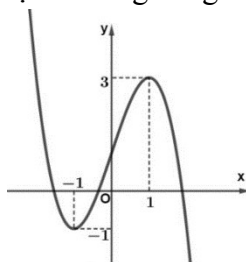


48 Câu đúng sai (Tính đơn điệu của hàm số)
 Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây.



- *a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- *b) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(-1; -1)$.
- *c) Gọi a và b lần lượt là tung độ của điểm cực tiểu và điểm cực đại của hàm số ta có $a^2 + b^2 = 10$.
- *d) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $x - y + 2 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

- a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ **Đúng**.
 Vì hàm số đồng biến trên các khoảng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- b) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(-1; -1)$ **Đúng**
- c) Gọi a và b lần lượt là hoành độ của điểm cực tiểu và điểm cực đại của hàm số ta có $a^2 + b^2 = 10$ **Đúng**
 Vì tung độ của điểm cực tiểu là $a = -1$ và điểm cực đại là $b = 3$ nên $a^2 + b^2 = 10$.
- d) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là **(d):** $x - y + 2 = 0$ **Đúng**
 Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là **A(-1;1); B(1;3)**. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B là:
(d): $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-3)x^2$.

- a) Hàm số đạt cực trị tại $x = -1; x = 3; x = 0$.
- *b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-1; 3)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.
- *d) Hàm số $y = f(3x)$ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

- a) Hàm số đạt cực trị tại $x = -1; x = 3; x = 0$ **Sai**

$$f'(x) = (x+1)(x-3)x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vi

Tuy nhiên $x=0$ là nghiệm bậc chẵn của $f'(x)$ nên $x=0$ không là điểm cực trị.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-1;3)$. **Đúng**

Cho $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)x^2 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

Suy ra hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-1;3)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. **Sai**

Cho $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)x^2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$

Ta lập được bảng biến thiên $f(-1)$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-1)$		$f(3)$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên thì $-1 < 3$ nhưng $f(-1) > f(3)$ nên hàm số $y=f(x)$ không thể đồng biến trên $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

d) Hàm số $y=f(3x)$ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. **Đúng**

Do $f'(x) = (x+1)(x-3)x^2$ nên ta có $y' = [f(3x)]' = 3f'(3x) = 3(3x+1)(3x-3)(3x)^2 = 3f'(3x) = 27x^2(3x+1)(3x-3)$

Điều kiện hàm $y=f(3x)$ nghịch biến là $y' < 0 \Leftrightarrow 27x^2(3x+1)(3x-3) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$

Hàm số chỉ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	3	1	$+\infty$

*a) Giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 3.

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

*c) $f(-10) > f(-3)$.

*d) Đồ thị hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Giá trị cực đại của hàm số bằng 3. **Đúng**

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$. Sai

c) $f(-10) > f(-3)$. **Đúng** vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ nên $f(-10) > f(-3)$.

d) Đồ thị hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh tam giác có diện tích bằng 4. **Đúng**

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0; 3), B(-2; 1), C(2; 1)$

Tam giác ABC cân ở A . Gọi $H(0; 1)$ là trung điểm đoạn BC .

Ta có $AH = 2, BC = 4$. Diện tích ABC là $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 4$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$		3		$+\infty$		

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; 3)$ và $(0; +\infty)$.

*b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

*c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với hoành độ không âm là $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$.

*d) Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 3.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$		3		$+\infty$		
							
			0		0		

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; 3)$ và $(0; +\infty)$ **Sai**.

Vì hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ **Đúng**.

Vì hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với hoành độ không âm là $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$ **Đúng**

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ không âm là $A(0;3)$ và $B(1;0)$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với hoành độ không âm là $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$.

d) Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 3 **Đúng**.

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ không âm là $A(0;3)$, $B(1;0)$ và $C(-1;0)$ nên diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} |y_A - y_B| \cdot |x_B - x_C| = \frac{1}{2} |3 - 0| \cdot |1 + 1| = 3$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$

a) Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

*b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

*c) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = -1$.

d) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai cực trị A và B . Điểm $M(0;-1)$ thuộc đường thẳng AB .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

$$y = f(x) = x^3 - 3x \text{ có } f'(x) = 3x^2 - 3; f'(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

BXD:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+

Từ BXD ta thấy

a) Sai.

b) Đúng.

c) Đúng (Do y' đổi dấu từ - sang + khi qua 1 nên $x=1$ là điểm cực tiểu).

d) Sai. Ta có đồ thị có 2 điểm cực trị là $A(-1;2), B(1;-2)$ có pt đường thẳng qua 2 điểm A, B là $2x + y = 0$ nên điểm $M(0;-1)$ không thuộc đường thẳng AB .

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				1			$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -2 -2

Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

*a) $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

b) $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

*c) $\forall x_1, x_2 \in (2;+\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

d) $\forall x_1, x_2 \in (-\infty;+\infty), f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

- a) Dựa vào BBT, ta có: $f'(x) > 0, \forall x \in (-2; 0)$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Vậy a) đúng.
b) Tương tự b) sai.
c) Trên khoảng $(2; +\infty)$ hàm số đồng biến nên $\forall x_1, x_2 \in (2; +\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Do đó c) đúng.
d) Theo BBT, ta có $f(-2) = f(2) = -2$ nên d) sai.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình dưới đây.

O x y -1 1 2 2 -2

Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
***b)** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
***c)** Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm 3 điểm cực trị.
d) Hàm số $y = f(3 - x^2)$ có 6 điểm cực trị

Lời giải

a) sai	b) đúng	c) đúng	d) sai
--------	---------	---------	--------

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

+

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

- a) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ là sai.
b) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ là đúng.
c) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có ba điểm 3 điểm cực trị là đúng
d) Ta có $y = f(3 - x^2)$

$$y' = -2x \cdot f'(3 - x^2)$$

+

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3 - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

+

Do $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = f(3 - x^2)$ có 7 điểm cực trị
 Vậy d) sai.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \ln x, \forall x \in (0; +\infty)$. Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

*a) Hàm số trên luôn đồng biến trên tập xác định.

*b) Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

c) Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có một điểm cực trị.

d) Có 6 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - mx)$ luôn đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Ta có: $y' = f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0 \forall x \in (0; +\infty)$.
 Vậy hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

b) Ta có: $f(x^2 - 2x) = \ln(x^2 - 2x)$.

