KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN THỨ XIII TẠI THÀNH PHỐ HUẾ

ĐỀ THI MÔN TOÁN LỚP 10

Thời gian làm bài: 180 phút

Chú ý: Mỗi câu hỏi thí sinh làm trên 01 tờ giấy riêng biệt

Câu 1 (4 điểm).

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Câu 2 (4 điểm).

Cho các số thực *a, b, x, y* thoả mãn điều kiện $ax - by = \sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + bx + ay$.

Câu 3 (4 điểm).

Cho tam giác *ABC* có các góc *A, B* thỏa điều kiện:

$$\sin\frac{3A}{2} + \sin\frac{3B}{2} = 2\cos\frac{A-B}{2}.$$

Chứng minh tam giác *ABC* là tam giác đều.

Câu 4 (4 điểm).

Cho tứ giác lồi *ABCD*. Xét *M* là điểm tùy ý. Gọi *P, Q, R, S* là các điểm sao cho:

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MP};\ \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{MQ};$$

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MR};\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MS}.$$

Tìm vị trí của điểm *M* sao cho *PA = QB = RC = SD.*

Câu 5 (4 điểm).

Trong mặt phẳng tọa độ cho một ngũ giác lồi có các đỉnh là những điểm có tọa độ nguyên. Chứng minh rằng bên trong hoặc trên cạnh ngũ giác có ít nhất một điểm có tọa độ nguyên.

-------------------HẾT--------------------

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*

Đáp án Toán 10

	NỘI DUNG	ĐIỂM
<u>Câu 1:</u>	Giải hệ phương trình: $$\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$$	
	* Điều kiện: $x + y > 0$	0,5
	* (1) $\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x + y) + 8xy = 16(x + y)$ $\Leftrightarrow [(x + y)^2 - 2xy\,](x + y) - 16(x + y) + 8xy = 0$ $\Leftrightarrow (x + y)^3 - 16(x + y) - 2xy(x + y) + 8xy = 0$ $\Leftrightarrow (x + y)[(x + y)^2 - 16] - 2xy(x + y - 4) = 0$ $\Leftrightarrow (x + y - 4)[(x + y)(x + y + 4) - 2xy] = 0$	1
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + y - 4 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + 4(x+y) = 0 & (4) \end{array}\right.$	0,5
	Từ (3) $\Rightarrow x + y = 4$, thế vào (2) ta được: $x^2 + x - 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \Rightarrow y = 7 \\ x = \ 2 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$.	1
	(4) vô nghiệm vì $x^2 + y^2 \geq 0$ và $x + y > 0$.	0,5
	Vậy hệ có hai nghiệm là (–3; 7); (2; 2)	0,5

Đáp án Toán 10

	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 2:	Cho các số thực a, b, x, y thỏa mãn điều kiện $ax-by=\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=a^2+b^2+x^2+y^2+bx+ay$.	
	Viết lại $F=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(a^2+b^2\right)$.	0,5
	Đặt $M=(x;\,y)$, $A=\left(-\frac{b}{2};-\frac{a}{2}\right)$, $(\Delta): ax-by=\sqrt{3}$. Ta có $MA^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2$. Mà $M\in(\Delta)$ nên $MA^2\ge[d(A;\,\Delta)]^2=\frac{3}{a^2+b^2}$. Đẳng thức xảy ra khi M là hình chiếu của A trên (Δ).	1,5
	Suy ra $F\ge\frac{3}{a^2+b^2}+\frac{3}{4}\left(a^2+b^2\right)\ge 2\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}.\frac{3}{4}\left(a^2+b^2\right)}=3$.	1
	Vậy $\min F=3$ đạt được chẳng hạn khi $(a;\,b;\,x;\,y)=\left(\sqrt{2};\,0;\,\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.	1

Đáp án Toán 10

	NỘI DUNG	ĐIỂM
<u>Câu 3:</u>	Cho tam giác *ABC* có các góc *A*, *B* thỏa điều kiện : $$\sin\left(\frac{3A}{2}\right)+\sin\left(\frac{3B}{2}\right)=2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right).$$ Chứng minh tam giác *ABC* là tam giác đều.	
	Ta có: $\sin(\frac{3A}{2})+\sin(\frac{3B}{2})=2\sin(\frac{3(A+B)}{4})\cos(\frac{3(A-B)}{4})$. $1\geq\sin(\frac{3(A+B)}{4})>0$; $\cos(\frac{A-B}{2})>0$ $0\leq\frac{\lvert A-B\rvert}{2}\leq\frac{3\lvert A-B\rvert}{4}<\pi$ $\Rightarrow\cos(\frac{\lvert A-B\rvert}{2})\geq\cos(\frac{3\lvert A-B\rvert}{4})$ $\Rightarrow\cos(\frac{A-B}{2})\geq\cos(\frac{3(A-B)}{4})$	1
	Từ $\sin(\frac{3A}{2})+\sin(\frac{3B}{2})=2\cos(\frac{A-B}{2})$ và $\cos(\frac{A-B}{2})>0$ Suy ra : $2\sin(\frac{3(A+B)}{4})\cos(\frac{3(A-B)}{4})>0$ Hay $\cos(\frac{3(A-B)}{4})>0$.	1
	Kết hợp với $\sin(\frac{3(A+B)}{4})\leq1$, ta có $\sin(\frac{3(A+B)}{4})\cos(\frac{3(A-B)}{4})\leq\cos(\frac{3(A-B)}{4})$ Do đó: $2\sin(\frac{3(A+B)}{4})\cos(\frac{3(A-B)}{4})\leq2\cos(\frac{3(A-B)}{4})\leq2\cos(\frac{A-B}{2})$	1
	Vì vậy nếu $\sin(\frac{3A}{2})+\sin(\frac{3B}{2})=2\cos(\frac{A-B}{2})$ thì phải có: $$\begin{cases}\frac{\lvert A-B\rvert}{2}=\frac{3\lvert A-B\rvert}{4}\\ \sin(\frac{3(A+B)}{4})=1\end{cases}\Leftrightarrow A=B=\frac{\pi}{3}.$$ Vậy tam giác *ABC* là tam giác đều.	1

