

**Câu 1:** (2.0 điểm )

Cho biểu thức :  $A = \left( \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} \right) : \left( 2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$

1/ Rút gọn biểu thức A.

2/ Tìm các giá trị của x để  $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

**Câu 2** (2,0 điểm )

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) :  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) và đường thẳng (d):

$$y = bx + 1$$

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm M(1; 2)

2/ Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M. Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc tọa độ)

**Câu 3** (2.0 điểm)

1/ Cho phương trình:  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0$  (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

2/ Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

**Câu 4** (3.0 điểm) : Cho A là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ tiếp tuyến AP và AQ tới đường tròn (P và Q là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua O và vuông góc với OP cắt đường thẳng OQ tại M.

1/ Chứng minh rằng:  $MO = MA$

2/ Lấy điểm N trên cung lớn PQ của đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến với (O) tại N cắt các tia AP, AQ lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng:

a)  $AB + AC - BC$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm N.

b) Nếu tứ giác BCQP nội tiếp được trong một đường tròn thì  $PQ \parallel BC$

**Câu 5** (1.0 điểm)

Cho x, y là các số thực dương thoả mãn :  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$ . Chứng minh rằng :

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

----- **Hết** -----

Họ tên thí sinh ..... Số báo danh: .....

Chữ ký giám thị 1: ..... Chữ ký giám thị 2: .....

## Bài giải

### Câu 1: (2.0 điểm )

Cho biểu thức :  $A = \left( \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left( 2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

1/ Rút gọn biểu thức A.

$$A = \left( \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left( 2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \quad (\text{ĐK: } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$$

$$A = \dots = \frac{\sqrt{x}+1}{x-4}$$

2/ Tìm các giá trị của x để  $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

$$\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x}+1} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x-8 \leq -5\sqrt{x}-5$$

$$\Leftrightarrow 2x+5\sqrt{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

Kết hợp với ĐK  $\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

### Câu 2 (2,0 điểm )

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) :  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) và đường thẳng (d):  $y = bx + 1$

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm M(1; 2)

$$M \in (P) \Rightarrow \dots \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x^2$$

$$M \in (d) \Rightarrow \dots \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = x + 1$$

2/ Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M. Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc tọa độ)

$$\text{Xét pt hoành độ gđ: } 2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M(1; 2); N\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$S_{\Delta MON} = S_{\text{thang}} - (S_1 + S_2) = \dots = 0,75 \quad (\text{dvv})$$

### Câu 3 (2.0 điểm)

1/ Cho phương trình:  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$  (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt?

phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.c > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 > 0 \\ m^2 + m - 6 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 2 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

2/ Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 & (1) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 & (2) \end{cases} \quad (\text{ĐK: } x \geq 1; y \geq 1)$$

(2)  $\Leftrightarrow x + y = xy$  (3)

Hai vế của (1) đều dương ta bình phương hai vế ta có:

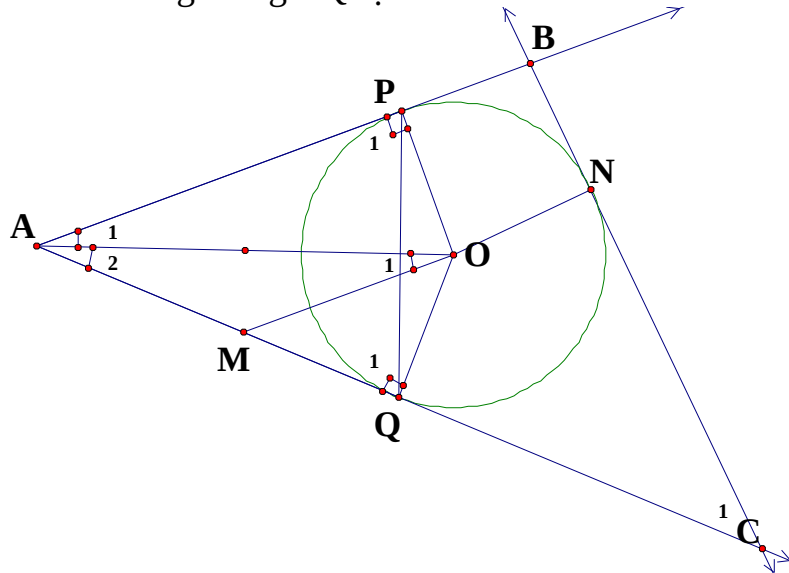
$$x + y - 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} = 4$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2 + 2\sqrt{xy - (x+y) + 1} = 4$$

Thay (3) vào ta có:  $x + y = 4$  kết hợp với (3) có hệ: 
$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Vi Ét ta có  $x; y$  là hai nghiệm của pt:  $X^2 - 4x + 4 = 0$   
 $\Rightarrow x = 2; y = 2$

**Câu 4** (3.0 điểm) : Cho  $A$  là điểm cố định nằm ngoài đường tròn  $(O)$ . Từ  $A$  kẻ tiếp tuyến  $AP$  và  $AQ$  tới đường tròn ( $P$  và  $Q$  là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua  $O$  và vuông góc với  $OP$  cắt đường thẳng  $OQ$  tại  $M$ .



1/ Chứng minh rằng:  $MO = MA$

$\angle A_1 = \angle O_1$  và  $\angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow \angle A_2 = \angle O_1 \Rightarrow \Delta MAO$  cân  $\Rightarrow MO = MA$

2/ Lấy điểm  $N$  trên cung lớn  $PQ$  của đường tròn  $(O)$  sao cho tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $N$  cắt các tia  $AP, AQ$  lần lượt tại  $B$  và  $C$ . Chứng minh rằng:

a)  $AB + AC - BC$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $N$ .

Theo t/c hai tia tiếp tuyến ta có  $\dots \Rightarrow AB + AC - BC = \dots = 2.AP$  (không đổi)

b) Nếu tứ giác  $BCQP$  nội tiếp được trong một đường tròn thì  $PQ \parallel BC$

Nếu tứ giác  $BCQP$  nội tiếp được  $\Rightarrow \angle P_1 = \angle C_1$

$$\text{mà } \angle P_1 = \angle Q_1 \Rightarrow \angle C_1 = \angle Q_1 \Rightarrow PQ // BC$$

**Câu 5** (1.0 điểm)

Cho  $x, y$  là các số thực dương thoả mãn :  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$ . Chứng minh rằng :

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

\* Ta có:

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + y - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0$$

$$* \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{y} = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{2x - 1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{2x}{2x - 1}$$

Vì :  $y > 0 ; x > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1/2$  Thay  $y = \frac{2x}{2x - 1}$  vào  $x^2 + y - 3 \geq 0$

$$\text{Ta có: } x^2 + y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2x}{2x - 1} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3}{2x - 1} \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } 2x - 1 > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$\text{Mà } 2x^3 - x^2 - 4x + 3$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x - 3x + 3$$

$$= (x - 1)(2x^2 + x - 3)$$

$$= (x - 1)^2(2x + 3) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

$$\text{Vậy } (2x - y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0 \quad \forall x > 0; y > 0$$