

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài 1. (4 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\sin 6x + \sin 2x + \sin^3 2x = 4(\sin^6 x + \cos^6 x)$

b) $(3x + 2)\sqrt{2x^2 - 3} = 5x^2 + x - 6$

Bài 2. (3 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 16x^2 + 4xy + y^2 = 12 \\ 8x^2 + 4xy - 28x - 5y = -18 \end{cases}$$

Bài 3. (3 điểm)

Cho hai số không âm a, b thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1 + a^{2014}} + \sqrt{1 + b^{2014}}$

Bài 4. (4 điểm)

Tìm m để phương trình: $\sqrt{mx^2 + mx + 3} = mx + 1$ có nghiệm duy nhất.

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA = 2\sqrt{3}$ và hình chiếu H của A lên mặt (SBC) là trực tâm của tam giác SBC (H nằm trong tam giác SBC). Giả sử góc giữa hai mặt (HAB) và (ABC) có số đo bằng 30° , tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

Bài 6. (2 điểm)

Với số tự nhiên $n \geq 2$, gọi a_n là hệ số của x trong khai triển nhị thức $(5 + \sqrt{x})^n$. Tìm các giá trị của n để biểu thức $A = \frac{5^2}{a_2} + \frac{5^3}{a_3} + \frac{5^4}{a_4} + \dots + \frac{5^n}{a_n}$ có giá trị bằng 48.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\sin 6x + \sin 2x + \sin^3 2x = 4(\sin^6 x + \cos^6 x)$

b) $(3x + 2)\sqrt{2x^2 - 3} = 5x^2 + x - 6$

Giải

a/ $\sin 6x + \sin 2x + \sin^3 2x = 4(\sin^6 x + \cos^6 x)$

$$\Leftrightarrow 3\sin 2x - 4\sin^3 2x + \sin 2x + \sin^3 2x = 4(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^3 2x - 3\sin^2 2x - 4\sin 2x + 4 = 0 \quad (1đ)$$

$$\Leftrightarrow (3\sin^2 2x - 4)(\sin 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (0,5đ)$$

b/ $(3x + 2)\sqrt{2x^2 - 3} = 5x^2 + x - 6$

$$\Leftrightarrow 2(2x^2 - 3) - (3x + 2)\sqrt{2x^2 - 3} + x^2 + x = 0$$

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 3}$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 2t^2 - (3x + 2)t + x^2 + x = 0 \Leftrightarrow t = x + 1 \vee t = \frac{x}{2} \quad (1đ)$$

* $t = x + 1$

$$\sqrt{2x^2 - 3} = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (x \geq -1) \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{5} \quad (0,5đ)$$

* $t = \frac{x}{2}$

$$\sqrt{2x^2 - 3} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 7x^2 - 12 = 0 \quad (x \geq 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{12}{7}} \quad (0,5đ)$$

Bài 2. (3 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 16x^2 + 4xy + y^2 = 12 & (1) \\ 8x^2 + 4xy - 28x - 5y = -18 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Nhận thấy $x = \frac{5}{4}$ không thỏa hệ phương trình. (0,25đ)

Từ (2) ta có $y = \frac{8x^2 - 28x + 18}{5 - 4x}$ (3), thế (3) vào (1) ta được: (0,25đ)

$$\left(\frac{8x^2 - 28x + 18}{5 - 4x} + 2x \right)^2 + 12x^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{324(x-1)^2}{(5-4x)^2} + 12(x^2 - 1) = 0 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[27(x-1) + (x+1)(5-4x)^2] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)^3 = 0 \quad (1đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} . \text{ Ta nhận 2 nghiệm: } \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases} \quad (1đ)$$

Cách khác:

$$(1) + (2) \times 2 \Rightarrow 32x^2 + 12xy + y^2 - 56x - 10y + 24 = 0 \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow (y + 8x - 6)(y + 4x - 4) = 0 \Rightarrow y = 6 - 8x \vee y = 4 - 4x \quad (0,5đ)$$

$$\text{Thế } y = 6 - 8x \text{ vào (1) ta được } x = 1 \vee x = \frac{1}{2}, \text{ cho 2 nghiệm } \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases} \quad (1đ)$$

$$\text{Thế } y = 4 - 4x \text{ vào (1) ta được } x = \frac{1}{2}, \text{ cho 1 nghiệm } \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases} \quad (1đ)$$

Bài 3. (3 điểm)

Cho hai số không âm a, b thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1 + a^{2014}} + \sqrt{1 + b^{2014}}$

Giải

• **Giá trị lớn nhất:**

$$P = \sqrt{1 + a^{2014}} + \sqrt{1 + b^{2014}} \leq \sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} = Q \quad (0,25đ)$$

$$\text{Ta có } Q^2 = 2 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)} = 3 - 2ab + 2\sqrt{2 - 2ab + a^2b^2} \quad (0,25đ)$$

$$\text{Đặt } t = ab \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4} \quad (0,25đ)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 - 2t + 2} - t$ với $t \in [0; \frac{1}{4}]$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{t-1}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}} - 1 < 0 \text{ do } t < 1 \Rightarrow f \text{ nghịch biến trên đoạn } [0; \frac{1}{4}]$$

$$\Rightarrow f(t) \leq f(0) = \sqrt{2}, \forall t \geq 0 \Rightarrow f(ab) \leq \sqrt{2} \quad (0,25đ)$$

$$\Rightarrow Q^2 \leq 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow Q \leq 1 + \sqrt{2} \Rightarrow P \leq 1 + \sqrt{2} \quad (0,25đ)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } a = 0, b = 1 \text{ hay } a = 1, b = 0 \quad (0,25đ)$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $1 + \sqrt{2}$