Đáp án Toán 10

	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 4:	Cho tứ giác lồi *ABCD*. Xét *M* là điểm tùy ý. Gọi *P, Q, R, S* là các điểm sao cho $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MP}$; $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}=4\overrightarrow{MQ}$ $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MR}$; $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MS}$ Tìm vị trí của điểm *M* sao cho $PA = QB = RC = SD$.	
	Giả sử có điểm *M* thỏa bài toán. Gọi *G* là điểm sao cho $5\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.	0,5
	Từ $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MP}$, ta có $4\overrightarrow{PA}=5\overrightarrow{GA}$. Tương tự $4\overrightarrow{QB}=5\overrightarrow{GB}$, $4\overrightarrow{RC}=5\overrightarrow{GC}$, $4\overrightarrow{SD}=5\overrightarrow{GD}$.	1
	Do đó $PA = QB = RC = SD \Leftrightarrow GA = GB = GC = GD$.	1
	Nếu *ABCD* là tứ giác nội tiếp được trong đường tròn tâm *O* thì *G* trùng *O* và *M* là điểm duy nhất xác định bởi $\overrightarrow{OM}=-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$. Kiểm tra lại thấy thỏa $PA = QB = RC = SD$.	1
	Nếu *ABCD* không phải là tứ giác nội tiếp được trong đường tròn thì không tồn tại điểm *M*.	0,5

Đáp án Toán 10

	NỘI DUNG	ĐIỂM
<u>Câu 5:</u>	Trong mặt phẳng tọa độ cho một ngũ giác lồi có các đỉnh là những điểm có tọa độ nguyên. Chứng minh rằng bên trong hoặc trên cạnh ngũ giác có ít nhất một điểm có tọa độ nguyên.	
	Coi đỉnh A_i (x_i; y_i), i = 1, 2, 3, 4, 5. (x_i; y_i) có thể rơi vào những trường hợp sau: (2k; 2k'), (2k; 2k'+1), (2k+1; 2k' + 1), (2k +1; 2k') với k, k' $\in$ Z	1,5
	Do đa giác có 5 đỉnh nên theo nguyên lí Đi rich lê, có ít nhất 2 đỉnh có tọa độ thuộc một trong bốn kiểu trên.	1,5
	Khi đó trung điểm của đoạn nối 2 đỉnh ấy sẽ có tọa độ nguyên. Do ngũ giác là lồi nên điểm này ở miền trong hoặc trên cạnh của ngũ giác đó.	1

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN THỨ XIII TẠI THÀNH PHỐ HUẾ

ĐỀ THI MÔN TOÁN LỚP 11

Thời gian làm bài: 180 phút

Chú ý: Mỗi câu hỏi thí sinh làm trên 01 tờ giấy riêng biệt

Câu 1 (4 điểm).

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1 \end{cases}$$

Câu 2 (4 điểm).

Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng d và số đo của nhị diện [B,SC,D] bằng 150^0. Tính thể tích của hình chóp đều S.ABCD theo d.

Câu 3 (4 điểm).

Cho dãy số dương (a_n).

a. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k :

$$\sqrt[k]{a_1.a_2...a_k} \le \frac{1}{k(k+1)}\left(2a_1 + \frac{3^2}{2}a_2 + \frac{4^3}{3^2}a_3 + ... + \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}a_k\right)$$

b. Biết $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a \in R$. Đặt $b_n = a_1 + \sqrt{a_1a_2} + \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + ... + \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ với $n \ge 1$

Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn.

Câu 4 (4 điểm).

Cho hàm số f(x) = 2x – sinx.

Chứng minh rằng tồn tại hằng số b và các hàm số g, h thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

1) g(x) = bx + h(x) với mọi số thực x.
2) h(x) là hàm số tuần hoàn.
3) f(g(x)) = x với mọi số thực x.

Câu 5 (4 điểm).

Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho đẳng thức sau đúng:

$$8^m = 2^m + n(2n-1)(2n-2)$$

-------------------HẾT-------------------

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*

ĐÁP ÁN TOÁN LỚP 11

	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 1:	Giải hệ phương trình $\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1} & (1) \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1 & (2) \end{cases}$	
	Đk: $x + 2y + 6 > 0$ và $x + y + 2 > 0$	0,5
	Phương trình (1) $\Leftrightarrow y^2 - x^2 = \ln(x^2+1) - \ln(y^2+1)$ $\Leftrightarrow \ln(x^2+1) + x^2 + 1 = \ln(y^2+1) + y^2 + 1$ (3) Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ với $t \geq 1$ Phương trình (3) có dạng $f(x^2+1) = f(y^2+1)$ (4) Ta có f(t) đồng biến trên $[1 ;+\infty)$. Do đó (4) $\Leftrightarrow x^2+1 = y^2+1 \Leftrightarrow x = \pm y$	1
	* Với x = -y , từ (2) ta được $\log_3(6-x) = 1$, với x<6 $\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = -3$ (thỏa mãn hệ)	0.5
	* Với x = y , từ (2) ta được $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1)$ với x > -1	0.5
	Đặt $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) = 6u \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 3^{2u} \\ x+1 = 2^{3u} \end{cases}$ $\Rightarrow 1 + 2^{3u} = 3^{2u} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{9}\right)^u + \left(\dfrac{8}{9}\right)^u = 1$ (5) Xét g(u) = $\left(\dfrac{1}{9}\right)^u + \left(\dfrac{8}{9}\right)^u$, g(u) là hàm nghịch biến trên R và có g(1) = 1 nên u = 1 là nghiệm duy nhất của (5). Với u = 1 suy ra x = y = 7 (thỏa mãn hệ)	1
	Vậy hệ có 2 nghiệm (3 ;-3) , (7 ;7)	0.5

