghiệm với mọi x.

c) $\frac{1}{3}(x-1)\ge x+2\Leftrightarrow x-1\ge 3(x+2)\Leftrightarrow x-1\ge 3x+6\Leftrightarrow 3x-x\le -1-6\Leftrightarrow 2x\le -7\Leftrightarrow x\le \frac{7}{2}$



d) $\frac{2x}{3}-\frac{x-1}{2}<\frac{x}{6}-x \Leftrightarrow 2.2x-3(x-1)<x-6x\Leftrightarrow 4x-3x+3<-5x \Leftrightarrow x+5x<-3$

$\Leftrightarrow 6x<-3 \Leftrightarrow x<\frac{-3}{6} \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$:



$\left\{x/x<-\frac{7}{5}\right\}$

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$

+ Nếu x <1 ta có (II) $\Leftrightarrow$ - 2x + 6 = 4 $\Leftrightarrow$ x =1 (loại)

+ Nếu $1\le x<2$ ta có (II) $\Leftrightarrow$ 0.x +4 = 4 Phương trình nghiệm đúng với $1\le x<2$

(0,5điểm)

+Nếu $2\le x<3$ ta có (II) $\Leftrightarrow$ - 4x = - 8 $\Leftrightarrow$ x = 2 (thỏa mãn)

+ Nếu $3\le x$ ta có (II) $\Leftrightarrow$ 2x = 10 $\Leftrightarrow$ x = 5 (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của (II) là x =5 hoặc $1\le x\le 2$

Câu 6. Xác định k để đa thức $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x - 2$

<u>Giải</u>

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-9x^3+21x^2+x+k & x^2-x-2 \\ \cline{2-2}
-\ x^4-x^3-2x^2 & x^2-8x+15 \\ \cline{1-1}
-8x^3+23x^2+x+k & \\
-8x^3+8x^2+16x & \\ \cline{1-1}
15x^2-15x+k & \\
15x^2-15x-30 & \\ \cline{1-1}
k-30 &
\end{array}
$$

Để f(x) chia hết cho g(x) thì k + 30 = 0 suy ra k = - 30

Câu 7. Xác định các hệ số a, b của $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ để f(x) chia hết cho $g(x) = x^2 - 3x + 4$

<u>Giải</u>

Thực hiện phép chia ta có

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-3x^3+3x^2+ax+b & x^2-3x+4 \\ \cline{2-2}
-\ x^4-3x^3+4x^2 & x^2-1
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r} -\ \ x^2 + ax + b \\ -\ \ x^2 + 3x - 4 \\ \hline (a-3)x + b + 4 \end{array}$$

Để f(x) chia hết cho g(x) thì r = 0 với mọi giá trị của x . Vậy ta có $\begin{cases} a-3=0 \\ b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

Câu 8. Với giá trị nào của a và b thì đa thức $f(x)= x^3+ax^2+bx+2$ chia cho x+1 dư 5; chia cho x+2 thì dư 8.

HD:

Vì $f(x)= x^3+ax^2+bx+2$ chia cho x+1 dư 5; chia cho x+2 thì dư 8 nên ta có:

f(x)=(x+1).Q(x)+5

f(x)=(x+2).H(x)+8

Với x=-1 ta có f(-1)=-1+a-b+2=5 (1)

Với x=-2 ta có f(-2)=-8+4a-2b+2=8 (2)

Từ (1) và (2) ta có: a=3; b=-1.

Câu 9. Cho tam giác đều ABC, Gọi M là trung điểm của BC. Một góc xMy bằng 60^0 quay quanh điểm M sao cho hai cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Chứng minh: BD.CE = $\frac{BC^2}{4}$

Trong ΔBDM ta có $D_1 = 120 - M_1$

Vì $M_2 = 60^0 \Rightarrow M_3 = 120^0 - M_1 \Rightarrow D_1 = M_3$

Chứng minh $\Delta BMD \backsim \Delta CEM$ (1) $\Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE} \Leftrightarrow BD.CE = BM.CM$

Vì $BM = CM = \frac{BC}{2}$ Nên $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

Câu 10. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết chu vi tam giác AHB là 30 cm, chu vi tam giác AHC là 40 cm. Tính chu vi tam giác ABC.