ĐKXD: $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases}$. Vậy $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

c) Ta có: $[f(x^2 - 2x)]' = [\ln(x^2 - 2x)]' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Xét $[f(x^2 - 2x)]' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (KTĐK). Vậy hàm số không có cực trị.

d) Ta có: $y = f(x^2 - mx) = \ln(x^2 - mx)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - mx > 0 \\ [f(x^2 - mx)]' = \frac{2x - m}{x^2 - mx} > 0 \end{cases} \forall x \in (3; +\infty)$.

ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ x > \frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > m \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3$

Do m là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3\}$. Có ba giá trị nguyên dương của m

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x + 1}$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

*a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

c) Với mọi $a, b \in (1; +\infty)$ và $a < b$ thì $f(a) < f(b)$.

*d) Gọi A, B là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đường thẳng AB cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

--	--	--	--

a) Đúng.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta có: hoặc $x = -2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$-$
y	$+\infty$	6	$+\infty$	2	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$. Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ là khẳng định đúng.

b) Sai.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ là khẳng định sai vì $y = f(x)$ không xác định tại $x = -1 \in (-2; 0)$.

c) Sai.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ nên với mọi $a, b \in (1; +\infty)$ và $a < b$ thì $f(a) > f(b)$. Do đó, khẳng định c sai.

d) Đúng.

$$y = \frac{(-x^2 + 2x + 2)'}{(x+1)'} = -2x + 2$$

Đường thẳng AB có phương trình:

Phương trình hoành độ giao điểm của AB và Ox có dạng: $-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy AB cắt Ox tại điểm $M(1; 0)$. Vậy khẳng định d đúng.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
y'		$-$	0	$-$
y	3	1	3	0

Các khẳng định sau đúng hay sai?

*a) Trên khoảng $(4; +\infty)$ thì $y' < 0$.

b) Trên khoảng $(-4; +\infty)$ thì $y' > 0$.

*c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 4)$.

*d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.

Từ bảng biến thiên, ta có $y' < 0$ trên khoảng $(4; +\infty)$

b) Sai.

Từ bảng biến thiên, ta có $y' > 0$ trên khoảng $(-4; 4)$ và $y' < 0$ trên khoảng $(4; +\infty)$.

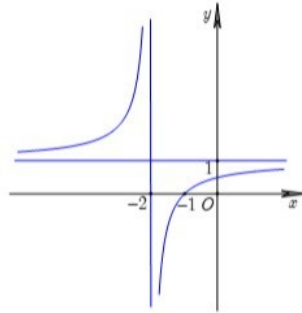
c) Đúng.

Từ bảng biến thiên, ta có trên khoảng $(-4; 4)$ đồ thị hàm số có hướng đi lên từ trái qua phải nên hàm số đồng biến.

d) Đúng.

Vì dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Các khẳng định sau đúng hay sai?

*a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

*c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

*d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

b) Sai

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

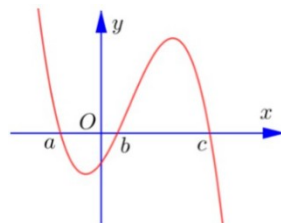
c) Đúng

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

d) Đúng

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 12. Đồ thị của đạo hàm bậc nhất $y = f'(x)$ của hàm số $f(x)$ được cho trong hình dưới đây.



Trong mỗi ý ở câu sau, hãy chọn đúng hay sai.

a) Với $\forall x \in (-\infty; a)$ thì $f'(x) > 0$.

b) Với $\forall x \in (a; c)$ thì $f'(x) < 0$.

*c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(b; c)$.

*d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(c; +\infty)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy trên khoảng $(a; b)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên với $\forall x \in (-\infty; a) f'(x) < 0$.

b) Sai.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy trên khoảng $(a; b)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm dưới trục hoành và trên khoảng $(b; c)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm trên trục hoành nên với $\forall x \in (a; b) f'(x) < 0$ và với $\forall x \in (b; c) f'(x) > 0$.

c) Đúng.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy trên khoảng $(b; c)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(b; c)$.

d) Đúng

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy trên khoảng $(c; +\infty)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(c; +\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+m}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $m \geq -1$.

*b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ khi $m \geq 1$.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ khi $m \leq 5$.

*d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 7)$ khi $m \geq 2$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

Ta có hàm số $y = \frac{x-1}{x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $f'(x) = \frac{m+1}{(x+m)^2}$.

a) Sai: Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

b) Đúng: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \notin (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

c) Sai: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -m \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 5$$

d) Đúng: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 7)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \notin (-2; 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -m \leq -2 \\ -m \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \geq 2 \\ m \leq -7 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$$

Câu 14. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

*a) Không tồn tại m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Khi $m > 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Khi $m = \frac{5}{6}$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

*d) Khi $m \leq 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

a) Đúng: Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \text{ (vô lý).}$$

Vậy không tồn tại m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Sai: Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \text{ (vô lý).}$$

Vậy không tồn tại m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Sai: Vì $a = 2 > 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên một đoạn khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1 x_2 = m(m+1) \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét, ta có

Để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 thì

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4 \\ \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) &= 4 \Leftrightarrow 1 = 4 \text{ (vô lý).} \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại m để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

d) Đúng: Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \text{ (vô lý).}$$

Trường hợp 2: Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$x_1 < x_2 \leq 2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 2m - 3 < 0 \\ m(m+1) - 2(2m+1) + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m < \frac{3}{2} \\ m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1]$$

Vậy $m \leq 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 15. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $80(cm).50(cm)$, người ta cắt đi ở bốn góc của tấm tôn bốn hình vuông bằng nhau để khi gấp lại được một chiếc hộp (không nắp). Gọi cạnh hình vuông được cắt đi là $x(cm)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Điều kiện của x là $0 < x < 50$.
- b) Thể tích V của hộp là: $V = x(80 - x)(50 - x)$.
- c) Thể tích của hình hộp khi $x = 10(cm)$ là $28000(cm^3)$.
- *d) Thể tích của hình hộp lớn nhất là $18000(cm^3)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

Gọi cạnh hình vuông được cắt đi là $x(cm)$, $0 < x < 25$

Thể tích V của hộp là: $V = x(80 - 2x)(50 - 2x)$

Xét hàm số $f(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x)$ ($0 < x < 25$)

Với $x \in (0; 25)$, ta có:

$$f'(x) = 12x^2 - 520x + 4000; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	25		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	18000	↘	0

Suy ra V đạt giá trị lớn nhất bằng $18000(cm^3)$ khi $x = 10$.