	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 2:	Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng d và số đo của nhị diện [B,SC,D] bằng 150^0. Tính thể tích của hình chóp đều S.ABCD theo d.	
	Ta có: $BD \perp SC$. Dựng mặt phẳng qua BD vuông góc với SC tại P. Ta có : $\angle BPD = 150^0$	**1**
	Ta có: $\cos 150^0 = \dfrac{2BP^2 - BD^2}{2BP^2} = 1 - \dfrac{BD^2}{2BP^2}$ (1)	**0.5**
	Gọi M là trung điểm của BC. Ta có SM .BC = BP.SC. BC = d, gọi h là chiều cao hình chóp S.ABCD Ta có: $SM^2 = h^2 + \dfrac{d^2}{4}$; $SC^2 = h^2 + \dfrac{d^2}{2}$. Suy ra: $BP^2 = \dfrac{d^2(4h^2 + d^2)}{2(2h^2 + d^2)}$	**1**
	(1) trở thành: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{d^2}{4h^2 + d^2}$. Suy ra: $h = \dfrac{d}{2}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3} - 3}{3}}$	**1**
	$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}h.dtABCD = \dfrac{d^3}{6}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3} - 3}{3}}$	**0.5**

	NỘI DUNG	ĐIỂM
<u>Câu 3</u>	Cho dãy số dương (a_n). a. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k: $\sqrt[k]{a_1.a_2...a_k} \le \frac{1}{k(k+1)}\left(2a_1 + \frac{3^2}{2}a_2 + \frac{4^3}{3^2}a_3 + ... + \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}a_k\right)$ b. Biết $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a \in R$. Đặt $b_n = a_1 + \sqrt{a_1a_2} + \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + ... + \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ với $n \ge 1$ Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn.	
	a)Ta có $\sqrt[k]{(a_1 2)(a_2\frac{3^2}{2})(a_3\frac{4^3}{3^2})....(a_k\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}})} = \sqrt[k]{a_1a_2a_3....a_k}\,(k+1) \Rightarrow$ $\sqrt[k]{a_1a_2a_3....a_k} = \frac{1}{k+1}\sqrt[k]{(a_1 2)(a_2\frac{3^2}{2})(a_3\frac{4^3}{3^2})....(a_k\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}})} \le$ $\frac{1}{(k+1)k}\left[(a_1 2) + (a_2\frac{3^2}{2}) + (a_3\frac{4^3}{3^2}) + ... + (a_k\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}})\right]$	2
	b) Từ câu a) suy ra $b_n \le (a_1 2)(\frac{1}{1.2} + .. + \frac{1}{n(n+1)}) + (a_2\frac{3^2}{2})(\frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}) + .. + (a_n\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}})(\frac{1}{n(n+1)}$ Do : $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ nên $b_n \le a_1(1+\frac{1}{1})^1 + a_2(1+\frac{1}{2})^2 + ... + a_n(1+\frac{1}{n})^n < e(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)$ với $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (b_n) tăng và bị chặn trên, do đó có giới hạn.	2

	NỘI DUNG	ĐIỂM
<u>Câu 4:</u>	Cho hàm số $f(x)= 2x - \sin x$. Chứng minh rằng tồn tại hằng số b và các hàm số g, h thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau : 1) $g(x) = bx + h(x)$ với mọi số thực x. 2) $h(x)$ là hàm số tuần hòan. 3) $f(g(x)) = x$ với mọi số thực x.	
	Từ điều kiện 3) cho thấy muốn chứng tỏ tồn tại g chỉ cần chứng tỏ f có hàm số ngược. Chú ý : f đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ nên có hàm số ngược g. Ta có : $f(g(x)) = x$ và $g(f(x)) = x$ với mọi số thực x.	1
	Đặt : $h(x) = g(x) - bx$. Ta sẽ chọn b để h(x) tuần hòan.	0.5
	Hàm sinx tuần hoàn chu kì 2π. Ta sẽ chứng tỏ $g(x+ 4\pi) = g(x) +2\pi$ với mọi số thực x. Thật vậy : $g(x)+2\pi = [f(g(x) +2\pi)] = g[2(g(x)+2\pi) - \sin(g(x)+2\pi)]$ $=g[2g(x)-\sin(g(x)) + 4\pi] = g[f(g(x)) + 4\pi] = g(x +4\pi)$.	1
	Từ đó : $h(x+4\pi) = g(x + 4\pi) - b(x+4\pi) = g(x) + 2\pi - bx - 4b\pi$ $= h(x) + 2\pi(1-2b)$.	1
	Nếu chọn $b = \frac{1}{2}$ thì $h(x + 4\pi) = h(x)$ với mọi số thực x.	0.5