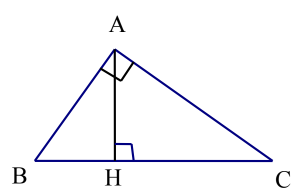
Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt là chu vi các tam giác AHB, CHA, CAB

Dễ thấy: $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$ nên:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{3^2} = \frac{AC^2}{4^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{3^2 + 4^2} = \frac{BC^2}{5^2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{5} \Rightarrow AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$$



Mà $\Delta AHB \backsim \Delta CHA \backsim \Delta CAB$, suy ra:

$P_1 : P_2 : P_3$ = AB: AC: BC = 3: 4: 5

Mà : P_1 = 30cm; P_2 = 40cm nên P_3 = 50cm

Vậy chu vi tam giác ABC bằng 50cm

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, AB=20cm , HC=9cm. Độ dài AH là: 16cm*(Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 121)*

Câu 12. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N. Tia AM cắt đường thẳng CD tại K. Kẻ AI vuông góc với AK cắt CD tại I.

1.Chứng minh : $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}$

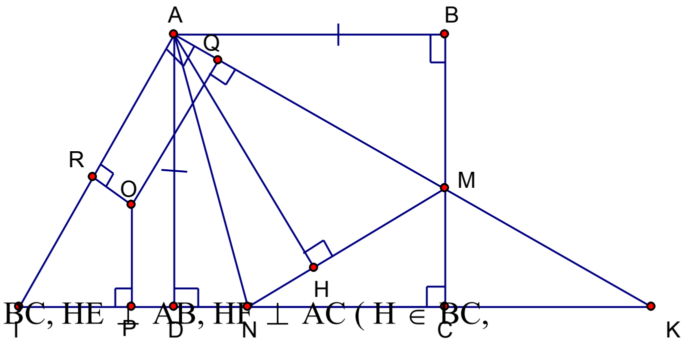
a)Ta có

$\Delta ABM = \Delta ADI \Rightarrow AM = AI(1)$

Trong tam giác AIK vuông tại A ta có:

$\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AD^2}(2)$. và AB = AD

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}$



Câu 13. Cho tam giác ABC vuông ở A, AH $\perp$ BC, HE $\perp$ AB, HF $\perp$ AC (H $\in$ BC, E $\in$ AB, F $\in$ AC).

Chứng minh rằng: AE.AB = AF.AC; BH = BC.cos^{2}B.

* ΔAHB vuông tại H, có HE $\perp$ AB nên

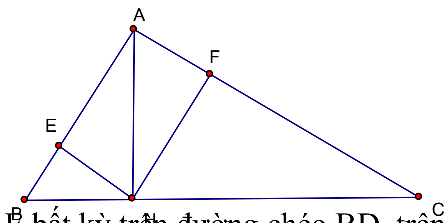
AH^2 = AB.AE. (1)

Tương tự: AH^2 = AC.AF (2).

Từ (1) và (2) suy ra: AB.AE = AC.AF.

* BH = AB.cosB; AB = BC.cosB

Suy ra BH = BC.cos^{2}B.



Câu 14. Cho hình chữ nhật ABCD, nối C với một điểm E bất kỳ trên đường chéo BD, trên tia đối của EC lấy điểm F sao cho EF = EC. Vẽ FH và FK lần lượt vuông góc với AB và AD. Chứng minh rằng:

a. Tứ giác AHFK là hình chữ nhật

b. AF song song với BD và KH song song với AC

c. Ba điểm E, H, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

a)Tứ giác AHFK là hình chữ nhật (có ba góc vuông)

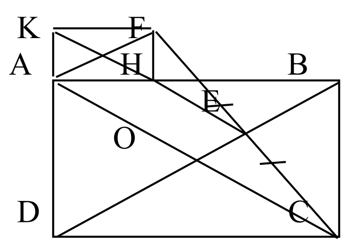
b) AF song song với BD và KH song song với AC (có cặp góc so le trong bằng nhau)

c)Gọi giao của KH và AF là M

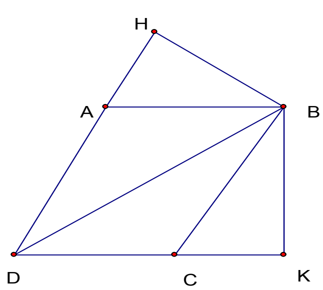
Ta có KH//AC (theo phần b)

ME//AC (ME là đ- ờng trung bình của tam giác AFC)

Suy ra M, H và E thẳng hàng (theo tiên đề Ơ clít)



Câu 15. Cho hình bình hành ABCD, vẽ BH$\perp$AD, BK$\perp$DC. Biết rằng BH = BK, chứng tỏ rằng ABCD là hình thoi. .



