

Bài 8. Cấp số nhân

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN D. CÂU HỎI ĐÚNG-SAI

Câu 1. Cho các dãy số sau đây: $u_n = (\sqrt{5})^{2n-3}$; $v_n = \frac{2}{n}$; $w_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$ và dãy số hữu hạn gồm các số hạng: $16; 4; 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}$. Khi đó:

*a) (u_n) là một cấp số nhân công bội $q = 5$.

*b) (v_n) không phải là một cấp số nhân

*c) (w_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $w = \frac{9}{2}$

d) Dãy số hữu hạn đã cho theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{8}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Ta có: $u_{n+1} = (\sqrt{5})^{2(n+1)-3} = (\sqrt{5})^{2n-1} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\sqrt{5})^{2n-1}}{(\sqrt{5})^{2n-3}} = (\sqrt{5})^2 = 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ với công bội $q = 5$.

b) Ta có: $v_{n+1} = \frac{2}{n+1} \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1}$ (tỉ số này còn phụ thuộc vào n).

Do đó (v_n) không phải là một cấp số nhân.

c) Ta có: $w_{n+1} = \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} \Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n}}{\frac{3^{n+1}}{2^n}} = \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó (w_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $w_1 = \frac{3^2}{2^1} = \frac{9}{2}$ với công bội $q = \frac{3}{2}$

d) Đặt $u_1 = 16; u_2 = 4; u_3 = 1; u_4 = \frac{1}{4}; u_5 = \frac{1}{16}; u_6 = \frac{1}{64}$.

Ta có: $u_2 = u_1 \cdot \frac{1}{4}; u_3 = u_2 \cdot \frac{1}{4}; u_4 = u_3 \cdot \frac{1}{4}; u_5 = u_4 \cdot \frac{1}{4}; u_6 = u_5 \cdot \frac{1}{4}$.

Vì vậy dãy số hữu hạn đã cho theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{4}$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4, u_4 = 9$. Khi đó:

*a) Số hạng đầu $u_1 = -\frac{8}{3}$

b) Số hạng $u_5 = \frac{27}{2}$

c) $-\frac{2187}{32}$ là số hạng thứ 8

d) Cấp số nhân có công bội $q = -\frac{3}{2}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

Ta có: $u_2 = u_1 q = 4, u_4 = u_1 q^3 = 9 \Rightarrow \frac{u_4}{u_2} = \frac{u_1 q^3}{u_1 q} \Rightarrow \frac{9}{4} = q^2 \Rightarrow q = -\frac{3}{2} (q < 0)$

Thay $q = -\frac{3}{2}$ vào u_2 , ta được: $u_1 \left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \Rightarrow u_1 = -\frac{8}{3}$

Vậy cấp số nhân đã cho có số hạng đầu $u_1 = -\frac{8}{3}$ và công bội $q = -\frac{3}{2}$.

Khi đó $u_n = -\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Vậy $u_5 = -\frac{27}{2}$

$-\frac{2187}{32} \neq -\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^7$ nên không phải là số hạng thứ 8

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 + u_5 = 51; u_2 + u_6 = 102$. Khi đó:

*a) Số hạng $u_1 = 3$

b) Số hạng $u_4 = 48$

c) Số 12288 là số hạng thứ 12 của cấp số nhân (u_n)

*d) Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là: 765.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho.

Ta có: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q^4) = 51 \\ u_1 q (1 + q^4) = 102 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Nhận xét: Nếu $u_1 = 0$ hay $q = 0$ thì (1) và (2) đều không thỏa mãn, vì vậy ta có $u_1 q \neq 0$. Chia theo vế (2) cho (1), ta được: $q = 2$.

Thay $q = 2$ vào (1) suy ra $u_1 = \frac{51}{1+2^4} = 3$.

Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

b) $u_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$

c) Xét $u_n = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 13$

Vậy 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

d) Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là: $S_8 = \frac{u_1 (1 - q^8)}{1 - q} = \frac{3 \cdot (1 - 2^8)}{1 - 2} = 765$

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_4 = \frac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$. Khi đó:

*a) Số hạng $u_1 = 2; u_2 = \frac{2}{3}$

*b) $u_5 - u_3 = -\frac{16}{81}$

c) Số $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 8 của cấp số nhân

d) Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là số lớn hơn 3.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) .

$$\begin{cases} u_1 q^3 = \frac{2}{27} \\ u_1 q^2 = 243 u_1 q^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 q^3 = \frac{2}{27} \\ q^5 = \frac{1}{243} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Theo giả thiết, ta có:

Năm số hạng đầu của (u_n) là: $u_1 = 2; u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{2}{9}; u_4 = \frac{2}{27}; u_5 = \frac{2}{81}$.

c) Số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{2}{3^{n-1}}$.

Xét $u_n = \frac{2}{6561} \Rightarrow \frac{2}{3^{n-1}} = \frac{2}{6561}$

$\Rightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 9.$

Vậy $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 9 của cấp số nhân (u_n) .

$$S_9 = \frac{u_1 (1 - q^9)}{1 - q} = \frac{2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^9\right)}{1 - \frac{1}{3}} \approx 2,99985 < 3$$

d) Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là:

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Khi đó:

*a) Số hạng $u_1 = 2$

b) Gọi q là công bội của cấp số nhân, thì ba số $q; 1; 3$ tạo thành một cấp số cộng

c) Số -486 là số hạng thứ 5 của cấp số nhân

*d) Tổng của 21 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng 5230176602

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Gọi q là công bội và S_{21} là tổng của 21 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_3 + u_5)q = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 180q = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1(-3)^2 + u_1(-3)^4 = 180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1(9+81) = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Số $-486 = 2 \cdot (-3)^5$ nên số -486 là số hạng thứ 6

$$\text{Suy ra } S_{21} = \frac{u_1(1-q^{21})}{1-q} = \frac{2[1-(-3)^{21}]}{1-(-3)} = \frac{1+3^{21}}{2}$$

Câu 6. Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Khi đó:

- *a) Số đo góc nhỏ nhất bằng 24°
- b) Số đo góc lớn nhất bằng 196°
- c) Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng 220°
- *d) Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng 168°

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Đặt $u_1; u_2; u_3; u_4$ theo thứ tự là số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$, gọi q là công bội của cấp số nhân $u_1; u_2; u_3; u_4 \Rightarrow q = 2$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{1-2^4}{1-2} = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 24^\circ \\ q = 2 \end{cases}$$

Vậy số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$ là: $24^\circ; 48^\circ; 96^\circ; 192^\circ$

Câu 7. Cho các dãy số $a_n = n^2 + n + 1$; $b_n = (n+2) \cdot 3^n$; $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_{n+1} = \frac{6}{c_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$; $d_n = (-4)^{2n+1}$. Khi đó

- *a) (a_n) không phải là cấp số nhân
- *b) (b_n) không phải là cấp số nhân
- c) (c_n) là một cấp số nhân
- *d) (d_n) là một cấp số nhân

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, không phải là hằng số. Vậy (a_n) không phải là cấp số nhân.

b) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+3) \cdot 3^{n+1}}{(n+2) \cdot 3^n} = \frac{3(n+3)}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, không phải là hằng số. Vậy (b_n) không phải là cấp số nhân.

c) Từ công thức truy hồi của dãy số, suy ra $c_1 = 2; c_2 = 3; c_3 = 2; c_4 = 3; \dots$

Vì $\frac{c_3}{c_2} \neq \frac{c_2}{c_1}$ nên (c_n) không phải là cấp số nhân.

d) $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(-4)^{2(n+1)+1}}{(-4)^{2n+1}} = 16, \forall n \in \mathbb{N}$. Vậy (d_n) là một cấp số nhân công bội $q = 16$.