	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 5:	Tìm tất cả các số tự nhiên m,n sao cho đẳng thức sau đúng : $8^m = 2^m + n(2n-1)(2n-2)$.	
	Đặt $x = 2^m$, $y = 2n-1$ với m ,n là các số tự nhiên . Ta có : $(x,y) = 1$ và $2(x^3-x) = (y+1)y(y-1) \Leftrightarrow y(y^2-1) = 2x(x^2-1)$ (1) Do $m \geq 0$, $n \geq 0$ nên $x \geq 1$ và $y \geq -1$.	0.5
	+ Trường hợp x =1: Ta có m = 0 .Lúc đó n = 0 hay n =1 .	1
	+Trường hợp x >1: Từ (1) và (x,y)=1 suy ra : y^2-1 chia hết cho x và $2(x^2-1)$ chia hết cho y. Do đó $2(x^2-1).(y^2-1)$ chia hết cho xy. Nhưng: $2(x^2-1)(y^2-1) = 2[x^2y^2-2xy-((x-y)^2-1)]$ nên cũng có: $2((x-y)^2-1)$ chia hết cho xy (2)	0.5
	Chú ý: với x >1 thì từ (1) ta có $x^3 < y^3 < 2x^3$. Thật vậy : (1) $\Leftrightarrow (y-x)(y^2+xy+y^2-1) = x^3-x$. Với x>1 ta có $x^3-x>0$.Lúc này y>0 và $y^2+xy+y^2-1>0$,nên y>x. Ngoài ra: $(x^2-1)(2x^3-y^3) = x^2[2(x^3-x)] - (x^2-1)y^3 = x^2(y^3-y)-(x^2-1)y^3$ $= y(y^2-x^2) > 0$. Do đó: $2x^3-y^3 > 0$	1
	+ Từ đó: $0<y-x = x(\frac{y}{x}-1) < x(\sqrt[3]{2}-1)$ .Do đó $(y-x)^2<x^2(\sqrt[3]{2}-1)^2<\frac{1}{2}xy$. Suy ra: $0 \leq 2((y-x)^2-1) < xy$. Kết hợp với (2) ta có: $(y-x)^2-1 = 0$ hay $y = x+1$.	0.5
	Thay vào (1), ta có x = 4 và y = 5 .Lúc này m = 2, n = 3. Các cặp (m,n) thỏa bài tóan là: (0,0) ;(0,1) ;(2,3) .	0.5

Sở Giáo Dục & Đào Tạo TP. HỒ CHÍ MINH

Trường THPT *Chuyên*
Lê Hồng Phong

TECHCOMBANK

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN XV – NĂM 2009

Môn thi : **Toán** - Khối : **10**
Ngày thi : **04/04/2009**

Thời gian làm bài : **180 phút**

Ghi chú : Thí sinh làm mỗi câu trên 1 hay nhiều tờ giấy riêng và ghi rõ câu số ……. ở trang 1 của mỗi tờ giấy làm bài.. Đề này có **01** trang .

Câu 1: ***(4 điểm)***

Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x$.

Câu 2: ***(4 điểm)***

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn:

$$p^n = x^3 + y^3.$$

Câu 3: ***(4 điểm)***

Cho đoạn thẳng AC cố định với K là trung điểm. Hai điểm B và D phân biệt, di động và luôn đối xứng nhau qua K và đường thẳng BD không trùng với đường thẳng AC. Đường phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt AD và AB lần lượt tại I và J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ cắt nhau tại điểm M khác A. Gọi H là hình chiếu của M trên trung trực của AC và N là giao điểm của CH và KM. Chứng minh khi B di động như trên thì N di động trên một đường cố định.

Câu 4: ***(4 điểm)***

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \le 3.$$

Câu 5: ***(4 điểm)***

Cho tam giác ABC không cân có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A di động. Qua B dựng đường thẳng d vuông góc với BC, d cắt trung tuyến AI của tam giác ABC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu IH song song với KC thì điểm A di động trên đường cố định.

HẾT

Đáp án bài 1: ***(4 điểm).***

Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x$.

Giải:

Phương trình đã cho tương đương $(x+1)^3 = 3\sqrt[3]{3x+5} + 2$ (1). **(0,5)**

Đặt $\sqrt[3]{3x+5} = y+1$, suy ra $3x+5 = (y+1)^3$ và (1) trở thành $(x+1)^3 = 3y+5$. **(0,5)**

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^3 = 3y+5 \\ (y+1)^3 = 3x+5 \end{cases}$ **(1,0)**

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ trên, ta được

$(x+1)^3 - (y+1)^3 = -3(x-y)$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[(x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 3\right] = 0$ **(0,5)**

$\Leftrightarrow x = y$. **(0,25)**

(Vì $(x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 3 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$). **(0,5)**

Vậy ta có phương trình: $(x+1)^3 = 3x+5$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$. **(0,5)**

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x = 1$ và $x = -2$. **(0,25)**

Đáp án câu 2 (4 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn: $p^n = x^3 + y^3$ (*).

Giải:

➢ Với p = 2 ta có $2^1 = 1^3 + 1^3$. **(0,5)**

➢ Với p = 3 ta có $3^2 = 1^3 + 2^3$. **(0,5)**

➢ Ta chứng minh khi $p > 3$ thì không tồn tại các số n, x, y thỏa đề bài.

Thật vậy, giả sử ngược lại, chọn n, x, y thỏa (*) sao cho n bé nhất.

Do $p \neq 2$ nên $(x, y) \neq (1,1)$; khi đó:

$$x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy > 1 \text{ và } x + y > 1.$$ **(0,5)**

Do đó $x^2 - xy + y^2$ và $x + y$ đều là bội của p. **(0,5)**

$\Rightarrow (x+y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = 3xy \vdots p$. **(0,5)**

Do $p > 3$ nên $x \vdots p$ hoặc $y \vdots p$.