- a) Sai.
- b) Sai.
- c) Sai.
- d) Đúng.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 5m - 4$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- *a) Khi $m = 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ với mọi $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

*c) Khi $m \leq \frac{3}{2}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

d) Khi $m \leq 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + (6m - 3)$.

a) Đúng: Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 3(6m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy $m = 1$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Sai: Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + (6m - 3)$ và do $a = 3 > 0$ nên không tồn tại m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đúng: Vì $a = 3 > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; 3)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in (2; 3) \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + (6m - 3) \geq 0 \forall x \in (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow m(2 - 2x) \geq 1 - x^2 \forall x \in (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1 - x^2}{2 - 2x} \forall x \in (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1 + x}{2} < \frac{3}{2} \forall x \in (2; 3).$$

d) Sai: Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$ thì ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 3(6m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Trường hợp 2: Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$5 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 \leq x_1 - 5 < x_2 - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 10 > 0 \\ x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 25 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 18m + 9 > 0 \\ 2m - 10 > 0 \\ 2m - 1 - 5.2m + 25 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ m > 5 \\ m \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Vậy $m = 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-4		-3		-4		$+\infty$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

*a) Điểm cực đại của hàm số là $x=0$.

b) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 1.

c) Hàm số $y=|f(x)|$ có 3 cực trị.

d) Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đúng: Điểm cực đại của hàm số là $x=0$

b) Sai: Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -4

c) Sai: Hàm số $y=f(x)$ có 3 cực trị và đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên hàm số $y=|f(x)|$ có 5 cực trị.

d) Sai: Vì hàm số $y=f(x)$ là hàm trùng phương nên $y=f(|x|)=f(x)$ có 3 cực trị

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+		-	0	-

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

*b) Hàm số đã cho có 3 cực trị.

*c) Hàm số $y=f(|x|)$ có 3 cực trị.

d) Hàm số $y=f(-2x+1)$ có 5 cực trị.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

Ta có BBT của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	-	0	-
$f(x)$									

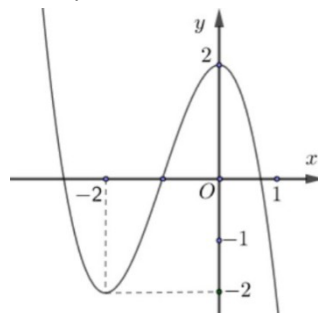
a) Sai: Điểm cực đại của hàm số là $x=0$

b) Đúng: Hàm số có 3 cực trị.

c) Đúng: Hàm số $y=f(|x|)$ có 3 cực trị.

d) Sai: Vì số cực trị của hàm số $y=f(-2x+1)$ bằng số cực trị của hàm số $y=f(x)$

Câu 19. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

*c) Hàm số $y=|f(x)|$ có 5 cực trị.

*b) Hàm số đã cho có 2 cực trị.

*d) Hàm số $y=f(-x^2+x)$ có 3 cực tiểu.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Sai: Điểm cực đại của hàm số là $x=0$.

b) Đúng: Hàm số có hai cực trị.

c) Đúng: Hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị và đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y=|f(x)|$ có 5 cực trị.

d) Đúng: Từ đồ thị ta có hàm số bậc ba $y=f(x)$ có hai điểm cực trị $x=-2; x=0$

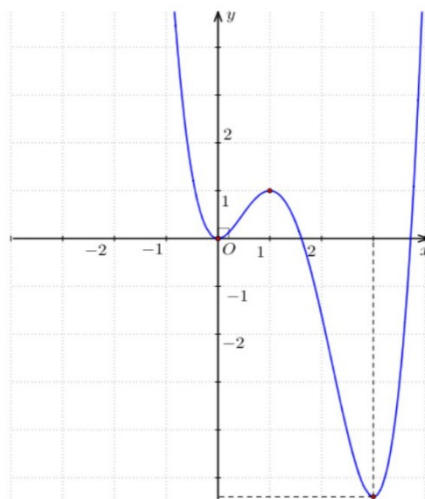
Đặt $u=-x^2+x$. Ta có $u'=-2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(-x^2+x)$

x	$-\infty$			$\frac{1}{2}$			$+\infty$
u	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{4}$	0	-2	$-\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$
		-2	2	$f(\frac{1}{4})$	2	-2	

Vậy hàm số $y=f(-x^2+x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 20. Cho hàm đa thức bậc năm $y=f(x)$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

*c) Hàm số $y=f(3x-2024)$ có 2 cực trị.

b) Hàm số đã cho có 3 cực trị.

d) Hàm số $g(x)=f(x)+2x$ có 3 cực trị.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

Ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $0, a, b$.

Ta có BBT của hàm số $y=f(x)$

x	0		a		b		
f'(x)	+	0	+	0	-	0	+
f(x)							

a) Sai: Điểm cực đại của hàm số là $x = a$.

b) Sai: Hàm số có hai cực trị

c) Đúng: Vì số cực trị của hàm số $y = f(3x - 2024)$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$.

d) Sai: Ta có $g'(x) = f'(x) + 2$

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2$ có đúng 2 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x) = f(x) + 2x$ có đúng 2 cực trị.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

*a) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

b) Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là 0.

*c) Hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực tiểu.

d) Hàm số $g(x) = f^3(x) + 3f^2(x) + 2020$ có 7 điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

b) Sai. Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là -2.

c) Đúng. Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra được BBT của hàm số $y = |f(x)|$

x	$-\infty$	x_1	-1	0	1	x_2	$+\infty$
$y = f(x) $		0	2	1	2	0	

Ta thấy hàm số có 3 điểm cực tiểu.

d) Sai. Ta có $g(x) = f^3(x) + 3f^2(x) + 2020$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x)[3f^2(x) + 6f(x)] = 3f'(x)f(x)[f(x) + 2]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = -2 \end{cases}$$

Ta có

Dựa vào BBT của hàm số $y = f(x)$ ta thấy

PT: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$

$f(x)=0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ là hai nghiệm đơn

$f(x)=-2$ có 2 nghiệm kép là $x=\pm 1$

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn nên hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		1		4		$-\infty$

a) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=4$.

*b) Giá trị cực tiểu của hàm số là $y=1$.