Ta có: BH = BK, mà BH$\perp$AD, BK$\perp$DC. do đó B thuộc tia phân giác của góc ADC , theo dấu hiệu nhận biết hình thoi ta có tứ giác ABCD là hình thoi.

Câu 16. Bốn bạn Xuân, Hạ, Thu, Đông có tất cả 61 viên bi. Xuân có số bi ít nhất, Đông có số bi nhiều nhất và là số lẻ, Thu có số bi gấp 9 lần số bi của Hạ. Hãy cho biết mỗi bạn có bao nhiêu viên bi ?

Bài giải:

+ Số bi của Thu gấp 9 lần số bi của Hạ nên tổng số bi của Thu và Hạ là một số chẵn. Tổng số bi của bốn bạn là số lẻ, số bi của Đông là số lẻ, tổng số bi của Hạ và Thu là số lẻ ; do đó số bi của Xuân phải là số chẵn.

+ Số bi của Hạ phải là số bé hơn 4 vì nếu số đó là 4 thì số bi của Thu là 4 x 9 = 36. Khi đó ít nhất Đông có số bi là 37 thì chỉ riêng tổng số bi của Thu và Đông đã vượt quá tổng số bi của bốn bạn (36 + 37 = 73 > 61).

+ Nếu số bi của Xuân là 2 thì số bi của Hạ là 3, số bi của Thu là 27

(3 x 9 = 27)

Số bi của Đông là :

61 - (2 + 3 + 27) = 29 (viên).

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm): a.Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3+2x^2+3x+2=y^3$.

Ta có $y^3-x^3=2x^2+3x+2=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0 \quad \Rightarrow x<y \qquad (1)$

$(x+2)^3-y^3=4x^2+9x+6=\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{16}>0 \quad \Rightarrow y<x+2 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$

Thay $y = x + 1$ vào pt ban đầu và giải phương trình tìm được

x = -1; từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là:

(-1 ; 0)

b.Chứng minh rằng: $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi số n lẻ

Giải

$n^4 - 10n^2 + 9 = n^4 - n^2 - 9n^2 + 9 = n^2(n^2 - 1) - 9(n^2 - 1) = (n^2 - 1)(n^2 - 9)$

$= (n - 1)(n+1)(n-3)(n+3)$

Với n lẻ, n = 2k +1, ta có:

$n^4 - 10n^2 + 9 = (2k+1-1)(2k+1+1)(2k+1-3)(2k+1+3)$

$= 2k(2k+2)(2k-2)(2k+4) = 16k(k+1)(k-1)(k+2) \vdots 16$

Câu 2 (3,0 điểm): a. Giải phương trình sau:

$$(2x^2+x-2013)^2+4(x^2-5x-2012)^2=4(2x^2+x-2013)(x^2-5x-2012)$$

Đặt: $\begin{cases} a=2x^2+x-2013 \\ b=x^2-5x-2012 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2+4b^2=4ab \Leftrightarrow (a-2b)^2=0 \Leftrightarrow a-2b=0 \Leftrightarrow a=2b$$

Khi đó, ta có: $2x^2+x-2013=2(x^2-5x-2012) \Leftrightarrow 2x^2+x-2013=2x^2-10x-4024$

$\Leftrightarrow 11x=-2011 \Leftrightarrow x=\frac{-2011}{11}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{-2011}{11}$.

b. Tìm đa thức dư khi chia đa thức $f(x)=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+2039$ cho đa thức $g(x)=x^2+8x+10$

Lời giải

Ta có: $f(x)=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+2036=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+2036$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+2039$

Đặt $t=x^2+8x+10 \Rightarrow x^2+8x+7=x^2+8x+10-3=t-3;\quad x^2+8x+15=x^2+8x+10+5=t+5$

$\Rightarrow f(x)=(t-3)(t+5)+2036=t^2+2t-15+2036=t(t+2)+2024$

$\Rightarrow f(x)=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)+2024$

$\Rightarrow f(x)$ chia cho $x^2+8x+10$ dư 2024.

