**Tiết 4: Bài giảng về bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki và bất đẳng thức trị tuyệt đối**

**IV. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki.**

1. **Lí thuyết**
2. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki đối với 2 cặp số thực

Với hai cặp số thực $\left(a,b\right)$ và $\left(x,y\right)$ ta có

$\left(ax+by\right)^{2}\leq \left(a^{2}+b^{2}\right)\left(x^{2}+y^{2}\right)$ với $∀a,b,x,y\in R$.

Dấu “=” xảy ra $⇔\frac{a}{x}=\frac{b}{y}    \left(xy\ne 0\right)$ .

* Nêu qua cách chứng minh.

$$\left(ax+by\right)^{2}\leq \left(a^{2}+b^{2}\right)\left(x^{2}+y^{2}\right)$$

$$⇔a^{2}x^{2}+2ax.by+b^{2}y^{2}\leq a^{2}x^{2}+a^{2}y^{2}+b^{2}x^{2}+b^{2}y^{2}$$

$$⇔a^{2}y^{2}-2ay.bx+b^{2}x^{2}\geq 0$$

$⇔\left(ay-bx\right)^{2}\geq 0$ (luôn đúng với $∀a,b,x,y\in R$)

Dấu bằng xảy ra khi $ay-bx=0$ $⇔ay=bx⇔\frac{a}{x}=\frac{b}{y}   \left(xy\ne 0\right)$.

* Nêu cách dễ nhớ
1. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki đối với 2 bộ 3 số thực

Với hai bộ ba số thực $\left(a\_{1},a\_{2},a\_{3}\right)$, $\left(b\_{1},b\_{2},b\_{3}\right)$

$$\left(a\_{1}b\_{1}+a\_{2}b\_{2}+...+a\_{n}b\_{n}\right)^{2}\leq \left(a\_{1}^{2}+a\_{2}^{2}+...+a\_{n}^{2}\right)\left(b\_{1}^{2}+b\_{2}^{2}+...+b\_{n}^{2}\right)$$

Dấu “=” xảy ra $⇔\frac{a\_{1}}{b\_{1}}=\frac{a\_{2}}{b\_{2}}=...=\frac{a\_{n}}{b\_{n}}$.

1. **Ví dụ**

**Ví dụ 1 .** (Mức nhận biết) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng với $∀a,b$

**A.** $\left(a+2b\right)^{2}\leq 5\left(a^{2}+b^{2}\right)$. **B.** $\left(a+2b\right)^{2}>5\left(a^{2}+b^{2}\right)$.

**C.** $\left(a+2b\right)^{2}\leq 5\left(a+b\right)$. **D.** $a+2b\leq 5\left(a^{2}+b^{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số $\left(1,2\right)$ và $\left(a,b\right) $ta được:

$$\left(a+2b\right)^{2}=\left(1.a+2.b\right)^{2}\leq \left(1^{2}+2^{2}\right)\left(a^{2}+b^{2}\right)=5\left(a^{2}+b^{2}\right)$$

Vậy $\left(a+2b\right)^{2}\leq 5\left(a^{2}+b^{2}\right)$

Dấu bằng xảy ra $⇔\frac{a}{1}=\frac{b}{2} $

Sau khi hướng dẫn xong bài toán trên ta nên hướng cho học sinh tư duy từ một bài toán ta nhìn ra được nhiều bài toán khác:

1. Cho $a+2b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=a^{2}+b^{2}$.

Khi $a+2b=2$, ta thu được: $4\leq 5\left(a^{2}+b^{2}\right)⇔a^{2}+b^{2}\geq \frac{4}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\left\{\begin{array}{c}\&a+2b=2\\\&\frac{a}{1}=\frac{b}{2} \end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}\&a=\frac{2}{5}\\\&b=\frac{4}{5}\end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $T=a^{2}+b^{2}$ là $\frac{4}{5}$.

1. Cho $a^{2}+b^{2}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=a+2b$.

Khi $a^{2}+b^{2}=1$, ta thu được: $\left(a+2b\right)^{2}\leq 5⇒a+2b\leq \sqrt{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\left\{\begin{array}{c}\&a^{2}+b^{2}=1\\\&\frac{a}{1}=\frac{b}{2} \\\&a+2b=\sqrt{5}\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}\&a=\frac{\sqrt{5}}{5}\\\&b=\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{array}\right.$

Vậy giá trị lớn nhất của $T=a+2b$ là $\sqrt{5}$.

1. Cho $a^{2}+b^{2}+c^{2}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=a+3b+3c$**.**

Khi $a^{2}+b^{2}+c^{2}=1$, ta thu được: $T^{2}=\left(a+3b+3c\right)^{2}\leq \left(1^{2}+3^{2}+3^{2}\right)\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right)=19$

$$⇒a+3b+3c\leq \sqrt{19}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\left\{\begin{array}{c}\&a^{2}+b^{2}+c^{2}=1\\\&\frac{a}{1}=\frac{b}{3}=\frac{c}{3}\\\&a+3b+3c=\sqrt{19}\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}\&a=\frac{1}{\sqrt{19}}\\\&b=\frac{3}{\sqrt{19}}\\\&c=\frac{3}{\sqrt{19}}\end{array}\right.$

Vậy giá trị lớn nhất của $T=a+3b+3c$ là $\sqrt{19}$.