Mà $x + y \vdots p$ nên ta có x và y đều chia hết cho p. **(0,5)**

Điều này cho ta:

(*) $p^{n-3} = \left(\frac{x}{p}\right)^3 + \left(\frac{y}{p}\right)^3 \Leftrightarrow p^{n'} = x'^3 + y'^3$ với $(n', x', y') = \left(n-3, \frac{x}{p}, \frac{y}{p}\right)$

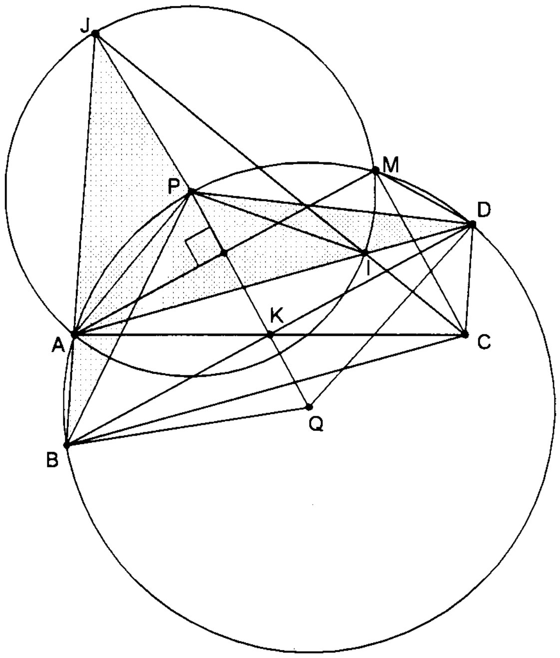
mà $n' < n$ (trái giả thiết). **(0,5)**

Vậy chỉ có $p = 2$ và $p = 3$ thỏa đề bài. **(0,5)**

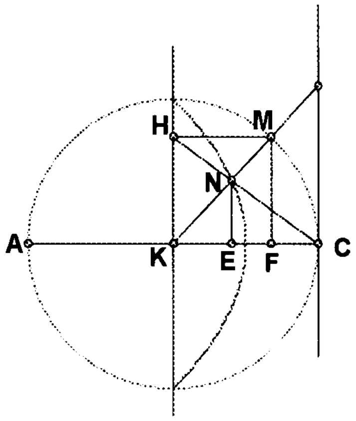
Câu hỏi 3: (*4 điểm*)

Cho đoạn thẳng AC cố định với K là trung điểm. Hai điểm B và D phân biệt, di động và luôn đối xứng nhau qua K và đường thẳng BD không trùng với đường thẳng AC. Đường phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt AD và AB lần lượt tại I và J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ cắt nhau tại điểm M khác A. Gọi H là hình chiếu của M trên trung trực của AC và N là giao điểm của CH và KM. Chứng minh khi B di động như trên thì N di động trên một đường cố định.

Giải:



Hình 1



Hình 2

➢ **(Xem *hình 1*)**

Gọi P, Q là tâm đường tròn (AIJ) và (ADB) $\Rightarrow$ PQ vuông góc AM (1)

Ta có $\widehat{AIJ} = \widehat{BCJ} = \widehat{DCJ} = \widehat{AJI}$ (2)

$$\widehat{PJA} = \frac{180^0 - \widehat{APJ}}{2} = 90^0 - \widehat{AIJ} \quad (3)$$

$$\widehat{PAD} = \frac{180^0 - \widehat{API}}{2} = 90^0 - \widehat{AJI} \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) suy ra $\widehat{PJA} = \widehat{PAI}$ (5) **(0,5)**

Mà PA = PJ (6)

Vì $\widehat{BJC} = \widehat{DCJ} = \widehat{BCJ}$ nên ΔBCJ cân tại B $\Rightarrow$ AD = BC = BJ (7)

Từ (5), (6) và (7) suy ra $\Delta PAD = \Delta PJB \Rightarrow$ PB = PD mà QB = QD **(0,5)**

$\Rightarrow$ PQ là trung trực của BD $\Rightarrow$ PQ vuông góc BD (8)

Từ (1) và (8) suy ra AM // BD (9) **(0,5)**

(9) $\Rightarrow$ AMDB là hình thang cân (do AMDB nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ và $\widehat{DBC} = \widehat{BDA} = \widehat{DBM}$

Do đó $\Delta DBM = \Delta DBC \Rightarrow$ BD vuông góc MC (10)

(9) và (10) $\Rightarrow \widehat{AMC} = 90^0 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn (K) đường kính AC cố định. **(0,5)**

➢ **(*Xem hình 2*)** Dựng NE $\perp$ AC và MF $\perp$ AC.

Ta có: $\dfrac{CE}{KC} = \dfrac{NE}{HK} = \dfrac{NE}{MF} = \dfrac{KN}{KM}$ **(0,5)**

mà KC = KM $\Rightarrow$ NK = EC **(0,5)**

$\Rightarrow$ NK = d(N; (Δ)) với Δ là đường thẳng vuông góc AC tại C. **(0,5)**

$\Rightarrow$ N thuộc parabol (P) có tiêu điểm K và đường chuẩn (Δ). **(0,5)**

Đáp án câu 4: ***(4 điểm)***

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\le 3.$$

Giải:

Đặt $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$, $y=\sqrt{\frac{c}{b}}$, $z=\sqrt{\frac{a}{c}}$, ta có $x,y,z>0$ và $xyz=1$.

Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\le 3 \qquad \textbf{(1,0)}$$

Giả sử $xy\le 1 \Rightarrow z\ge 1$.