Câu 3 (4,5 điểm):

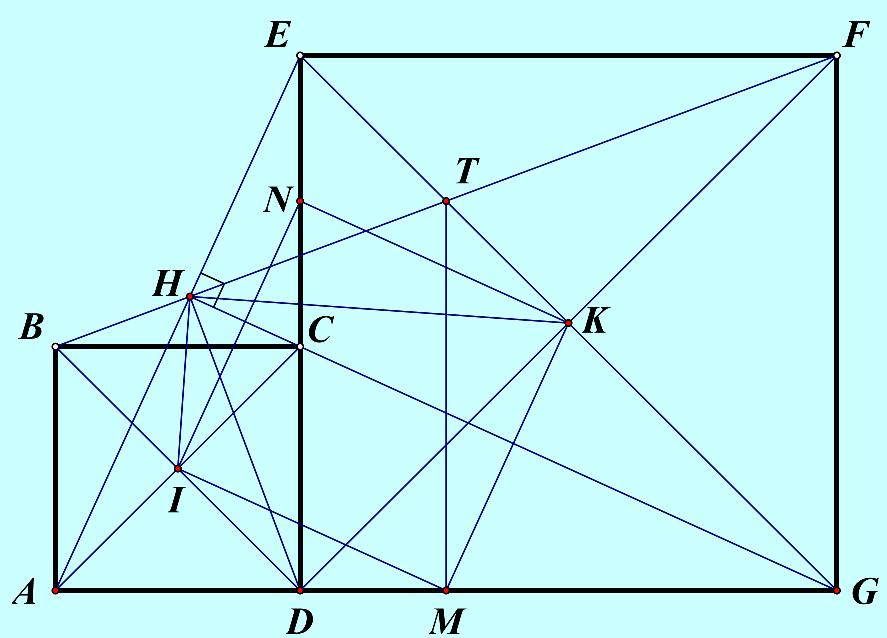
Cho đoạn thẳng AG và điểm D nằm giữa A và G. Trên cùng nữa mặt phẳng bờ AG vẽ các hình vuông $ABCD, DEFG$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AG, EC. Gọi I, K lần lượt là tâm đối xứng của các hình vuông $ABCD, DEFG$

a) Chứng minh $AE=CG$ và $AE \perp CG$ tại H

b) Chứng minh $IMKN$ là hình vuông.

c) Chứng minh B, H, F thẳng hàng.

d) Gọi T là giao điểm của BF và EG. Chứng minh



rằng độ dài TM không đổi khi D di động trên đoan thẳng AG cố định.	

Lời giải

a) Ta có $AD = CD, DE = DG \Rightarrow \Delta ADE = \Delta CDG(cgc) \Rightarrow AE = CG$

$AED = CGD,\ ECH = GCD \Rightarrow AED + ECH = CGD + GCD = 90^0 \Rightarrow EHG = 90^0$.

Vậy $AE = CG$ và $AE \perp CG$

b) Chứng minh $IMKN$ là hình vuông.

IN là đường trung bình trong tam giác $ADE, IN = \frac{1}{2}AE; IN // AE$

KM là đường trung bình trong tam giác AGE, suy ra $KM = \frac{1}{2}AE; KM // AE$

Từ đó suy ra $IN = KM = \frac{1}{2}AE; IN // KM // AE$

Tương tự: IM, KN lần lượt là đường trung bình trong hai tam giác ACG và ECG

Nên $IM = KN = \frac{1}{2}CG; IM // KN // CG$

Lại có $AE = CG$ và $AE \perp CG$. Từ đó ta được $IMKN$ là hình vuông.

c) Chứng minh B, H, F thẳng hàng.

Tam giác HAC vuông tại H, có HI là trung tuyến nên $HI = IA = IC$

Suy ra $IH = IB = ID$. Mà IH là trung tuyến của ΔBHD, do đó ΔBHD vuông tại H

Tương tự: $HK = KE = KG = KD = KF \Rightarrow \Delta HDF$ vuông tại H

Như vậy ta có $BH \perp DH; FH \perp DH$. Vậy B, H, F thẳng hàng

d) $ADB = AGE = 45^0 \Rightarrow BD // EG$

K là trung điểm của DF nên KT là đường trung bình trong tam giác BDF, hay T là trung điểm của BF

Tứ giác $ABFG$ là hình thang hai đáy AB và FG, có TM là đường trung bình.

Như vậy ta có: $TM = \frac{AB + GF}{2} = \frac{AD + DG}{2} = \frac{AG}{2}$ (không đổi).

Câu 4 (1,0 điểm): Cho a, b, c là ba số dương thoả mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với $\forall$ a, b, c $\in$ R và x, y, z > 0 ta có

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{x+y+z} \qquad (*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Thật vậy, với a, b $\in$ R và x, y > 0 ta có

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{\left(a+b\right)^2}{x+y} \qquad (**)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2y+b^2x\right)\left(x+y\right)\geq xy\left(a+b\right)^2 \quad \Leftrightarrow \left(bx-ay\right)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{\left(a+b\right)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

0.5

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 0.25

Mà $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{3}{2}$ 0.25

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ (đpcm) 0.25

Hết