*c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

*d) Hàm số $y=f(x)$ có 3 số dương trong các hệ số a,b,c,d .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Sai: Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$.

b) Đúng: Từ bảng biến thiên suy ra Giá trị cực tiểu của hàm số là $y=1$.

c) Đúng: Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;3)$ suy $(-1;1) \subset (-2;3)$.

d) Đúng:

Ta có: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $A(-2;1), B(3;4)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} f(-2)=1 \\ f(3)=4 \\ f'(-2)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a+4b-2c+d=1 \\ 27a+9b+3c+d=4 \\ 12a-4b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{6}{125} \\ b=\frac{9}{125} \\ c=\frac{108}{125} \\ d=\frac{257}{125} \end{cases} \text{ . Trong các số } a,b,c,d \text{ có 3 số dương.}$$

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3mx^2+3(2m-1)x+1$, m là tham số.

*a) Với $m=0$, hàm số có dạng $y=x^3-3x+1$.

b) Với $m=0$, điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;2)$

*c) Hàm số $y=f(x)=x^3-3mx^2+3(2m-1)x+1$, đạt cực đại tại $x=0$, khi $m=\frac{1}{2}$.

*d) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi và chỉ khi $m=1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng: Thay $m=0$ vào hàm số ta được $y=x^3-3x+1$.

b) Sai: Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1; 3)$

c) Đúng: Ta có: $f'(x)=3x^2-6mx+3(2m-1)$, $f''(x)=6x-6m$

Theo giả thiết $x_{cd}=0$, suy ra $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f''(0)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2m-1)=0 \\ -6m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

d) Đúng:

$$y'=3x^2-6mx+3(2m-1)$$

Ta có: $\Delta'=(-3m)^2-3.3.(2m-1)$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta'\leq 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2-18m+9<0 \Leftrightarrow 9(m^2-2m+1)\leq 0 \Leftrightarrow 9(m-1)^2\leq 0 \Leftrightarrow m=1$$

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)=-\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m-3)x+2$, trong đó m là tham số.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

*a) $y'=-x^2+2(m-1)x+m-3$

*b) Khi $m=0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Có ít nhất một giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng.

Ta có: $y'=-x^2+2(m-1)x+m-3$

b) Đúng.

Với $m=0$, ta có: $y=-\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=-x^2-2x-3<0, \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Sai.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases}$ (vô lý).

Do đó, không có giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Sai.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-x^2+2(m-1)x+m-3$

$$\Delta'=(m-1)^2+m-3=m^2-m-2$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $y'\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-m-2\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq m\leq 2$$

Các giá trị nguyên của m thỏa mãn là: $-1; 0; 1; 2$ (4 giá trị).

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

*b) Hàm số có đạo hàm là $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

*c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1;1)$ khi $m = \frac{17}{7}$.

*d) Với $m \geq \frac{2}{3}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $[2; +\infty)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Sai: Ta có $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Hàm số có đạo hàm là $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

c) Đúng: Đồ thị hàm số đã đi qua điểm $M(1;1)$ suy ra khi

$$1 = \frac{1}{3}m - (m-1) + 3(m-2) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \frac{17}{7}$$

d) Đúng: Với $m \geq \frac{2}{3}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $[2; +\infty)$.

Hàm số đồng biến trên $[2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \geq 0, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 3) + 2x - 6 \geq 0, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{6-2x}{x^2-2x+3}, \forall x \geq 2 \text{ (do } x^2 - 2x + 3 > 0, \forall x \geq 2)$$

Bài toán trở thành:

$$\text{Tìm } m \text{ để } f(x) = \frac{6-2x}{x^2-2x+3} \leq m, \forall x \geq 2$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 12x + 6}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{6}$$

Bảng biến thiên:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 2 & 3+\sqrt{6} & +\infty & y' & -0+ & y & \frac{2}{3} & \frac{2-\sqrt{6}}{2} & 0 \end{array}$$

Ta cần có: $\max_{[2; +\infty)} f(x) \leq m \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$. Đó là các giá trị cần tìm của tham số m .

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{x+4}{x+m}$ với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

*a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$

*b) Khi $m=1$, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

*c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow m < 4$.

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty) \Leftrightarrow -6 < m < 4$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) **Đúng:** Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$y = \frac{x+4}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$$

b) **Đúng:** Khi $m = 1$,

Do đó, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

$$y = \frac{x+4}{x+m} \Rightarrow y' = \frac{m-4}{(x+m)^2}$$

c) **Đúng:**

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow m-4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

d) **Sai:** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (6; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ -m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq m < 4.$$

$$y = \frac{mx+3m-4}{x-m}$$

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{mx+3m-4}{x-m}$ với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có hai điểm cực trị

b) Khi $m = -1$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

*c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow -4 < m < 1$

*d) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. Số phần tử của S là 3.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) **Sai:** Hàm số không có cực trị

$$y = \frac{-x-7}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{6}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$$

b) **Sai:** Khi $m = -1$,

Do đó, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

$$y' = \frac{-m^2-3m+4}{(x-m)^2}$$

c) **Đúng:**

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow -m^2-3m+4 > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 1$

d) **Đúng:** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty; -2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2-3m+4 > 0 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 1 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 1$$

$S = [-2; -1; 0] \Rightarrow$ số phần tử của S là 3

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{x+m}$ với m là tham số, $x^1 - m$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

*a) $y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \cdot x^1 - m$

*b) Khi $m = -2$, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

*c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $m < -1$

d) Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -3)$. Khi đó $S = 9$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng

$y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \cdot x^1 - m$

b) Đúng

$m = -2: y' = \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \cdot x^1 - 2$

Khi

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

c) Đúng

$y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \cdot x^1 - m$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng khi $-m-1 > 0 \Rightarrow m < -1$

d) Sai

$y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \cdot x^1 - m$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ khi $\begin{cases} -m-1 < 0 \\ -m^3 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \leq 3 \end{cases} \Rightarrow -1 < m \leq 3$

$S = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số, $x^1 - m$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

*a) Khi $m = -1$, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

b) Hàm số luôn có hai đường tiệm cận.