Câu 8. Cho cấp số nhân (u_n) biết rằng $u_1 + u_2 + u_3 = 168$ và $u_4 + u_5 + u_6 = 21$. Khi đó:

a) Số hạng $u_1 = 90$

b) Công bội của cấp số nhân bằng 2

*c) Số 24 là số hạng thứ 3 của cấp số nhân

*d) Tổng của 10 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng $\frac{3069}{16}$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Ta có:
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 168 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 168 \\ u_1 \cdot q^3 + u_1 \cdot q^4 + u_1 \cdot q^5 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 168 \\ u_1 q^3(1 + q + q^2) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{168}{1 + q + q^2} \\ q^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 96 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có $24 = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$

$$S_{10} = \frac{u_1(1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{96 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3069}{16}$$

Ta có

Câu 9. Xác định tính đúng, sai của các khẳng định sau:

*a) Dãy số (u_n) với $u_n = (-7)^n \cdot 5^{3n-1}$ là cấp số nhân với công bội $q = -875$.

b) Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$ là cấp số nhân với công bội $q = -4$.

*c) Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ không là cấp số nhân.

*d) Dãy số (u_n) với $-\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 1$ không là cấp số nhân.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-7)^{n+1} \cdot 5^{3(n+1)-1}}{(-7)^n \cdot 5^{3n-1}} = \frac{(-7) \cdot 5^2}{5^1} = -7 \cdot 5^3 = -875$ không đổi.

Vậy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -875$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases} \text{ Khi đó } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-5u_n}{u_n} = -5$$

Vậy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -5$.

c) Ta có: $u_2 = u_1^2 = 2^2 = 4; u_3 = u_2^2 = 4^2 = 16; u_4 = u_3^2 = 16^2 = 256$

Khi đó: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2; \frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16$

Nhận thấy: $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3} (2 \neq 16)$

Vậy (u_n) không là cấp số nhân.

d) Ta có: $\frac{u_2}{u_1} = \left(-\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{8}\right) = 2; \frac{u_4}{u_3} = 1 : \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

Nhận thấy: $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3} (2 \neq -2)$

Vậy (u_n) không là cấp số nhân.

Câu 10. Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là: "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay". Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Khi đó:

*a) Ngày thứ hai Aladin ước 6 điều.

*b) Ngày thứ ba Aladin ước 12 điều.

c) Ngày thứ tư Aladin ước 48 điều.

d) Sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả 3269 điều ước

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Ngày thứ nhất Aladin ước 3 điều.

Ngày thứ hai Aladin ước $2 \cdot 3$ điều.

Ngày thứ ba Aladin ước $2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ điều.

Ngày thứ tư Aladin ước $2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$ điều. ...

Ngày thứ 10 Aladin ước $2^9 \cdot 3$ điều.

$$3(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9) = 3 \left(\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \right) = 3069$$

Vậy sau 10 ngày Aladin đã ước: điều.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội nguyên và các số hạng thỏa mãn
$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$$

*a) Số hạng đầu của cấp số nhân bằng 9

b) Công bội của cấp số nhân $q = 3$

*c) Tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599

d) Số 576 là số hạng thứ 6 của cấp số nhân

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

$$\text{a) b) Ta có: } \begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 54 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q (q^2 - 1) = 54 \\ u_1 q^2 (q^2 - 1) = 108 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{54}{q(q^2 - 1)} \\ \frac{1}{q} = \frac{54}{108} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{54}{2(2^2 - 1)} \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) Ta có: } S_n = 4599 \Leftrightarrow \frac{u_1 (1 - q^n)}{1 - q} = 4599 \Leftrightarrow \frac{9 (1 - 2^n)}{1 - 2} = 4599$$

$$\Leftrightarrow -9 (1 - 2^n) = 4599 \Leftrightarrow 1 - 2^n = -511 \Leftrightarrow 2^n = 512 \Leftrightarrow n = 9$$

Vậy tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599.

$$\text{d) Ta có: } u_k = 576 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{k-1} = 576 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^{k-1} = 576 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 64 \Leftrightarrow k - 1 = 6 \Leftrightarrow k = 7$$

Vậy số 576 là số hạng thứ 7 của cấp số nhân.

----HẾT---