➢ Ta chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\le\frac{2}{1+xy}$ (1).

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow (2+x^2+y^2)(1+xy)\le 2(1+x^2)(1+y^2)$

$\Leftrightarrow (1-xy)(x-y)^2\ge 0$ (đúng) **(0,5)**

➢ Ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\right)^2\le 2\left(\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+y^2}\right)$$

$$=4\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)\le\frac{8}{1+xy}=\frac{8z}{1+z} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Suy ra $\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\le 2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}$. **(0,5)**

Mặt khác, ta lại có $\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\le\frac{2}{1+z}$.

Suy ra $\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\le 2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}+\frac{2}{1+z}$.

Do vậy, ta sẽ chứng minh $2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}+\frac{2}{1+z}\le 3$. **(0,5)**

Thật vậy, ta có:

$$2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}+\frac{2}{1+z}\le 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2z(z+1)}+2\le 3(1+z) \qquad \textbf{(0,5)}$$

$$\Leftrightarrow 2z-2\sqrt{2z(z+1)}+(z+1)\ge 0$$

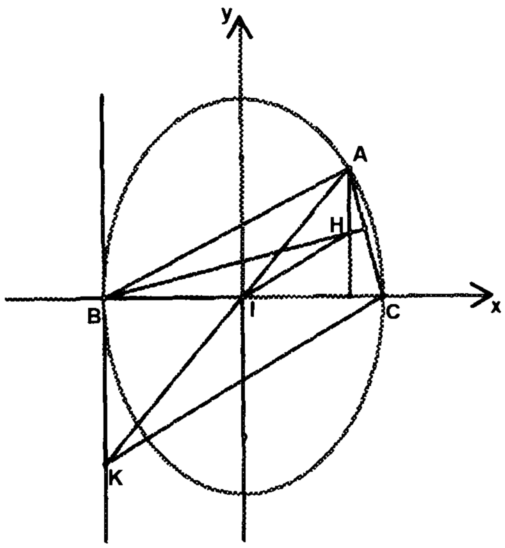
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2z}-\sqrt{z+1}\right)^2\ge 0. \qquad \textbf{(0,5)}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đáp án câu 5: ***(4 điểm)***

Cho tam giác ABC không cân có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A di động. Qua B dựng đường thẳng d vuông góc với BC, d cắt trung tuyến AI của tam giác ABC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu IH song song với KC thì điểm A di động trên đường cố định.

Giải:



Chọn hệ trục tọa độ Oxy với O trùng I và trục Ox là đường thẳng BC.

Chuẩn hóa BC = 2. Khi đó, tọa độ B(−1; 0) và C(1; 0).

Giả sử tọa độ điểm $A(x_0; y_0)$ với $y_0 \neq 0$ và $x_0 \neq 0$. **(0,5)**

Khi đó, trực tâm H(x, y) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ (x_0 - 1)(x+1) + y_0 y = 0 \end{cases} \quad \textbf{(0,5)}$$

$$\Leftrightarrow H\left(x_0; \frac{1 - x_0^2}{y_0}\right). \quad \textbf{(0,5)}$$

Gọi K là giao điểm của d và AI, khi đó tọa độ K là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{y_0}{x_0} x \end{cases} \qquad (x_0 \neq 0) \quad \textbf{(0,5)}$$

$$\Rightarrow \quad K(-1; -\frac{y_0}{x_0}). \quad \textbf{(0,5)}$$

Theo giả thiết ta có:

$$IH \,//\, KC \Rightarrow \overrightarrow{IH}; \overrightarrow{KC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{y_0}{x_0}.x_0 - 2\frac{1 - x_0^2}{y_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{1} + \frac{y_0^2}{2} = 1. \quad \textbf{(1,0)}$$

Vậy A di động trên đường (E): $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ cố định. **(0,5)**

Sở Giáo Dục & Đào Tạo TP. HỒ CHÍ MINH

Trường THPT *Chuyên*
Lê Hồng Phong

TECHCOMBANK

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN XV – NĂM 2009

Môn thi : **Toán** - Khối : **11**
Ngày thi : **04/04/2009**

Thời gian làm bài : **180 phút**

Ghi chú : Thí sinh làm mỗi câu trên 1 hay nhiều tờ giấy riêng và ghi rõ câu số ……. ở trang 1 của mỗi tờ giấy làm bài. Đề này có …01… trang

Câu 1 (4 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2-18=y^3+y \\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z \\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x \end{cases}$$

Câu 2: (4 điểm)

Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác nhọn. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng BD, BC. Chứng minh rằng các điểm C, D, E, F ở trên một đường tròn khi và chỉ khi các đường thẳng AB và CD vuông góc nhau .

Câu 3 (4 điểm)

Xét dãy số thực (x_n), $n \in N$, xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = 2009 \\ x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1})} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim x_n$.

Câu 4: (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số f(x;y) thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)=x^2+y^2+z^2 \quad \forall x,y,z \in R \\ f(x^2+y-f(0;x);0)=x+f^2(y;0)-f(0;y^2-f(0;y)) \quad \forall x,y \in R \end{cases}$$

Câu 5: (4 điểm)

Giả sử hàm số f: $N^* \to N^*$ thỏa : $(f(m)+f(n)) \mid (m+n)^{2009}$ $\forall m, n \in N^*$.
Chứng minh f(1), f(2), f(3), …. là cấp số cộng có công sai dương.

Hết.