*c) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Số phần tử của S là 3

d) Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(5; +\infty)$. Khi đó $T = 32$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng

$$m = -1: y = \frac{5}{(x-1)^2} > 0 \quad x \neq 1$$

Khi

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

b) Sai

Khi $m = 0: y = 0$ thì hàm số không có đường tiệm cận.

c) Đúng

$$y = \frac{m^2 - 4m}{(x+m)^2} \quad x \neq -m$$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng khi $m^2 - 4m < 0 \Rightarrow 0 < m < 4$

$$S = \{1; 2; 3\}$$

d) Sai

$$y = \frac{m^2 - 4m}{(x+m)^2} \quad x \neq -m$$

Hàm số nghịch biến trên $(5; +\infty)$ khi $\begin{cases} m^2 - 4m < 0 \\ -m \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \geq -5 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 4$
 $T = 1 + 2 + 3 = 6$

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$, (m là tham số). Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

***a)** Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

***b)** Với $m = 0$ thì hàm số có dạng $y = \frac{x^2}{x-1}$.

c) Hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

d) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi m thuộc $[a; b]$. Khi đó $a + 5b = 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Đúng: Tập xác định hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Đúng: Với $m = 0$ thì hàm số có dạng $y = \frac{x^2}{x-1}$.

c) Sai: Với $m = 0: y = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Từ BBT của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$ và $(1; 2)$

$\Rightarrow$ Hàm số không nghịch biến trên $(1; +\infty)$

$\Rightarrow$ Mệnh đề b sai

d) Sai: + TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Xét hai trường hợp

TH1: Khi $m = -1$, ta có hàm số $y = \frac{2x-6}{x-1}$ và $y' = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D$

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định

Vậy, $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$y' = \frac{(m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m}{(x-1)^2}$$

TH2: Khi $m \neq -1$, ta có

Đặt $g(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m$ và ta có y' cùng dấu với $g(x)$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 + 4m(m+1) \leq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(5m+1) \leq 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq -\frac{1}{5}$$

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $\left[-1; -\frac{1}{5}\right]$

Câu 31. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$ (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

*a) Ta luôn có $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = x - 5 + \frac{12}{x + 2}$.

*b) Đồ thị hàm số (C) có 2 điểm cực trị.

c) Điểm $M(0; -1)$ là giao điểm của trục tung với tiệm cận xiên của (C).

*d) Đồ thị hàm số (C) có 2 cực trị và đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có phương trình $y = 2x - 3$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng: Ta luôn có $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = x - 5 + \frac{12}{x + 2}$.

$$y' = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x + 2)^2}$$

b) Đúng:

$$\text{Xét } y' = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

Vậy đồ thị hàm số (C) có 2 điểm cực trị.

c) Sai: Khi $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = x - 5 + \frac{12}{x + 2}$

$$\begin{cases} y = x - 5 + \frac{12}{x + 2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12}{x + 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x - 5$$

Ta có là tiệm cận xiên

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục tung là điểm $M(0; 5)$.

$$y' = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x+2)^2}$$

d) Đúng:

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) .

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = \frac{u(x)}{v(x)}, \begin{cases} u(x) = x^2 - 3x + 2 \\ v(x) = x + 2 \end{cases}$$

Đặt

$$\Rightarrow y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)}$$

Mặt khác:

$$y'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)} = 0 \Rightarrow u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = 2x_0 - 3$$

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ có đồ thị là (C) .

*a) Đạo hàm y' của hàm số là $y' = 1 - \frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$.

*b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho lớn hơn giá trị cực tiểu của hàm số.

d) Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) , diện tích tam giác OAB bằng 2.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng.

$$y = x - 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0.$$

b) Đúng.

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x \neq 0.$$

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			-3		1	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

c) Sai.

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x \neq 0.$$

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y								

Diagram illustrating the mapping of the real line x to the complex plane y via the function $y = x^3 - 3x$. The real axis x is marked with $-\infty, -1, 0, 1, +\infty$. The derivative y' is marked with $+$ for $x < -1$, 0 at $x = -1$, $-$ for $-1 < x < 1$, 0 at $x = 1$, and $+$ for $x > 1$. The image y is marked with $-\infty$ at $x = -\infty$, -3 at $x = -1$, 0 at $x = 0$, 1 at $x = 1$, and $+\infty$ at $x = +\infty$. Arrows indicate the mapping: from $-\infty$ to $-\infty$, from -1 to -3 , from 0 to 0 , from 1 to 1 , and from $+\infty$ to $+\infty$.

Từ bảng biến thiên ta có $y_{\text{CD}} = -3$ và $y_{\text{CT}} = 1$.

d) **Sai.**

Toạ độ hai điểm cực trị là $A(-1; -3)$, $B(1; 1)$.

$$OA = \sqrt{10}, OB = \sqrt{2}, AB = 2\sqrt{5}.$$

Đặt $p = \frac{OA + OB + AB}{2}$, áp dụng công thức Hê-rông ta có :

$$S = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)} = 1.$$

Chú ý: HS có thể tính diện tích tam giác OAB theo các cách khác đã học.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ có đồ thị là (C) .

*a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.

*c) Hai điểm cực trị của đồ thị (C) đối xứng nhau qua điểm $I(1; 3)$.

d) Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) **Đúng.** Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) **Sai.**

$$y' = f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}, \forall x \neq 1.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y			-1		

Diagram illustrating the mapping of intervals from the x -axis to the y -axis. The x -axis has critical points at $-\infty$, -1 , 1 , 3 , and $+\infty$. The y -axis has critical points at $-\infty$, -1 , 7 , and $+\infty$. Arrows indicate the mapping of intervals: from $-\infty$ to -1 , from -1 to 1 , from 1 to 3 , and from 3 to $+\infty$.

Từ bảng biến thiên suy ra khẳng định b) sai.

c) **Đúng.**

Hai điểm cực trị của đồ thị (C) đối xứng nhau qua điểm $I(1; 3)$.

Hai điểm cực trị của (C) là $A(-1; -1), B(3; 7)$.

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Vì nên suy ra khẳng định c) đúng.

d) Sai

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}, f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}, \forall x \neq 1.$$

Ta có

$$g'(x) = [f(f'(x))]' = f''(x) \cdot f'(f'(x)).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \text{ (ptvn)} \\ f'(f'(x)) = 0 \end{cases}$$

$$f'(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = -1 \\ f'(x) = 3 \text{ (ptvn)} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -\sqrt{2} \\ x-1 = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	0	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+	0

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại và không có cực tiểu.