1. Cho $a+b+c=4$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$.

Khi $a+b+c=4$, ta thu được: $T^{2}=\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^{2}\leq \left(1^{2}+1^{2}+1^{2}\right)\left(a+b+b+c+c+a\right)=12$

$$⇒\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\leq 2\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\left\{\begin{array}{c}\&a+b+c=4\\\&\frac{\sqrt{a+b}}{1}=\frac{\sqrt{b+c}}{1}=\frac{\sqrt{c+a}}{1}\end{array}\right.⇔a=b=c=\frac{4}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của $T=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$ là $2\sqrt{3}$.

**Ví dụ 2 .** (Mức thông hiểu) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}$ trên $\left[-5;3\right]$.

Cách 1: Tự luận.

Nhận xét: $\left(\sqrt{x+5}\right)^{2}+\left(\sqrt{3-x}\right)^{2}=x+5+3-x=8$

Ta Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số $\left(1,1\right)$ và $\left(\sqrt{x+5},\sqrt{3-x}\right) $ta được:

$$\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}\right)^{2}\leq \left(1^{2}+1^{2}\right)\left(x+5+3-x\right)=16$$

$$⇒\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}\leq 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $\left\{\begin{array}{c}\&\frac{\sqrt{x+5}}{1}=\frac{\sqrt{3-x}}{1}\\\&\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}=4\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}\&x+5=3-x\\\&\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}=4\end{array}\right.⇔x=-1$

Vậy giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)=\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}$ là $4$

Cách 2: Máy tính.

**Ví dụ 3 .** (Mức vận dụng) Cho $x^{2}+y^{2}\leq 2x+4y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $F=2x+y$.

Ta có: $x^{2}+y^{2}\leq 2x+4y⇔x^{2}-2x+y^{2}-4y\leq 0$

$$⇔\left(x-1\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}\leq 5$$

Khi đó:

$$F=2x+y=2\left(x-1\right)+\left(y-2\right)+4⇒2\left(x-1\right)+\left(y-2\right)=F-4$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 2 bộ số $\left(2,1\right)$ và $\left(x-1,y-2\right)$

$$\left(F-4\right)^{2}=\left[2\left(x-1\right)+\left(y-2\right)\right]^{2}\leq \left(2^{2}+1^{2}\right)\left[\left(x-1\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}\right]\leq 25$$

Vậy $\left(F-4\right)^{2}\leq 25⇔-5\leq F-4\leq 5⇔-1\leq F\leq 9$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{c}\&\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}\\\&\left(x-1\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}=5\\\&\left[\begin{array}{c}\&2x+y=-1\\\&2x+y=9\end{array}\right.\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}\&x-2y=-3\\\&\left(x-1\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}=5\\\&\left[\begin{array}{c}\&2x+y=-1\\\&2x+y=9\end{array}\right.\end{array}\right.⇔\left[\begin{array}{c}\&x=-1;y=1\\\&x=3;y=3\end{array}\right.$

Vậy $F=2x+y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-1$ khi $x=-1,y=1$, $F=2x+y$ đạt giá trị lớn nhất bằng $9$ khi $x=3,y=3$.

Từ bài toán này ta có thể ra theo kiểu trắc nghiệm.

***V. Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Điều kiện** | **Nội dung** | **Dấu “=” xảy ra** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  hoặc  |  |
|  |  |  |

Ta sẽ cùng nhau chứng minh bất đẳng thức 

**CHỨNG MINH:**

Ta có  đây là bất đẳng thức đúng, ta có điều phải chứng minh.

***Lời dẫn:*** Các bất đẳng thức còn lại các em xem như bài tập về nhà.

**🟒 *Một số kết quả liên quan***

Kết quả 1:

Kết quả 2: 

***Lời dẫn:*** *Sau đây chúng ta cùng nhau đi và phần ứng dụng của bất đảng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối.*

*Cũng như những bất đẳng thức khác bất đẳng thức trị thường được sử dụng để chứng minh các bất đẳng thức hoặc hổ trợ tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức.*

*Chúng ta xét một số ví dụ*

**Cho 3 ví dụ thôi:**

**Ví dụ 1:** **(TH)** Chứng minh  với mọi số thực .

**Lời giải**

Áp dụng bđt 

ta có



Dấu ‘=’ xảy ra 

**Ví dụ 2: (VD)** **Cho các số thực**  thõa mãn ; . Khẳng định nào đúng?

**A.**  . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Cách 1: (tự luận)**

**Ta có**



 

. **Chọn B**

**Cách 2: (trắc nghiệm)**

Lấy thử vài giá trị  thỏa mãn  thế vào biểu thức  ta sẽ loại trừ dần các đáp áp sai. Đáp án còn lại cuối cùng sẽ là đáp án đúng.

Chọn  loại đáp án A,C,D. Vậy đáp án B đúng.

**Ví dụ 3:** **(VD)** Cho hai số thực  thỏa mãn  Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Lời giải**



Vậy 