

Câu 1:(1 điểm)Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^4 + 2009x^2 + 2008x + 2009$ **Câu 2:**(1 điểm)

Giải phương trình sau:

$$\frac{x+2}{13} + \frac{2x+45}{15} = \frac{3x+8}{37} + \frac{4x+69}{9}$$

Câu 3: (2 điểm)

- a/ Chứng minh rằng $\frac{a^4+b^4}{2} \geq ab^3+a^3b-a^2b^2$
- b/ Cho hai số dương a,b và $a=5-b$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ **Câu 4:**(2 điểm)

a/ Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện :

$$a^{2006} + b^{2006} = a^{2007} + b^{2007} = a^{2008} + b^{2008}$$

Hãy tính tổng: $S = a^{2009} + b^{2009}$

$$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$$

b/ Chứng minh rằng : $A = \frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}}$ là số nguyên**Câu 5:** (1 điểm) Tìm các số nguyên dương x,y thỏa mãn phương trình sau:

$$xy - 2x - 3y + 1 = 0$$

Câu 6: (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC > AB$, đường cao AH (H thuộc BC). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

- a) Chứng minh hai tam giác BEC và ADC đồng dạng
- b) Chứng minh tam giác ABE cân.
- c) Gọi M là trung điểm của BE và vẽ tia AM cắt BC tại G. Chứng minh

rằng:
$$\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$$

Câu 1: (1 điểm)

$$\begin{aligned}
 & x^4 + 2009x^2 + 2008x + 2009 \\
 = & (x^4 + x^2 + 1) + 2008(x^2 + x + 1) && 0,25 \text{ đ} \\
 = & (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2008(x^2 + x + 1) && 0,5 \text{ đ} \\
 = & (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2009) && 0,25 \text{ đ}
 \end{aligned}$$

Câu 2: (1 điểm)

$$\begin{aligned}
 & \frac{x+2}{13} + \frac{2x+45}{15} = \frac{3x+8}{37} + \frac{4x+69}{9} \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{x+2}{13} + 1\right) + \left(\frac{2x+45}{15} - 1\right) = \left(\frac{3x+8}{37} + 1\right) + \left(\frac{4x+69}{9} - 1\right) && 0,25 \text{ đ} \\
 \stackrel{a=1, b=1}{\Leftrightarrow} & \frac{x+15}{13} + \frac{2(x+15)}{15} = \frac{3(x+15)}{37} + \frac{4(x+15)}{9} && 0,25 \text{ đ} \\
 \Leftrightarrow & (1-a)(1-b) = 0 && 0,25 \text{ đ} \\
 \Leftrightarrow & x = -15 && 0,25 \text{ đ}
 \end{aligned}$$

Câu 3: (2 điểm)

a/ (1 điểm)

$$\begin{aligned}
 & \frac{a^4 + b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2 \\
 \Leftrightarrow & a^4 + b^4 \geq 2ab^3 + 2a^3b - 2a^2b^2 && 0,25 \text{ đ} \\
 \Leftrightarrow & a^4 + b^4 - 2ab^3 - 2a^3b + 2a^2b^2 \geq 0 && 0,25 \text{ đ} \\
 \Leftrightarrow & (a^4 - 2a^3b + a^2b^2) + (b^4 - 2ab^3 + a^2b^2) && 0,25 \text{ đ} \\
 \Leftrightarrow & (a^2 - ab)^2 + (b^2 - ab)^2 \geq 0 && 0,25 \text{ đ}
 \end{aligned}$$

b/ (1 điểm)

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{5}{ab} \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$P = \frac{20}{4ab} \geq \frac{20}{(a+b)^2} = \frac{4}{5} \quad 0,5 \text{ đ}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{5}$ khi $a=b=\frac{5}{2}$ 0,25 đ

Câu 4 (2 điểm)

a/ (1 điểm)

Ta có: $a^{2008} + b^{2008} = (a^{2007} + b^{2007})(a+b) - ab(a^{2006} + b^{2006})$ 0,25 đ

$$\Leftrightarrow 1 = a+b-ab \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow (1-a)(1-b) = 0 \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$\Rightarrow a=1, b=1$$

Vậy $S=1+1=2$

0,25 đ

b/ (1 điểm)

$$A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}}$$

$$A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$= \frac{2\sqrt{3+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6+\sqrt{2}})^2}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$= 1 \in \mathbb{Z} \quad 0,25 \text{ đ}$$

Câu 5 (1 điểm)

$$xy - 2x - 3y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow xy - 3y = 2x - 1$$

$$\Rightarrow y(x-3) = 2x-1 \quad 0,25 \text{ đ}$$

Ta thấy $x=3$ không thỏa mãn, với $x > 3$ thì

$$y = 2 + \frac{5}{x-3} \quad 0,25 \text{ đ}$$

Để y nguyên thì $x-3$ phải là ước của 5 0,25 đ

Suy ra: (x,y) là $(4,7); (8,3)$ 0,25 đ

Câu 6 (3 điểm)

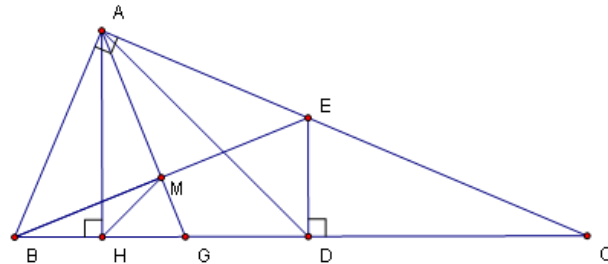
a) (1đ điểm)

Tam giác ADC và tam giác BEC:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} \quad (\text{vì hai tam giác CDE và CAB đồng dạng})$$

Góc C: chung 0,75 đ

Suy ra: Tam giác ADC đồng dạng với tam giác BEC (c-g-c) 0,25 đ



b)(1 điểm) Theo câu ta suy ra: $\angle BEC = \angle ADC$

có: $\angle ADC = \angle EDC + \angle ADE = 135^\circ$

Suy ra: $\angle BEC = 135^\circ$ 0,5 đ

Suy ra: $\angle AEB = 45^\circ$ 0,25 đ

Do đó: Tam giác ABE cân (tam giác vuông có một góc bằng 45°) 0,25 đ

c)(1 điểm)

Tam giác ABE cân tại E nên AM còn là phân giác của góc BAC

Suy ra: $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$, mà $\frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC}$ ($\triangle ABC \sim \triangle DEC$) $= \frac{AH}{HC}$ ($ED \parallel AH$) $= \frac{HD}{HC}$ 0,5 đ

Do đó: $\frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$ 0,5 đ