Sở Giáo Dục & Đào Tạo TP. HỒ CHÍ MINH

Trường THPT *Chuyên*
Lê Hồng Phong

TECHCOMBANK

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN XV – NĂM 2009

Môn thi : **Toán** - Khối : **11**
Ngày thi : **04/04/2009**

Thời gian làm bài : **180 phút**

Ghi chú : Thí sinh làm mỗi câu trên 1 hay nhiều tờ giấy riêng và ghi rõ câu số ……. ở trang 1 của mỗi tờ giấy làm bài. Đề này có …01… trang

Câu 1 (4 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2-18=y^3+y \\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z \\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x \end{cases}$$

Câu 2: (4 điểm)

Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác nhọn. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng BD, BC. Chứng minh rằng các điểm C, D, E, F ở trên một đường tròn khi và chỉ khi các đường thẳng AB và CD vuông góc nhau .

Câu 3 (4 điểm)

Xét dãy số thực (x_n), $n \in N$, xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = 2009 \\ x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1})} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim x_n$.

Câu 4: (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số f(x;y) thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)=x^2+y^2+z^2 \quad \forall x,y,z \in R \\ f(x^2+y-f(0;x);0)=x+f^2(y;0)-f(0;y^2-f(0;y)) \quad \forall x,y \in R \end{cases}$$

Câu 5: (4 điểm)

Giả sử hàm số f: $N^* \to N^*$ thỏa : $(f(m)+f(n)) \mid (m+n)^{2009}$ $\forall m, n \in N^*$.

Chứng minh f(1), f(2), f(3), …. là cấp số cộng có công sai dương.

Hết.

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4

Môn thi : **Toán** - Khối : 11

Câu 1 : (4 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2-18=y^3+y \\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z \\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x \end{cases}$$

Giải:

Đặt $f(t) = 2t^3 + 3t^2 - 18$ và $g(t) = t^3 + t$ thì hệ phương trình được viết lại:

$$\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x) \end{cases}$$

Giả sử $x = \max(x, y, z)$ thì $\begin{cases} x\ge y \\ x\ge z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge g(y) \\ g(x)\ge g(z) \end{cases}$ (do hàm số g đồng biến) $\Rightarrow \begin{cases} g(x)\ge f(x) \\ g(z)\le f(z) \end{cases}$ .... (1,5 đ)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x\ge 2x^3+3x^2-18 \\ z^3+z\le 2z^3+3z^2-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+5x+9)\le 0 \\ (z-2)(z^2+5z+9)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ z\ge 2 \end{cases}$ ....(1 đ)

Từ đó suy ra: $2\le z\le x\le 2 \Rightarrow x=z=2$. Thế vào hệ phương trình ta được $y = 2$........................(1 đ)

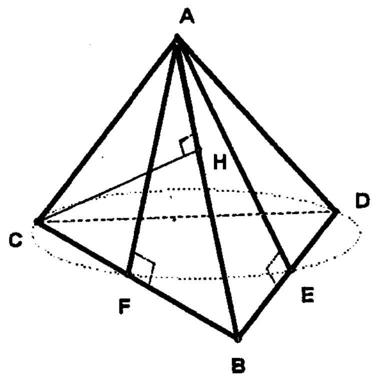
Thử lại ta thấy: $x = y = z = 2$ thoả hệ phương trình. ....(0,5 đ)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = 2$.

Câu 2: (4 điểm)

Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác nhọn . Gọi E , F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng BD, BC. Chứng minh rằng các điểm C,D,E,F ở trên một đường tròn khi và chỉ khi các đường thẳng AB và CD vuông góc nhau .

Giải :



+ Kẻ đường cao CH của tam giác nhọn ABC (H thuộc đoạn AB và khác A,B).

Ta có $AB \perp CH$ (1), A, C, F, H ở trên đường tròn đường kính AC và BH.BA=BF.BC (2) ....(1 đ)

+ Nếu C,D,E,F ở trên một đường tròn thì BE.BD=BF.BC (3) .

Từ (2) và (3) : BE.BD=BH.BA .Do đó A,H,E,D ở trên đường tròn với đường kính là AD .

Suy ra $AB \perp DH$ (4) . Từ (1) và (4) ta có $AB \perp (CHD)$ .Vì vậy $AB \perp CD$ ....(1,5 đ)

+ Nếu $AB \perp CD$ thì $AB \perp (CHD)$. Suy ra $AB \perp DH$ .Do đó A,H,E,D ở trên đường tròn với đường kính là AD.

Ta có : BE.BD=BH.BA (5).

Từ (5) và (2) : BE.BD=BF.BC.Suy ra C, D, E, F ở trên một đường tròn ....(1,5 đ)

Câu 3 (4 điểm)

Xét dãy số thực (x_n), $n \in N$, xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = 2009 \\ x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1})}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn, và tìm $\lim x_n$.

Giải:

Ta có $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \forall x \geq 0$, dấu = xảy ra khi và chỉ khi x=0 (phải chứng minh bđt trái)...... (1 đ)

$\sin x \leq x, \forall x \geq 0 \Rightarrow x_n \geq 0, \forall n \in N$ (1) ....(0,5 đ)

$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x, \forall x \geq 0 \Rightarrow \sin(x_{n-1}) \geq x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3}{6}, \forall n \geq 1 \Rightarrow 6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1}) \leq x_{n-1}^3, \forall n \geq 1$

$\Rightarrow x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1})} \leq x_{n-1}, \forall n \geq 1$ (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow$ (x_n) có giới hạn hữu hạn...(1,5 đ)

Gọi $\lim x_n = \alpha$, ta có $\alpha = \sqrt[3]{6\alpha - 6\sin\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ....(1 đ)

Câu 4. (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f(x;y)$ thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)=x^2+y^2+z^2 \ \forall x,y,z\in R \\ f\left(x^2+y-f(0;x);0\right)=x+f^2(y;0)-f\left(0;y^2-f(0;y)\right) \ \forall x,y\in R \end{cases}$$

Giải.