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m}{x + m}$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

*a) Với $m = 1$ đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; 1)$

*b) Với $m = 1$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$

c) Với $m = 1$ đồ thị hàm số nhận $x = -2; x = 0$ làm hai điểm cực trị

d) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số đạt cực đại tại $x = 2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Với $m = 1$ ta được hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có

Ta có bảng biến thiên như sau

a) Đúng: Khi $x = 0 \Rightarrow y = 1$ vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; 1)$

b) Đúng: Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$

c) Sai: Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số nhận điểm $A(0; 1)$ và điểm $B(-2; 3)$ làm hai điểm cực trị

$$y' = \frac{mx^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x - m)^2}$$

d) Sai: Đạo hàm.

$$y'(2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ nên

Thử lại với $m = -1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$: không thỏa mãn.

Thử lại với $m = -3$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$: thỏa mãn.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

*a) Với $m = 1$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng

*b) Với $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty, 1)$

c) Với $m = 1$ hàm số nhận $x = 0; x = 2$ làm hai điểm cực trị

d) Có 2024 giá trị nguyên dương của tham số $m \in (-2024; 2024)$ để hàm số có cực đại và cực tiểu

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Với $m = 1$ Ta có $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên sau:

Từ bảng biến thiên ta thấy

a) đúng

b) đúng

c) sai

d) sai vì

Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 2x - m + 1}{(x - 1)^2}$. Đặt $f(x) = x^2 - 2x - m + 1$

$$\begin{cases} \Delta'_{f(x)} > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi:

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 1, 2, \dots, 2023$ vậy có 2023 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 36. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

*a) Khi $m = 1$ thì hàm số là $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

b)] Khi $m = 1$ thì hàm số có $y' = 4x^3 - 4$.

*c) Khi $m = 1$ thì hàm số có 3 cực trị.

*d) Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi $m > 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.

b) Sai: Vì $y' = 4x^3 - 4x$

c) Đúng: Vì khi $m = 1$ thì $y = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Cho . Do đó hàm số có 3 cực trị.

d) **Đúng**: Xét phương trình $x^4 - 2mx^2 + m = 0$.

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$ phương trình trở thành $t^2 - 2mt + m = 0$.

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 2m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \Leftrightarrow m > 1 \\ m > 0 \end{cases}$$

Điều này tương đương với

Câu 37. Cho hàm số $y = x^4 - (m - 1)x^2 + m - 2$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

*a) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ có ba cực trị.

c) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

*d) Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì $m \in (2; +\infty) \setminus \{3\}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) **Đúng**.

b) **Sai**: Khi $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó hàm số có 1 cực trị.

c) **Sai**: Khi $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến khi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

d) **Đúng**:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - (m - 1)x^2 + m - 2 = 0$ (1)

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$

Phương trình trở thành $t^2 - (m - 1)t + m - 2 = 0$ (2)

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để pt có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = t_1 + t_2 > 0 \\ P = t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 3)^2 > 0 \\ m - 1 > 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (2; +\infty) \setminus \{3\}$$

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 2$ với m là tham số thực. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

*a) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn.

b) $f'(x) = 4x^3 - 2(m - 1)x$

*c) Khi $m=0$ là hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$ khi và chỉ khi $m \in (-\infty;2)$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) **Đúng:** $y=f(x)=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ là hàm số bậc 4.

b) **Sai:** Vì $f'(x)=4x^3-4(m-1)x$

c) **Đúng:** Khi $m=0$ thì $f(x)=x^4+2x^2-2 \Rightarrow f'(x)=4x(x^2+1)$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến khi $f'(x)<0 \Leftrightarrow 4x(x^2+1)<0 \Leftrightarrow x<0$

d) **Sai:** Ta có $f'(x)=4x^3-4(m-1)x=4x(x^2-m+1)$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow 4x(x^2-m+1) \geq 0, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow m \leq x^2+1, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow m \leq 2$

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+2x^2-1$ với m là tham số thực. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn.

b) Khi $m=0$ hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

*c) Khi $m=1$ hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

*d) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ khi và chỉ khi $m \in [-4;+\infty)$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) **Sai:** Vì khi $m=0 \Rightarrow f(x)=2x^2-1$ là hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc hai.

b) **Sai:** Khi $m=0 \Rightarrow f(x)=2x^2-1 \Rightarrow f'(x)=4x$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến khi $f'(x)>0 \Rightarrow x>0$

c) **Đúng:** Khi $m=1 \Rightarrow f(x)=x^4+2x^2-1 \Rightarrow f'(x)=4x^3+4x=4x(x^2+1)$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến khi $f'(x)>0 \Rightarrow 4x(x^2+1)>0 \Leftrightarrow x>0$

d) **Đúng:** Ta có $f'(x)=4mx^3+4x=4x(mx^2+1)$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4x(mx^2+1) \geq 0, \forall x \in \left(0;\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{x^2}, \forall x \in \left(0;\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \geq -4$

Câu 40. Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2+2$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

*a) Khi $m=0$ thì hàm số là $y = -x^4 + 2$.

b) Hàm số có $y' = -4x^3 + 2mx$.

*c) Khi $m=1$ thì hàm số có 3 cực trị.

*d) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông khi và chỉ khi $m=1$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.

b) Sai: Vì $y' = -4x^3 + 4mx$

c) Đúng: Vì khi $m=1$ thì $y = -x^4 + 2x^2 + 2 \Rightarrow y' = -4x^3 + 4x$

$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$. Do đó hàm số có 3 cực trị.

d) Đúng: $y' = -4x^3 + 4mx = -4x(x^2 - m)$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Gọi $A(0;2)$, $B(-\sqrt{m}, m^2 + 2)$, $C(\sqrt{m}, m^2 + 2)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $\triangle ABC$ chỉ có thể vuông tại $A \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$.

Với $\overline{AB} = (-\sqrt{m}; m^2)$, $\overline{AC} = (\sqrt{m}; m^2) \Rightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m(m^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (do $m > 0$).

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 1$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

*a) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

*b) Khi $m=0$ hàm số $y = f(x)$ có một cực trị.

c) Khi $m=0$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

*d) Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ là 45.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng.

b) Đúng: Khi $m=0 \Rightarrow f(x) = x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó hàm số có 1 cực trị.

c) Sai: Khi $m=0 \Rightarrow f(x) = x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến khi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

d) Đúng: Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Theo đề $m > 0$ nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -\sqrt{m}, x = 0, x = \sqrt{m}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 9$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Vậy tổng tất cả giá trị của m bằng 45.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

*a) Hàm số có 3 điểm cực trị.