• **Giá trị nhỏ nhất:**

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1 + x^{2014}}$.

$$\text{Ta có } f''(x) = \frac{1007x^{2012}(1006x^{2014} + 2013)}{(x^{2014} + 1)^{3/2}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ tức là hàm số } f'(x) \text{ đồng}$$

biến trên \mathbb{R} . $(0,25đ)$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = f(x) - f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = f'(x) - f'(\frac{1}{2}) \Rightarrow g'(\frac{1}{2}) = 0, g'(x) > 0, \forall x > \frac{1}{2}, g'(x) < 0, \forall x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(x) \geq g(\frac{1}{2}) = 0 \text{ hay } f(x) \geq f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}), \forall x \in \mathbb{R} \quad (*) \quad (0,75đ)$$

Từ (*) ta có: $f(a) + f(b) \geq f'(\frac{1}{2})(a+b-1) + 2f(\frac{1}{2}) = 2f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{1 + (\frac{1}{2})^{2014}}$ (0,5đ)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $2\sqrt{1 + (\frac{1}{2})^{2014}}$.

Bài 4. (4 điểm)

Tìm m để phương trình: $\sqrt{mx^2 + mx + 3} = mx + 1$ có nghiệm duy nhất.

Giải.

$m = 0$: phương trình vô nghiệm (0,25đ)

$m \neq 0$: phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{m}t^2 + t + 3} = t + 1$ ($t = mx$) (0,25đ)

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{m}t^2 + t + 3} = t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2}{t^2 + t - 2}$ ($t \geq -1, t \neq 1$) (0,5đ)

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{t^2 + t - 2}$ ($t \geq -1, t \neq 1$)

$f'(t) = \frac{t^2 - 4t}{(t^2 + t - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 4$ (0,5đ)

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	-1	0	1	4	$+\infty$
y'	+		+	0	-		-
y	1	$+\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	1

(1,5đ)

Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $[-1; +\infty)$

$\Leftrightarrow m < -\frac{1}{2} \vee m = \frac{8}{9} \vee m \geq 1$ (1đ)

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA = 2\sqrt{3}$ và hình chiếu H của A lên mặt (SBC) là trực tâm của tam giác SBC (H nằm trong tam giác SBC). Giả sử góc giữa hai mặt (HAB) và (ABC) có số đo bằng 30° , tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

Giải.

Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao vẽ từ B, C, S của ΔSBC ; M là trung điểm của AB và O là giao điểm của AF và CM .

$BC \perp (SAF) \Rightarrow (ABC) \perp (SAF)$

$SC \perp (ABD) \Rightarrow SC \perp AB \Rightarrow AB \perp (SMC) \Rightarrow (ABC) \perp (SMC)$

Mà $(SAF) \cap (SMC) = SO$ nên $SO \perp (ABC)$ (1,5đ)

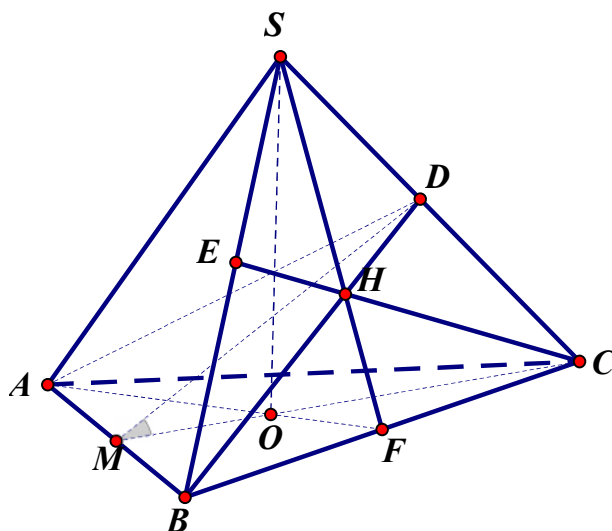
$$\Rightarrow S.ABC \text{ là hình chóp đều} \Rightarrow SB = SC = SA = 2\sqrt{3} \quad (0,5đ)$$

$$[(HAB), (ABC)] = [(DAB), (ABC)] = [MD, MC] = 30^\circ \Rightarrow \widehat{SCM} = 60^\circ \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{3}, SO = 3 \Rightarrow BC = 3 \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC : V_{S.ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (0,5đ)$$



Bài 6. (2 điểm)

Với số tự nhiên $n \geq 2$, gọi a_n là hệ số của x trong khai triển nhị thức

$$(5 + \sqrt{x})^n. \text{ Tìm các giá trị của } n \text{ để biểu thức } A = \frac{5^2}{a_2} + \frac{5^3}{a_3} + \frac{5^4}{a_4} + \dots + \frac{5^n}{a_n} \text{ có}$$

giá trị bằng 48.

Giải.

$$\text{Ta có : } a_n = C_n^2 5^{n-2} \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow \frac{5^n}{a_n} = \frac{25}{C_n^2} = \frac{50}{n(n-1)} = 50\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow A = 50\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 50\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (0,5đ)$$

$$A = 48 \Leftrightarrow n = 25 \quad (0,5đ)$$