Ta xét điều kiện đầu tiên $f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)=x^2+y^2+z^2 \ \forall x,y,z\in R$

Cho $x=y=z=0\Rightarrow f(0;0)=0$

Cho $y=z=0\Rightarrow f(0;x)+f(x;0)=x^2 \ \forall x\in R$ (1)..(0,5 đ)

Cho $z=0\Rightarrow f(x;y)=x^2+y^2-f(y;0)-f(0;x)=f(x;0)+f(0;y) \ \forall x,y\in R$ (2)................(0,5 đ)

Xét điều kiện thứ hai của giả thiết:

$f\left(x^2+y-f(0;x);0\right)=x+f^2(y;0)-f\left(0;y^2-f(0;y)\right) \ \forall x,y\in R$

Theo (1) ta thu được:

$f\left(y+f(x;0);0\right)=x+f^2(y;0)-f\left(0;f(y;0)\right)=x+f\left(f(y;0);0\right) \ \forall x,y\in R$................................(1 đ)

Đặt $g(x)=f(x;0)$ khi đó ta viết lại điều kiện: $g\left(y+g(x)\right)=x+g\left(g(y)\right) \ \forall x,y\in R$

Khi đó do $g(0)=f(0;0)=0$

Cho $y=0\Rightarrow g\left(g(x)\right)=x \ \forall x\in R$

Cho $x=0\Rightarrow g(y)=g\left(g(y)\right)=y \ \forall y\in R$ ....(1 đ)

Ta có $f(0;x)=x^2-f(x;0)=x^2-x \ \forall x\in R$

Do đó theo (2) ta có: $f(x;y)=f(x;0)+f(0;y)=x+y^2-y \ \forall x;y\in R$ ....(0,5 đ)

Thử lại hàm số $f(x;y)=x+y^2-y$ thỏa mãn điều kiện bài ra..(0,5 đ)

Câu 5: (4 điểm)

Giả sử hàm số f: $N^* \to N^*$ thỏa : $(f(m) + f(n)) \mid (m + n)^{2009}\ \forall m, n \in N^*$
Chứng minh f(1), f(2), f(3), ... là cấp số cộng có công sai dương.

Đáp án:

• Trước hết ta chứng minh f là đơn ánh (1).
Thật vậy , giả sử f không là đơn ánh

$\Rightarrow \exists\ a, b \in N^*, a < b$ sao cho $f(a) = f(b)$
Khi đó có

$(f(a) + f(n)) \mid (a + n)^{2009}\ \forall n \in N^*$ và $(f(a) + f(n)) = (f(b) + f(n)) \mid (b + n)^{2009}\ \forall n \in N^*$
$\Rightarrow f(a) + f(n)$ là một ước chung của $(a + n)^{2009}$ và $(b + n)^{2009}$, mà $f(a) + f(n) \geq 2$.
$\Rightarrow ((a + n)^{2009}, (b + n)^{2009}) \neq 1\ \forall n \in N^*$
$\Rightarrow (a + n, b + n) \neq 1\ \forall n \in N^*$
$\Rightarrow (a + n, b - a) \neq 1\ \forall n \in N^*$ (α)
Lấy p là một số nguyên tố lớn hơn b và lấy $n = p - a$ ta có $(a + n, b - a) = (p, b - a) = 1$ mâu thuẫn với (α).

Vậy f đơn ánh. ....(1đ)
• Lấy t tùy ý thuộc N^*, ta xét $f(t + 1) - f(t)$
$\forall n \in N^*$ ta có $(f(n) + f(t)) \mid (n + t)^{2009}$ và $(f(n) + f(t + 1)) \mid (n + t + 1)^{2009}$
mà $(n + t, n + t + 1) = 1 \Rightarrow ((n + t)^{2009}, (n + t + 1)^{2009}) = 1$
$\Rightarrow (f(n) + f(t), f(n) + f(t + 1)) = 1$
$\Rightarrow (f(n) + f(t), f(t + 1) - f(t)) = 1\ \forall n \in N^*$ (β)...(1 đ)
Từ $(\beta) \Rightarrow f(t + 1) - f(t) = \pm 1\ \forall t \in N^*$ (2)
Thật vậy, nếu tồn tại t sao cho $f(t + 1) - f(t) \neq \pm 1$ thì tồn tại số nguyên tố q là ước của $f(t + 1) - f(t)$.

Lấy $k \in N^*$ sao cho $q^k > t$ và lấy $n = q^k - t$ ta có
$(f(n) + f(t)) \mid (n + t)^{2009} = q^{2009k} \Rightarrow q \mid (f(n) + f(t))$
mà ta đã có $q \mid (f(t + 1) - f(t))$

$\Rightarrow$ q là một ước chung của $(f(n) + f(t))$ và $(f(t + 1) - f(t))$: mâu thuẫn với (β)................................(1 đ)

Vậy ta có (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(t + 1) - f(t) = 1\ \forall t \in N^*$ hoặc $f(t + 1) - f(t) = -1\ \forall t \in N^*$
Mặt khác do $f(n) \in N^*\ \forall n \in N^*$ nên không thể có $f(t + 1) - f(t) = -1\ \forall t \in N^*$
Vậy ta có $f(t+1) - f(t) = 1\ \forall t \in N^*$ tức là dãy f(1), f(2), f(3), f(4),.... là một cấp số cộng công sai 1. (1 đ)