*b) Hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; 1)$.

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số luôn có hệ số góc dương khi hoành độ tiếp điểm lớn hơn 1.

d) Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng:

Theo đề ta có: $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ta có:

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		4	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Hàm số có 3 điểm cực trị.

b) Đúng:

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Sai:

Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$.

Khi đó tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có hệ số góc là: $k = f'(x)$.

$$\begin{cases} k = f'(x) < 0; \forall x \in (1; 4) \\ k = f'(x) > 0; \forall x \in (4; +\infty) \\ k = 0 \Leftrightarrow x = 4 \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

d) Sai:

Theo đề ta có: $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$

Ta có: $g(x) = f(3 - x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3 - x) = -((3 - x)^2 - 1)((3 - x) - 4)$

$\Rightarrow g'(x) = (x^2 - 6x + 8)(x + 1)$

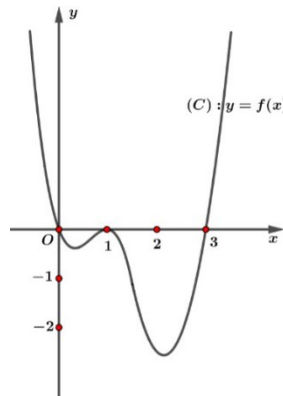
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2-6x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \\ x=4 \end{cases}$$

Ta có:

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$						$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Biết đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây.



- a) Điểm cực đại của đồ thị (C) là $x=1$.
- b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$.
- *c) Đồ thị $(C'): y=f'(x)$ luôn cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.
- *d) Đồ thị của hàm số $y=[f(x)]^2$ có bao ba điểm cực tiểu?

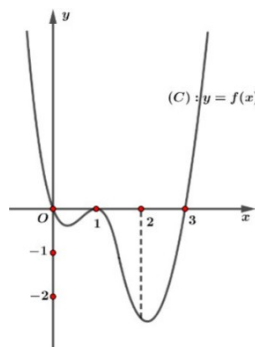
Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai:

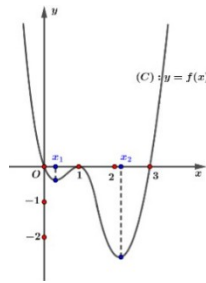
Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $M(1;0)$.

b) Sai:



Dựa vào đồ thị (C) , ta thấy hàm số $y=f(x)$ vừa nghịch biến và đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$.

c) đúng:



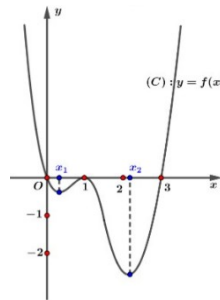
Dựa vào đồ thị ta có:

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = x_1, x = 1, x = x_2$.

Như vậy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $x = x_1, x = 1, x = x_2$.

Tức là đồ thị $(C'): y = f'(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x = x_1, x = 1, x = x_2$.

d) đúng:



Theo câu trên, từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, đạt cực tiểu tại x_1, x_2 từ đó ta thấy hàm số $y = (f(x))^2$.

$$\Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \text{ (kép)} \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 1 \\ x = x_2 \end{cases} \quad \text{với } x_1 \in (0; 1) \text{ và } x_2 \in (2; 3).$$

Quan sát đồ thị ta có

Xét hàm số $y = (f(x))^2$, ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$.

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y = (f(x))^2$:

x	$-\infty$	0	x_1	1	x_2	3	$+\infty$	
$y'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow y_1$	$\searrow$	$\nearrow y_2$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	$+$	0	$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

*a) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

*b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $(-2; -1)$.

*c) Đường thẳng $y = x + 1$ đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

*d) Hàm số $y = g(x) = f(2x - 3)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{5}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

a) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên, Dấu $f'(x)$ đổi từ âm sang dương khi qua điểm $x = -2$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.

b) Đúng: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $(-2; -1)$.

c) Đúng. Tọa độ điểm cực trị $A(-2; -1); B(1; 2)$

Đường thẳng đi qua A,B nhận $\overleftrightarrow{AB} = (3; 3)$ làm vtcp nên ta có pt: $3(x - 1) - 3(y - 2) = 0$
 $\Rightarrow x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$

d) Đúng. Ta có: $g'(x) = 2f'(2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x - 3 = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \end{cases}$

BBT

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+

Vậy: Hàm số $y = g(x) = f(2x - 3)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{5}{2}$.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$		1	5		$-\infty$

*a) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

*b) Hàm số có hai cực trị

c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là 3.

*d) Đường thẳng $y = 2x + 1$ đi qua hai điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên nên $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

b) Đúng: Quan sát bảng biến thiên, dấu $f'(x)$ đổi từ dương sang âm khi qua điểm $x = 2$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Dấu $f'(x)$ đổi từ âm sang dương khi qua điểm $x = 0$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$. Nên hàm số có hai cực trị.

c) Sai: Có $A(0;1); B(2;5)$ nên $\overline{AB} = (2;4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$.

d) Đúng: Tọa độ điểm cực trị $A(-2; -1); B(1;2)$

Đường thẳng đi qua A,B nhận $\overline{AB} = (2;4)$ làm vtcp nên ta có pt: $2(x-0) - 1(y-1) = 0$
 $\Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$.

Câu 46. Cho hàm số $y = |x+1|(x-2)$. Khi đó:

*a) Hàm số có 2 điểm cực trị

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

*c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(\frac{1}{2}; +\infty)$

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{2})$ và $(\frac{1}{2}; +\infty)$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Ta có $y' = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq -1 \\ -2x+1 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	$ $	$-$	0	$+$
y					

Nhìn bảng biến thiên ta thấy

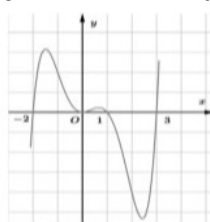
a) Đúng

b) Sai

c) Đúng

d) Sai

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên



Khi đó:

a) Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

*c) Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{3}; +\infty)$

*d) Hàm số $y = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

$$f'(x) = 0 \hat{=} \begin{cases} = -2 \\ = 0 \\ = 1 \\ = 3 \end{cases}$$

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có

$$f'(x) > 0 \hat{=} \begin{cases} x > 3 \\ 2 < x < 1 \end{cases}; f'(x) < 0 \hat{=} \begin{cases} x < -2 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2); g'(x) = 0 \hat{=} \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có

$$f'(x^2) > 0 \hat{=} \begin{cases} x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < -\sqrt{3} \\ x > \sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có

Ta có bảng biến thiên:

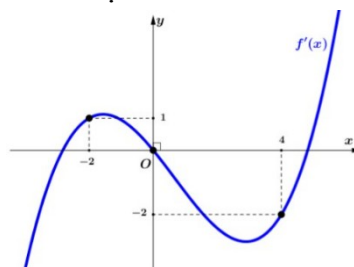
x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x^2)$	+	0	-	0	+	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	↘ ↗ ↘ ↗ ↘ ↗ ↘ ↗						

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.

Vậy

- a) Sai
- b) Sai
- c) Đúng
- d) Đúng

Câu 48. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- *b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- c) Hàm số $h(x) = 5f(|2 - x|) + 2024$ có 5 điểm cực trị.
- *d) Hàm số $g(x) = 4f(x^2 - 4) + x^4 - 8x^2$ có 4 điểm cực tiểu.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

--	--	--	--

a) Sai. Ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

b) Đúng. Ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$

c) Sai. Số điểm cực trị của hàm số $h(x) = 5f(|2 - x|) + 2024$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$. Mà $f(x)$ có một điểm cực trị dương nên $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

$$g'(x) = 8x \cdot f'(x^2 - 4) + 4x^3 - 16x = 8x \left(f'(x^2 - 4) + \frac{x^2 - 4}{2} \right)$$

d) Đúng. Ta có

$$f'(x) + \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Xét

Suy ra $f'(x) + \frac{x}{2}$ là đa thức bậc 3 có các nghiệm $x = -2, x = 0, x = 4$ nên có dạng

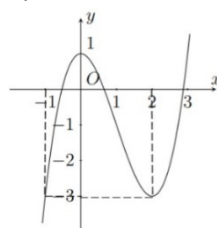
$$f'(x) + \frac{x}{2} = ax(x+2)(x-4), (a > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty)$$

Do đó: $g'(x) = 8ax(x^2 - 4 + 2)(x^2 - 4)(x^2 - 4 - 4) = 8ax(x^2 - 2)(x^2 - 4)(x^2 - 8)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2\sqrt{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta thấy và $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua các điểm $x = -2\sqrt{2}, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = 2\sqrt{2}$ nên hàm số $g(x)$ đã cho có 4 điểm cực tiểu.

Câu 49. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

*a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x = 2$.

*c) Hàm số $y = f(f(x))$ có tất cả 5 điểm cực trị.

d) Cho hàm số $h(x)$ có đạo hàm $h'(x) = f(x^3 - 3x^2 + m) + 3$. Khi đó có tất cả 10 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $h(x)$ có hoành độ cực trị thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

b) Sai. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(2; -3)$.

c) Đúng. Ta có:

$$y = f(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy pt: $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và $f(x) = 2$ có một nghiệm.

Vậy hàm số $y = f(f(x))$ có tất cả 5 điểm cực trị.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m = -1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases}$$

d) Sai. Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 = -1 - m \\ x^3 - 3x^2 = 2 - m \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$

Ta có BBT:

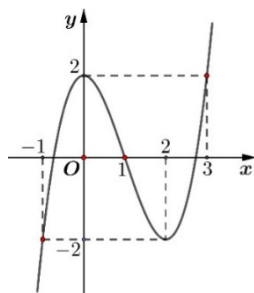
x	-1	0	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-4	0	-4

Dựa vào bảng biến thiên và yêu cầu bài toán:

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq -1 - m \leq 0 \\ -4 \leq 2 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 3 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 6$$

Suy ra $m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Câu 50. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

*a) Hàm số $y=f'(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.

c) Hàm số $y=f(x^2)$ có 4 điểm cực trị.

*d) Hàm số $g(x)=\left|18f\left(1-\frac{x}{3}\right)-x^2\right|$ có 7 điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng.

$$f'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_1 (-1 < x_1 < 0) \\ x=1 \\ x=x_2 (2 < x_2 < 3) \end{cases}$$

b) Sai. Ta có:

BBT:

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

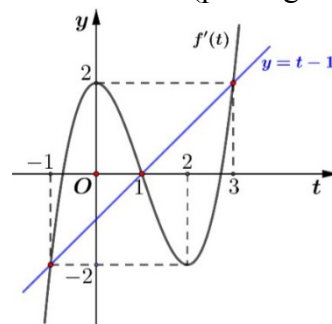
c) Sai. Ta có:

$$y=f(x^2) \Rightarrow y'=2x.f'(x^2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=x_1(L) \\ x^2=1 \\ x^2=x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{x_2} \end{cases}$$

Vậy hàm số $y=f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.

d) Đúng. Xét hàm số $h(x)=18f\left(1-\frac{x}{3}\right)-x^2$. Ta có: $h'(x)=-6.f'\left(1-\frac{x}{3}\right)-2x$.

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{3}\right)=-\frac{x}{3} \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{3}\right)=\left(1-\frac{x}{3}\right)-1 \quad (\text{phương trình có dạng: } f'(t)=t-1)$$



$$f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \left(1 - \frac{x}{3}\right) - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{x}{3} = -1 \\ 1 - \frac{x}{3} = 1 \\ 1 - \frac{x}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

- Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đồ thị hàm đa thức bậc ba, có hai điểm cực trị là $A(0; 2)$ và $B(2; -2)$. Suy ra:

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x + d$$

Do $f(0) = \frac{1}{2}$ nên $d = \frac{1}{2}$. Ta được: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x + \frac{1}{2}$.

Ta có:

$$h(-6) = 18f(3) - 36 = 18\left[f(3) - 2\right] = 18\left(\frac{-1}{4} - 2\right) = -\frac{81}{2}$$

$$h(0) = 18f(1) - 0 = \frac{63}{2}$$

$$h(6) = 18f(-1) - 36 = 18\left[f(-1) - 2\right] = 18\left(\frac{-1}{4} - 2\right) = -\frac{81}{2}$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-6	0	6	$+\infty$				
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$		$-\frac{81}{2}$		$\frac{63}{2}$		$-\frac{81}{2}$		$+\infty$
$g(x) = h(x) $	$+\infty$		$\frac{81}{2}$		$\frac{63}{2}$		$\frac{81}{2}$		$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$ có 7 điểm cực trị.

---HẾT---

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>